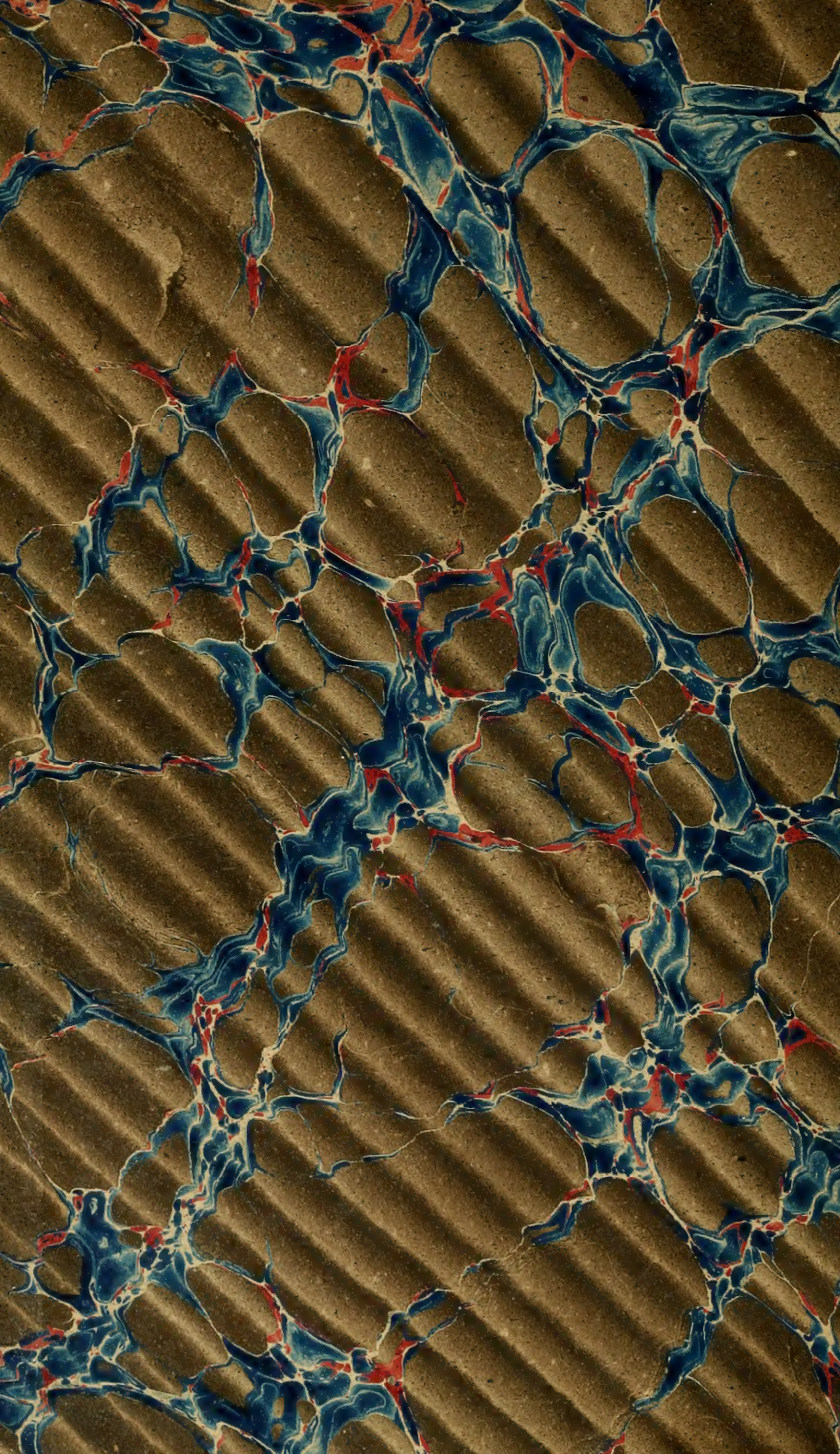
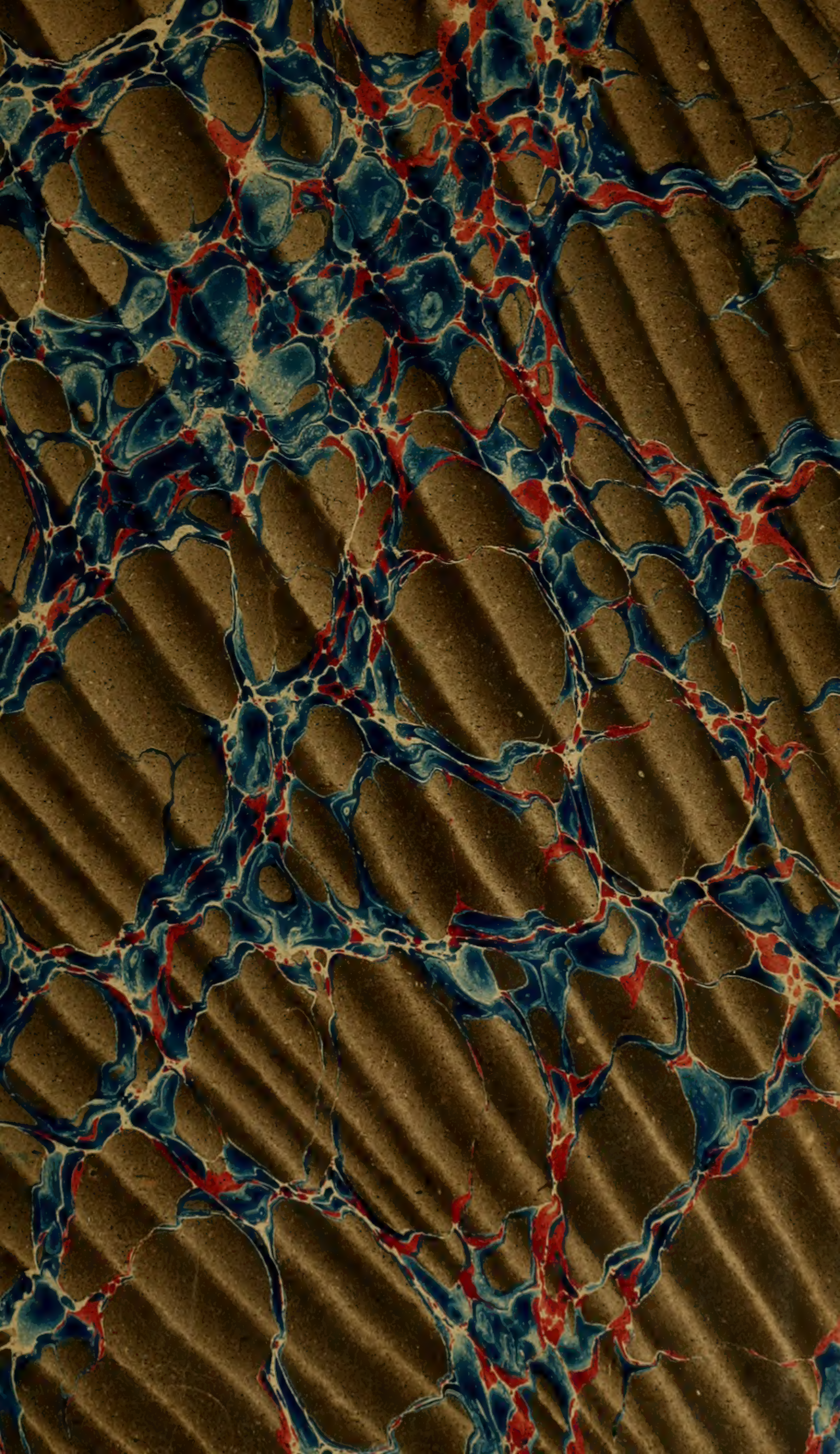
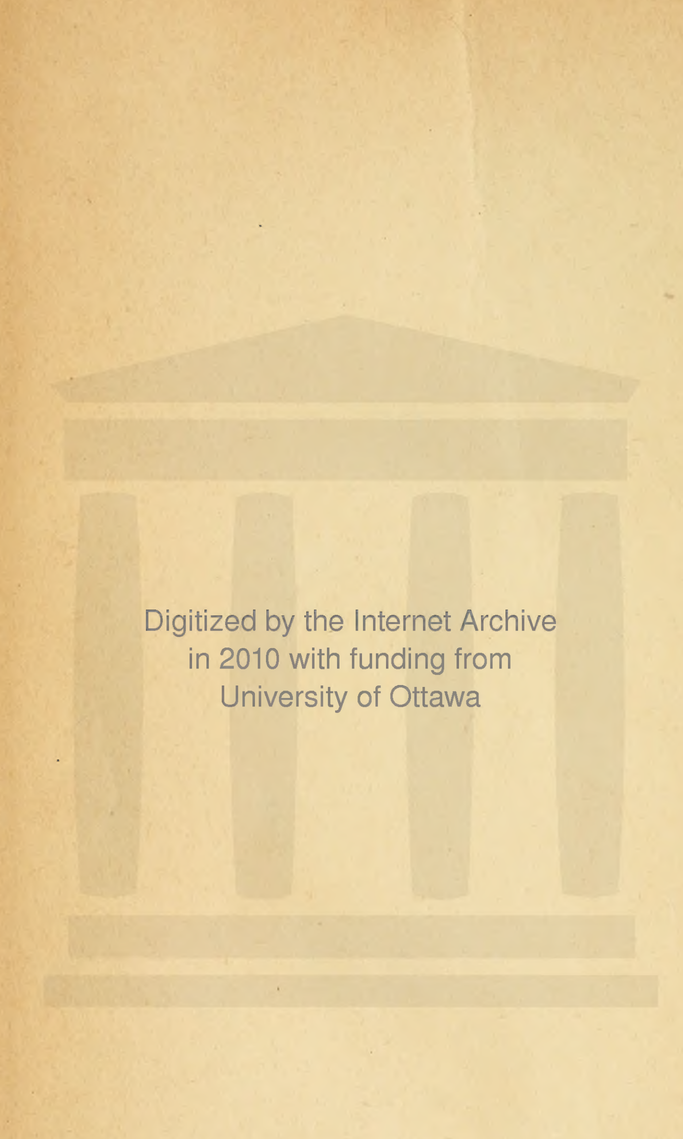

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY







JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

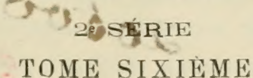
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

DE LONGCHAMPS
Professeur
de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne.



2e SÉRIE

TOME SIXIÈME



ANNÉE 1882

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

PROBLÈME D'ANALYTIQUE

Lieu des sommets des coniques bitangentes à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ces coniques passent par un point fixe P (x'y') *et l'un des axes est dirigé suivant le grand axe de l'ellipse. Distinguer les différentes formes du lieu.* (Concours académique de Poitiers.)

La condition imposée que l'un des axes soit dirigé suivant XX', revient à la condition de symétrie par rapport à cette même ligne, et cette condition sera satisfaite si la corde commune EF est toujours perpendiculaire sur OX.

L'équation des coniques bitangentes et confondant l'un de leurs axes avec XX' sera donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda (x - \alpha)^2 = 0, \qquad (1)$$

α étant l'abscisse à l'origine de la corde EF.

La condition pour ces coniques de passer par le point P (x'y') se traduit par la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 + \lambda(x' - \alpha)^2 = 0 \qquad (2)$$

et les coordonnées des sommets dont on cherche le lieu vérifieront l'équation de l'axe parallèle à OY, qui est

$$f'_x = x\left(\frac{1}{a} + \lambda\right) - \alpha\lambda = 0. \qquad (3)$$

On aura le lieu en éliminant les paramètres α et λ entre (1), (2), (3).

Elimination. — Ecrivons, pour simplifier, les relations précédentes, sous la forme

$$A + \lambda(x - \alpha)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x - \alpha)^2 = - A \qquad (1)$$
$$P + \lambda(x' - \alpha)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x' - \alpha)^2 = - P \qquad (2)$$
$$\frac{x}{a^2} + \lambda(x - \alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(x - \alpha) = - \frac{x}{a^2} \qquad (3)$$

(on voit ce que représentent A et P);

formons le rapport (1) (3) $\begin{cases} x - \alpha = \dfrac{Aa^2}{x} \\ \alpha = \dfrac{x^2 - Aa^2}{x}; \end{cases}$

cette valeur de α substituée dans (3) donne

$$\lambda = - \frac{x^2}{Aa^4};$$

les deux paramètres α et λ déterminés, l'équation (2) devient

$$P - \frac{x^2}{Aa^4}\left(x' - \frac{x^2 - Aa^2}{x}\right)^2 = 0$$

$$a^4 \, P.A = \left[xx' - x^2 + a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]^2$$

$$A.P = \left[\frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right]^2$$

d'où l'équation

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]\left[\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right] = \left[\frac{'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right]^2$$

Cette forme $A.P = C^2$ prouve à la fois que

1° L'ellipse $A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, la parabole $C = \frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et la courbe $A.P - C^2 = 0$ se coupent aux mêmes points;

2° En ces points la courbe est tangente à l'ellipse.

Déterminons ces points remarquables.

Intersection avec l'ellipse. — Il suffit de résoudre

$$A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$C = \frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

rmons $A - C = o$, $\frac{x}{a^2}(x - x') = o$ ce qui conduit à ce
sultat : les points d'intersection du lieu avec l'ellipse sont
r les droites $\begin{cases} x = o & (1) \\ x = x' & (2) \end{cases}$

Le premier système donne les sommets B et B'.

Le second système donne les points dont les ordonnées
nt

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x'^2}{a^2}$$

Ces points seront réels si $x' \leq \pm a$.

Ces points seront imaginaires si $x' > \pm a$;
ı cas particulier où $x' = a$, les points se confondent.

L'équation est bicarrée en y : du second degré en x, elle
əut donc être résolue par rapport aux deux variables; cette
ırticularité servira pour la discussion.

Elle est symétrique par rapport à l'axe des x (évident *à
riori*).

La courbe passe par le point P $(x'y')$ et en ce point la tan-
ente est horizontale (ce que nous vérifierons plus loin par
calcul). Ces deux remarques se justifient facilement.

1° *Elle passe par le point* P. — En effet on peut déterminer
ne conique en ajoutant aux conditions de bitangence et
e symétrie (ce qui fait 3 conditions) deux autres conditions,
elles d'avoir pour sommet le point P. Cette conique par-
culière rentrera donc dans la famille considérée et donnera
n point du lieu qui sera le point P.

2° En ce point la *tangente est horizontale*, car les coniques
onsidérées formeront dans le voisinage de P un ensemble
eprésenté soit par la figure (*a*), soit par la figure (*b*).

Les coniques du groupe (*a*) ont toutes l'axe parallèle à OY,
us grand que celui de la conique particulière dont nous
ırlons.

C'est le contraire pour le groupe (*b*). Dans les deux cas, la
ourbe, lieu des sommets M, sera tangente à $y = y'$.

Cherchons donc les *tangentes horizontales* :

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$$

formons

$$f'_x=\frac{2x}{a^2}\,\mathrm{P}-2\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\frac{x'}{a^2}=0$$

$$x\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-x'\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$x\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-x'\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

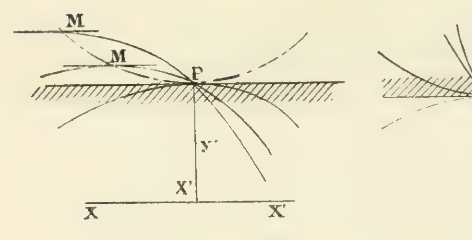


Fig. a.

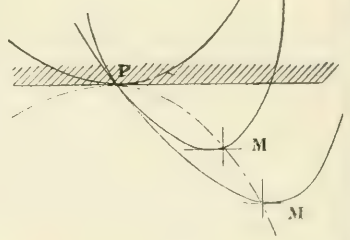


Fig. b.

Cette relation est vérifiée par les deux systèmes de valeur

$$1^\circ \begin{cases} x=0 \\ y=\pm b \end{cases}$$

ce sont les points B et B′ que nous avons déjà trouvés.

$$2^\circ \begin{cases} x=x' \\ y=\pm y' \end{cases}$$

c'est-à-dire le point P (ou son symétrique).

En résumé, l'ensemble des tangentes horizontales est

$$(y^2-y'^2)\,(y^2-b^2)=0$$

Tangentes verticales. — Résolvons l'équation bicarrée en y.

$$\frac{y^4}{b^4}+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{2xx'}{a^2}-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right)-\frac{2xx'}{a^2}$$
$$+\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

la condition $B^2-4AC\geq 0$ de réalité des racines donne

$$\frac{1}{b^4}\left\{\frac{2xx'}{a^2}-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1\right\}^2+\frac{4}{b^4}\left\{\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2}-1\right) + \frac{2xx'}{a^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \Big\} \geq 0$$

ou en groupant les termes

$$\frac{4}{b^4}\,\frac{x^2}{a^2}\,P - \frac{4}{b^4}\,\frac{xx'}{a^2}\,P + \frac{1}{b^4}\,P \geq 0$$

$$4x^2 - 4xx' + a^2P \geq 0$$

Ce trinôme admet des racines qui représentent des droites verticales tangentes et en même temps droites de séparation des points réels d'avec les points imaginaires du lieu.

On a donc

$$X = \frac{x'}{2} \pm \sqrt{\frac{x'^2 - a^2\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)}{2}}$$

$$X = \frac{x'}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},$$

telles sont les deux tangentes verticales données par cette discussion.

Pour que ces tangentes verticales existent, il faut que le point P soit compris entre les deux parallèles $y = \pm b$.

Les positions que le point P peut occuper par rapport à ces deux parallèles et à l'ellipse, vont servir de base à la discussion, en divisant le plan en régions ; chacune de ces régions imposera un caractère particulier à la courbe.

Pour construire les tangentes verticales, on remarquera que I et D sont les milieux de PK et de PH.

Car le point K, par exemple, intersection de l'ellipse avec la droite $y = y'$, a pour abcisse

$$X_1 = a\sqrt{1-\frac{y'^2}{b^2}},$$

de sorte que $$X = \frac{x' + X}{2}.$$

Intersection du lieu avec oy. — Ces points sont donnés par

$$\frac{y^4}{b^4} - \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right) + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0;$$

on aura donc en général quatre points

$$y = \pm b$$

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

il y aura donc toujours quatre points d'intersection.

Intersection du lieu avec ox. — Les points sont donnés par l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} - 1\right)^2 \qquad (1)$$

qui conduit à

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2xx'}{a^2} - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0.$$

Remarquons que l'équation (1) est de la forme

$$f(x'y')\,f(x, 0) = (xf'_{x'} + 0f'_{y} + Zf'_{z})^2,$$

ce qui prouve que les points de l'équation (1) vérifient l'équation de l'ensemble des deux tangentes. Cette remarque servira beaucoup pour la construction des courbes.

Si on résout l'équation (1) elle donne

$$x = -\frac{\dfrac{x'}{a^2} \pm \dfrac{y'}{b}\sqrt{P}}{\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{y'^2}{b^2} - 1\right)}$$

ce qui montre que

$P < 0$ le lieu ne coupe pas l'axe des x ;

$P = 0$ un seul point;

$P > 0$ deux points d'intersection réels et distincts

si $b^2 = y'^2$ un point rejetté à ∞;

si $b^2 < y'^2$ les deux racines positives;

si $b^2 > y'^2$ les deux racines de signes contraires.

Bien que le signe de $(x'^2 - a^2)$ n'ait pas une grande influence dans la discussion qui précède, nous le considérerons et nous obtiendrons ainsi des points particuliers dans les régions caractérisées, à la fois, par le signe de $(y^2 - b^2)$ et de P. Tous les cas qui peuvent se présenter sont compris dans le tableau suivant,

$$P < o \begin{cases} x' > o \begin{cases} y' > o \\ y' = o \end{cases} \\ x' = o \begin{cases} y' > o \\ y' = o \end{cases} \end{cases} \text{on a toujours d'ailleurs } y'^2 < b^2.$$

$$P = o \begin{cases} x' = o \\ x' < a \\ x' = a \end{cases} \text{on a toujours d'ailleurs } y'^2 \leq b^2.$$

$$P > o \begin{cases} y'^2 < b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases} \\ y'^2 = b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases} \\ y'^2 > b^2 \begin{cases} x' = o \\ x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases} \end{cases}$$

Nous allons indiquer rapidement la forme de la courbe ans chacun de ces cas.

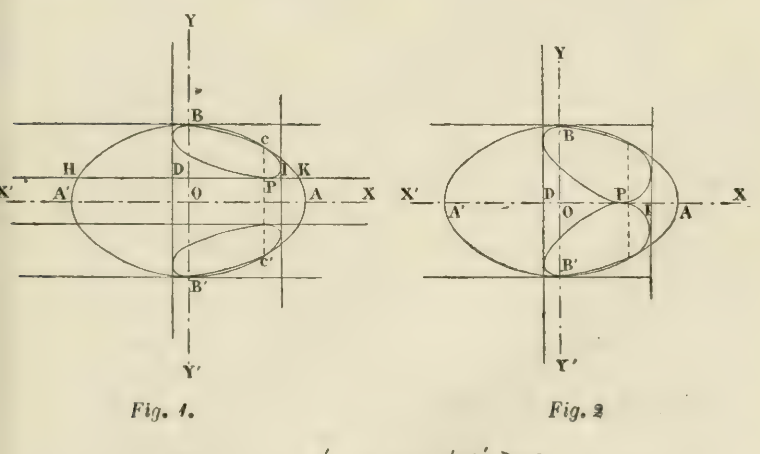


Fig. 1. *Fig. 2*

Premier cas. $P < o \begin{cases} x' > o \begin{cases} y' > o \\ y' = o \end{cases} \\ x' = o \begin{cases} y' > o \\ y' = o \end{cases} \end{cases}$

(1) $x' > o$ et $y' > o$. Le point est quelconque. On place les tangentes verticales de telle façon que I soit milieu de PK, D le milieu de PH. La figure 1 indique la forme générale du lieu.

(2) $x' > o$ et $y' = o$. Le point P est sur l'axe des X. Les deux tangentes horizontales se sont confondues et on a la figure 2.

(3) $x' = o$ avec $y' > o$. Le point P est sur l'axe des OY. La courbe est symétrique par rapport aux deux axes, le point O est centre. La figure 3 indique la forme.

(4) $x' = o$ avec $y' = o$. Le point P est au centre. La courbe offre en ce point un point double dont les tangentes sont

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = o$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = o$$

c'est-à-dire les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse. La figure 4 rend compte de la forme.

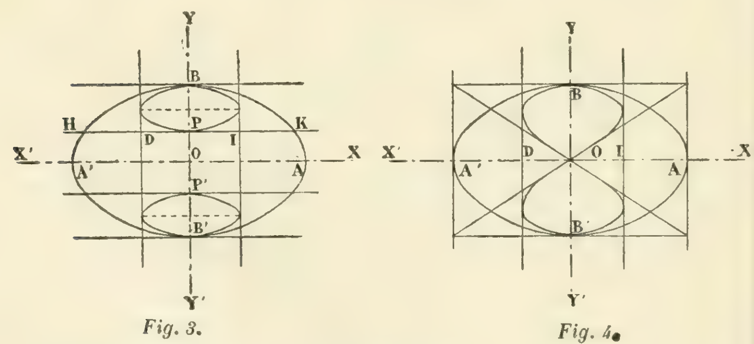


Fig. 3. *Fig. 4.*

DEUXIÈME CAS. $P = o \begin{cases} x' < a \\ x' = o \\ x' = a \end{cases}$

1° Le point P est quelque part sur l'ellipse $x' < a$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = o\,;$$

c'est donc le cas de deux paraboles superposées;

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{xx'}{a^2}$$

Elle a son axe sur XX', et son sommet a pour abscisse

$$x = \frac{a^2}{x'}$$

c'est le pôle de la droite EF, par rapport à l'ellipse *(fig. 5)*.

2° $x' = 0$. Le point P est en B sommet de l'ellipse. Le lieu se réduit à

$$\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = 0$$

Ce sont les deux tangentes en B et B'.

3° $x' = a$. Le point P est en A

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est une parabole, son sommet S est en A, elle est donc tangente à l'ellipse en ce point.

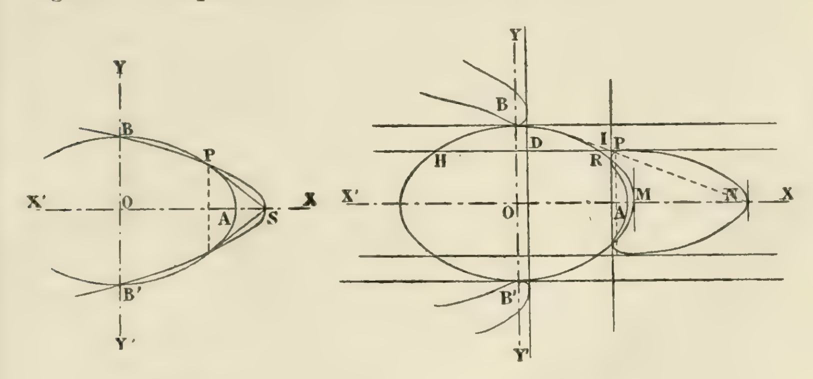


Fig. 5. *Fig. 6.*

Troisième cas. $P > 0 \begin{cases} y'^2 < b^2 \\ y'^2 = b^2 \\ y'^2 > b^2 \end{cases}$

Première hypothèse. $y'^2 < b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$

ce qui veut dire que le point P est compris entre les deux tangentes $y = \pm b$.

1° $y' < b$ avec $x' < a$. Le point P extérieur à l'ellipse reste dans le rectangle des axes. En se reportant à ce que nous avons dit sur les différents points remarquables et l'appliquant on obtient la courbe *(fig. 6)* dans laquelle

$$\begin{cases} PI = IK \\ PD = DH \end{cases}$$

les points M et N sont sur les tangentes à l'ellipse menées par P. Nous devons faire remarquer qu'il y a des branches infinies sans qu'il y ait d'asymptotes *(droites asymptotes)*.

2° $y' < b$ avec $x' = a$. Les points de tangence du croissant avec l'ellipse se confondent en A, ce que montre la figure 7.

3° $y' < b$, $x' > a$. Les points de tangence deviennent imaginaires (on l'a vu lors de la discussion) et l'équation est interprétée par la figure 8.

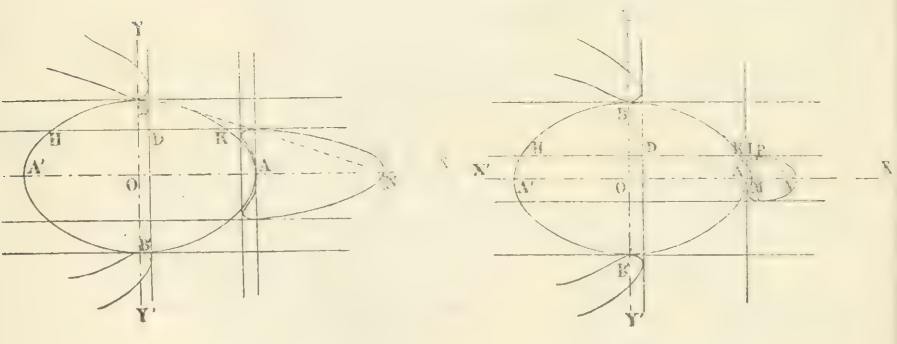


Fig. 7. *Fig. 8.*

Deuxième hypothèse. $y'^2 = b^2 \begin{cases} x' < a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$

L'équation s'écrit

$$\frac{x'^2}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^2}{b^2} - 1 + 2\frac{xx'}{a^2}\right)$$

$y = \mp b$ font partie du lieu et il reste la parabole

$$y^2 + 2\frac{b^2xx'}{a^2} - b^2\left(\frac{x'^2}{a^2} + 1\right) = 0.$$

1° Dans le cas général $y' = b$, $x' > a$. La parabole

ne touche pas l'ellipse ; ses branches se dirigent du côté des X négatifs.

2° Dans le cas de $y' = b$ et $x' = a$, son sommet est au point A.

3° Dans le cas de $x' < a$, son sommet (toujours donné par l'intersection de la tangente menée par P à l'ellipse,

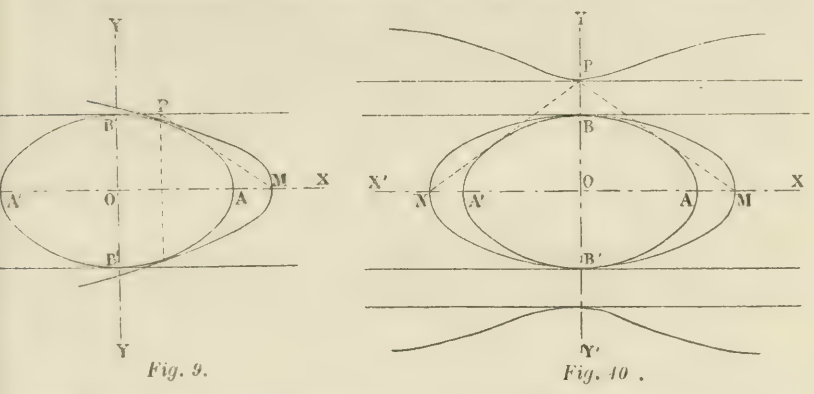


Fig. 9. *Fig. 10.*

avec l'axe des x) est à droite de A et la parabole est bitangente à l'ellipse *(fig. 9)*.

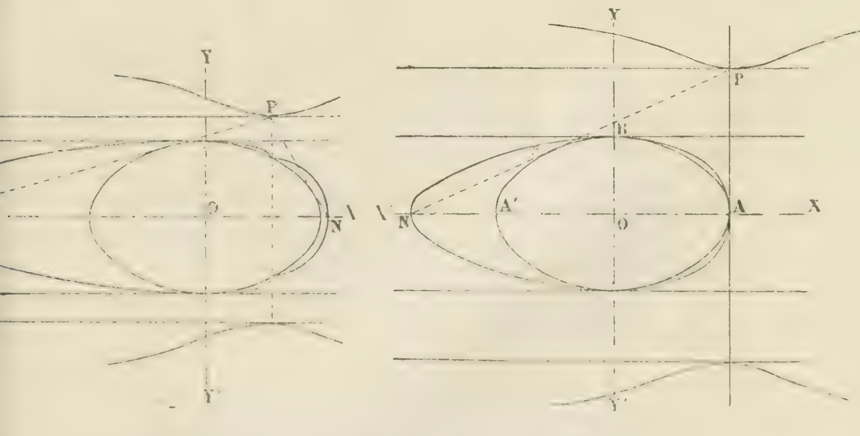


Fig. 11. *Fig. 12.*

Remarque. — Dans ce cas de $y^{2'} = b'^2$, il y a, comme nous l'avons déjà dit, un point d'intersection du lieu avec l'axe OX rejeté à l'infini.

Troisième hypothèse. $y'^2 > b^2$.

Le point se trouve en dehors des droites : $y = \pm b$, on peut avoir

$$y'^2 > b^2 \begin{cases} x' = 0 \\ x' > a \\ x' = a \\ x' > a \end{cases}$$

1° $y' > b$ avec $x' = 0$. La courbe est symétrique par rapport aux deux axes ; les deux tangentes verticales

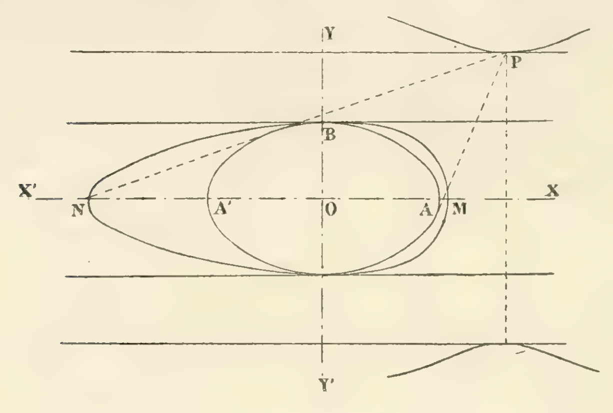


Fig. 13.

données par la discussion du radical sont imaginaires. En se conformant aux conclusions diverses que nous avons tirées sur ce cas, nous obtenons la courbe de la figure 10.

2° $y' > b$ avec $x' < a$. Les points de tangence avec l'ellipse existent, ce qui donne la forme de la figure 11.

3° $y' = b$ avec $x' = a$. Les points de tangence se confondent en A, ce qu'indique la figure 12.

4° $y' = b$ avec $x' > a$. Les points de tangence sont imaginaires *(fig. 13)*.

THÉORÈME DE TAYLOR

Par M. **P. Mansion**, professeur à l'Université de Gand.

On peut résumer les recherches des géomètres sur la démonstration (*) du théorème de Taylor, pour une fonction $f(x)$ continue, ainsi que ses dérivées jusqu'à la n^e de x_0 à X, sous la forme suivante facile à retenir :

I. *Reste exprimé au moyen d'une intégrale définie.* — Posons

$$F(x) = f(X) - \left[f(x) + \frac{X - x}{1} f'(x) + \frac{(X - x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)\right]$$

ce qui donne, comme on le trouve sans peine,

$$F'(x) = -\frac{(X - x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(x),$$

$$F(X) = 0$$

$$F(x_0) = f(X) - \left[f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(X - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1}x^0)\right].$$

Mettons ces valeurs dans l'identité :

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\, dx$$

et transposons quelques termes. Il viendra

$$f(X) = f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f(x_0) + \frac{(X - x_0)^2}{1.2} f'(x_0) + \ldots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots n - 1} f^{(n-1)}(x_0) + Rn,$$

$$R_n = \int_{x_0}^{X} \frac{(X - x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)} x dx,$$

(*) Nous disons *la démonstration*, parce qu'en réalité toutes les démonstrations proposées se ramènent à celles qui sont exposées ici ; et celles-ci ellesmêmes sont équivalentes entre elles ; car le théorème de Rolle se déduit aisément de l'égalité (1), et la seconde forme du reste de la première, quand on songe qu'une intégrale définie est une limite de somme.

c'est-à-dire le théorème de Taylor avec la forme du reste de Laplace.

II. *Reste exprimé sans intégrale définie.* — Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle : « *Entre deux racines* x_0, X *d'une équation* $\varphi(x) = 0$, *il y a une racine de l'équation dérivée* $\varphi'(x) = 0$, *si* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *sont des fonctions continues de* x_0 *à* X », à la fonction

$$\varphi(x) = Fx + (X - x)^p P,$$

où p est un exposant positif, P une constante telle que $\varphi(x_0) = 0$. On arrive ainsi, par des calculs assez simples, à la formule

$$f(X) = f(x_0) + \frac{X - x_0}{1} f'(x_0)$$

$$+ \dots + \frac{(X - x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + R,$$

$$R_n = \frac{(X - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{n}{p} (1 - \theta)^{n-p}(x_1),$$

$x_1 = x_0 + \theta\,(X - x_0)$ étant une racine $\varphi'(x) = 0$, intermédiaire entre x_0 et X. La forme de R_n, trouvée ici, due à M. Schlömilch, donne le reste de Lagrange, si l'on y fait $p = n$, le reste de Cauchy, si l'on y fait $p = 1$.

THEORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par M. **F. Landry.**

A la page 5 de son second supplément à la *Théorie des nombres*, ayant pour objet le dernier théorème de Fermat, Legendre démontre que si $a + b$ ne contient pas le facteur n, le quotient $\frac{a^n + b^n}{a + b}$ est *premier* avec $a + b$, et que si $a + b$ contient le facteur n à la puissance ν, le nombre $a^n + b^n$ contient ce même facteur à la puissance $\nu + 1$. Dans ce dernier cas, le quotient $\frac{a^n + b^n}{n\,(a + b)}$ est *premier* avec $a + b$.

Le nombre n est un nombre impair quelconque ; a et b sont deux nombres *premiers* entre eux et, par suite, avec $a + b$.

Legendre procède en divisant $a^n + b^n$ par $a + b$. Voici une autre démonstration :

On pose $a = a + b - b$ et on développe $(a + b - b)^n$ par le binôme, en prenant $a + b$ pour premier terme. On trouve

$$a^n + b^n = (a + b - b)^n + b^n$$
$$= (a + b)^n - n(a + b)^{n-1} b + \ldots + n(a + b) b^{n-1},$$

puisque $-b^n$ détruit $+b^n$.

Il n'y a plus qu'à conclure en supprimant le facteur commun $(a + b$ ou $n(a + b))$.

Il est clair que les mêmes principes ont lieu pour $a^n - b^n$ et $a - b$. puisqu'il suffit d'écrire $- b$ au lieu de $+ b$ dans $a^n + b^n$ et $a + b$.

QUESTIONS D'EXAMEN

Quelle est l'expression la plus générale des polynômes du troisième degré qui pour les valeurs $x = 1$, $x = 0$ *et* $x = -1$ *prennent les valeurs respectives* 1, -1 et 2?

Nous formerons d'abord le polynôme unique du deuxième degré qui pour les trois valeurs de x données, prend les trois valeurs $1, -1$ et 2.

Soient U_1, U_2, U_3 les trois valeurs données; si X_1, X_2, X_3 sont trois polynômes du deuxième degré en x, le polynôme

$$X = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

satisfera aux conditions données si on assujettit X_1, X_2, X_3 aux conditions suivantes :

Pour $x = 1$, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$
Pour $x = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$
Pour $x = -1$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$.

En vertu de ces relations, on a :

$$X_1 = \lambda_1 (x + 1)x, \text{ et } 1 = \lambda_1 \cdot 2$$

d'où $$X_1 = \frac{1}{2} x (x + 1).$$

De même $X_2 = \lambda_2 (x - 1)(x + 1)$, et $1 = -\lambda_2$

d'où $X_2 = -(x - 1)(x + 1)$;

enfin $X_3 = \lambda_3 (x - 1) x$, et $1 = 2\lambda_3$

d'où $$X_3 = \frac{1}{2} x (x - 1).$$

Le polynôme

$$X = \frac{1}{2} x (x + 1) + (x - 1)(x + 1) + x (x - 1)$$

prend ainsi les valeurs 1 pour $x = 1$, -1 pour $x = 0$, et 2 pour $x = -1$.

Ce polynôme est d'ailleurs unique de son degré; car deux polynômes entiers en x, du degré m, qui sont identiques pour plus de m valeur de x, sont identiques, quel que soit x.

Cela posé, si l'on ajoute au polynôme précédent un polynôme entier en x du troisième degré s'annulant pour $x = 1$, $x = 0$ et $x = -1$ lequel est par conséquent de la forme $m (x - 1) x (x + 1)$, on aura l'expression la plus générale des polynômes du troisième degré satisfaisant aux conditions données.

En effet, tout polynôme du troisième degré satisfaisant à ces conditions sera totalement déterminé si l'on donne la valeur qu'il prend pour une quatrième valeur de x arbitrairement choisie.

Or on peut toujours choisir m de manière que le polynôme

$$\frac{x(x+1)}{2} + (x - 1)(x + 1) + x (x - 1) + m (x - 1) x (x + 1)$$

prenne la valeur considérée pour la quatrième valeur attribué à x.

Ce polynôme et le proposé, identiques pour plus de trois valeurs de x, seront alors identiques quel que soit x, C.Q.F.D.

Quand une équation algébrique a toutes les racines réelles, la suite des dérivées peut remplacer la suite de Sturm, c'est-à-dire

qu'il y a autant de racines comprises entre a *et* b, b > a, *qu'il y a de variations perdues quand on passe de la suite* f(a), f'(a), f''(a) ... f^m(a) *à la suite* f(b), f'(b), f''(b) ... f^m(b).

Si l'on prend, en effet, la transformée en $x + a$ de la proposée, cette équation nouvelle admet les racines de la proposée diminuées de a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ les racines de la proposée qui sont inférieures à a; dans la transformée, les racines $\alpha_1 - a, \alpha_2 - a, \alpha_p - a$ seront négatives ; si au contraire $\alpha_{p+1} > a$, $\alpha_{p+1} - a > 0$; donc les racines de la proposée qui sont supérieures à a donnent dans la transformée des racines positives; il y a donc $m - p$ racines positives dans l'équation en $x + a$, et p racines négatives; ces racines étant d'ailleurs toutes réelles, comme les racines α elles-mêmes, l'équation $f(x + a) = 0$, c'est-à-dire

$$f(a) + xf'(a) + \frac{x}{12} f''(a) + \dots + \frac{x^m}{1.2..m} f^m(a)$$

doit présenter, d'après le théorème de Descartes, p permanences et $m - p$ variations.

De même l'équation $f(x + b) = 0$ présentera, si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p \dots \alpha_q$ sont les racines de la proposée inférieures à b, q permanences et $m - q$ variations.

Donc, en passant de l'équation $f(x + a) = 0$ à l'équation $f(x + b) = 0$, il se perd $m - q - (m - p)$ variations, c'est-à-dire $p - q$ variations, ou en d'autres termes, un nombre de variations égal au nombre des racines comprises entre a et b.

Il résulte de là que, si toutes les racines de $f(x) = 0$ sont réelles, il se perd, entre $-\infty$ et $+\infty$, m variations. c'est-à-dire que les dérivées jouent le même rôle que les fonctions de Sturm, dans le cas où les racines sont toutes réelles. (Ce théorème est un cas particulier du théorème de Fourrier.)

Décomposer $\dfrac{x^p + x^q - 1}{(x - 1)^3 (x^2 + 1)}$ *en fractions simples,* p *et* q *étant deux entiers quelconques.*

Le procédé de la division appliqué à ce cas général,

lorsque p et q ne sont pas donnés numériquement, est trop laborieux. Nous supposerons donc établie préalablement la possibilité de la décomposition, et cela posé, nous savons que l'on aura identiquement

$$\frac{x^p + x^q - 1}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + X$$

X étant un polynôme, partie entière du développement, qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour déterminer A A_1, A_2, M et N.

On déduit de cette identité

$$x^p + x^q - 1 = A(x^2+1) + A_1(x-1)(x^2+1) + A_2(x-1)^2(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)^3 + X(x-1)^3(x^2+1)$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x, faisons $x = 1$; nous aurons $1 = 2A$, ce qui fournit $A = \frac{1}{2}$. Prenons les dérivées des deux membres; ces dérivées de deux quantités identiques seront elles-mêmes identiques, et l'on aura

$$px^{p-1} + qx^{q-1} = 2Ax + A_1(x^2+1) + 2A_2(x-1)(x^2+1) + \ldots + A_1(x-1) \cdot 2x + A_2(x-1)^2 \cdot 2x$$

les termes non écrits contenant tous $x - 1$ en facteur. Pour $x = 1$, il vient $p + q - 1 = 2A_1$, ce qui fournit A_1.

$$A_1 = \frac{p+q-1}{2}.$$

Prenons encore les dérivées des deux membres de la dernière relation; les résultats continueront à être identiques, et il viendra

$$p(p-1)x^{p-2} + q(q-1)x^{q-2} = 2A + 2A_1x + 2A_2(x^2+1) + \ldots + 2A_1x + 2A_2(x-1)2x + 2A_1(x-1) + 2A_2(x-1)2x + 2A_2(x-1)^2$$

Pour $x = 1$, il vient

$$p(p-1) + q(q-1) - 1 - 2(p+q-1) = 4A_2$$

ce qui fournit

$$A_2 = \frac{p(p-1)+q(q-1)-2(p+q)+1}{4}$$
$$= \frac{p^2+q^2-3(p+q)+1}{4}.$$

Les trois premières fractions étant trouvées, on obtiendra M et N en faisant successivement dans l'identité primitive

$$x = +i \text{ et } x = -i.$$

Pour $x = +i$, on a $i^p + i^q - 1 = (Mi + N)(i-1)^3$

Pour $x = -i$, on a $(-i)^p + (-i)^q - 1 = (Mi+N)(-i-1)^3$

Cela revient à écrire que $+i$ et $-i$ sont racines de l'équation $x^p + x^q - 1 - (Mx+N)(x-1)^3 = 0$.

Or si i est racine, $-i$ le sera également (M et N étant réels); il suffira donc de considérer la première équation qui est $\quad i^p + i^q - 1 = 2(Mi + N)(i+1)$

ou $\quad i^p + i^q - 1 = 2(N - M) + 2i(M + N)$.

Cela posé, pour terminer la question, il faudra examiner les diverses hypothèses que l'on peut faire sur la parité de p et q relativement au nombre 4. Il serait trop long de les examiner toutes; mais prenons-en quelques-unes pour exemples :

Soit p multiple de 4, $(p = 4p')$; q peut en même temps être de l'une des formes $4q'$, $4q' + 1$, $4q' + 2$, $4q' + 3$; supposons-le, pour fixer les idées, de la forme $4q' + 1$; on aura

$$i = 2(N - M) + 2i(M + N),$$

égalité qui donne

$$N - M = 0 \qquad \text{et } M + N = \frac{1}{2};$$

d'où $\qquad N = \frac{1}{4} \qquad \text{et } M = -\frac{1}{4}.$

Soit p multiple de 4, $+1$, et q multiple de 4, $+3$; on aura $\qquad -1 = 2(N - M) + 2i(M + N);$

d'où $\qquad N + M = 0 \qquad \text{et } N - M = -\frac{1}{2},$

c'est-à-dire $\qquad N = -\frac{1}{4} \qquad \text{et } M = \frac{1}{4}$

et ainsi de suite.

Enfin, pour avoir X, on réduira les quatre fractions composantes en une seule; on retranchera la somme de la frac-

tion proposée, et le résultat, qui sera un polynôme entier, sera X.

En supposant $p > q$, X est identiquement nul si $p < 5$.

C'est une quantité numérique si $p = 5$.

Enfin c'est un polynôme si $p > 5$.

En considérant la série harmonique

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

et appliquant à cette série le théorème

$$\text{Lim}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{Lim}\ \sqrt[n]{u_n}$$

on a

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

ou

$$\lim \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}}.$$

La limite de $1 + \frac{1}{n}$ pour n infini est 1 ; on aura donc

$$1 = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}};$$

d'où l'on conclut que la limite de $\sqrt[n]{n}$ pour n infini, c'est-à-dire la limite de $x^{\frac{1}{x}}$ pour x infini, est l'unité.

On a demandé aux examens de trouver, sans recourir à l'emploi des dérivées, quelle est la limite de l'expression $\frac{x^m}{m^p}$ pour m infini, x étant un nombre fixe donné, et p un entier positif quelconque. On peut appliquer à cette question un procédé analogue au précédent.

Si l'on considère la série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots$$

on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}$

et $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}}$

Par suite, $\lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n^p}}$

et comme $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1$, $\lim \sqrt[n]{n^p} = 1$.

Cela posé, observons que

$$\frac{x^m}{m^p} = \left(\frac{x}{\sqrt[m]{m^p}}\right)^m.$$

La limite de $\sqrt[m]{m^p}$ est 1 ; donc la limite de $\frac{x}{\sqrt[m]{m^p}}$ est x.

Il en résulte que la limite de $\frac{x^m}{m^p}$ est celle de x^m; si donc x est > 1, cette limite est l'infini ; si x est < 1, elle est 0; enfin si $x = 1$, elle est l'unité.

La question de la recherche de la limite de $\frac{x^m}{m\sqrt{m}}$ est analogue à la précédente ; car $\frac{x^m}{m\sqrt{m}} = \frac{x^m}{m^{\frac{3}{2}}}$. Elle n'en est pas un cas particulier, puisque nous avons supposé p entier. Mais il est facile de se convaincre, en répétant le raisonnement, que la démonstration s'étend sans restrictions au cas où $p > 1$ sans être entier. Par conséquent, la limite de $\frac{x}{m^{\frac{3}{2}}}$ est cellē de x^m, c'est-à-dire l'infini pour $x > 1$, 0 pour $x < 1$, et 1 pour $x = 1$.

QUESTIONS PROPOSÉES

1. — On considère un cercle M, un diamètre fixe A, et la tangente CC′ à l'extrémité B de ce diamètre; par point A, on mène une transversale qui rencontre le cer en D, et la bissectrice de l'angle DAB, qui rencontre en la tangente CC′; soit O le centre du cercle inscrit au tria-gle ADB, et Δ une droite perpendiculaire à AO en point O; cette droite Δ rencontre le cercle décrit de B com centre avec BH pour rayon en deux points. Démontrer q le lieu géométrique décrit par l'un de ces points est u droite, le diamètre AB; l'autre point décrit une strophoïde. démontrera cette double propriété par le calcul et par géométrie. (*G. de Longchamps.*)

2. — Deux paraboles variables sont assujetties : 1° avoir leurs axes parallèles et à une distance donnée l'une l'autre; 2° à se couper orthogonalement en deux poin. Trouver l'aire minima comprise entre les deux courbes.

3. — Mener par un point donné une droite telle que segment intercepté par une parabole donnée soit maximu ou minimum. Le problème admet trois solutions. Trouver lieu des points du plan pour lesquels deux des solutions confondent : ce lieu, du quatrième degré, partage le plan deux régions; discuter le problème lorsque le point don est dans l'une ou l'autre de ces régions.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 202

COURBES DIAMÉTRALES ET TRANSVERSALES
RÉCIPROQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Nous avons déjà exposé dans ce journal (*) quelques applications des transversales que nous nommons réciproques, et nous avons fait voir dans l'article que nous rappelons, comment on peut au moyen de ces transversales construire, par un procédé commun, les tangentes aux courbes suivantes : *Cissoïde, Strophoïde, Conchoïde, Lemniscate ;* et généralement à toutes les courbes que nous avons appelées *conchoïdales* (**) et nous avons fait remarquer à ce propos que les quatre courbes citées ne sont en effet que des cas particuliers d'une génération qui les donne toutes par une définition qui dérive de celle qui a été imaginée par nous pour engendrer les conchoïdales.

Pour rendre plus facile la lecture de cette note, nous rappelons que nous nommons *transversales réciproques* deux droites Δ, Δ', définies ainsi : *Soit* ABC *un triangle et* Δ *une transversale rencontrant les côtés* AB, AC, BC, *respectivement aux points* C′, B′, A′ *: si l'on prend le point* C *symétrique de* C′ *par rapport au milieu de* AB *et, de même,* B″ *et* A″, *il résulte du théorème de Ménélaüs et de sa réciproque que les trois points* A″,B″,C″ *ainsi construits sont situés sur une même droite* Δ'. Réciproquement, si l'on donne Δ' et si l'on répète avec cette droite la construction que nous venons d'indiquer, on retombe sur la droite Δ et, pour ce motif, nous avons autrefois (***) proposé de nommer ces droites *transversales réciproques.*

2. — Cette définition, qui suffit à l'intelligence des applications nouvelles que nous allons donner, étant rappelée, nous dirons quelle est, à notre avis, la définition la plus géné-

(*) Année 1880, p. 272.
(**) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1879, p. 145.
(***) *Annales de l'École normale supérieure.* t. III, 1867

rale des courbes que l'on peut nommer *courbes diamétrales* parce qu'elles se rattachent, mais en les contenant comme cas particulier, aux courbes habituellement désignées par cette dénomination.

Imaginons trois courbes f, φ, ψ, situées dans le même plan et une droite Δ qui est mobile dans ce plan, mais en restant constamment tangente à la courbe f; Δ rencontre φ en un point A et ψ en un point B; soit I le milieu de AB. Le lieu décrit par ce point I est ce que nous nommons une COURBE DIAMÉTRALE, *quand la courbe* f *se réduit à un point* O.

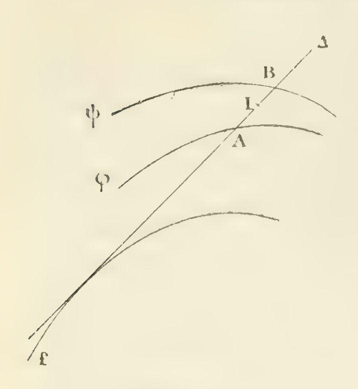


Fig. 1.

Dans le cas particulier où le point O s'éloigne à l'infini, lorsque les droites Δ, en d'autres termes, se meuvent *parallèlement à une direction fixe*, et lorsque les courbes φ et ψ se confondent avec une conique, le lieu du point I est une droite nommée *diamètre:* de là le nom de courbes diamétrales, que nous proposons pour désigner les lieux géométriques engendrés comme nous venons de le dire. Ce mot est employé d'ailleurs, mais dans un sens plus restreint que celui où nous nous sommes placé. Si l'on suppose en effet que le point O s'éloigne à l'infini et que φ et ψ se confondent en une seule courbe, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe dans une courbe donnée F de degré m est, on le sait, une courbe de degré $\frac{m(m-1)}{2}$, dite courbe diamétrale. Nous proposons donc en définitive, et pour éviter la création d'un mot nouveau, de généraliser cette définition et de nommer courbe diamétrale *le lieu des milieux des cordes qui s'appuient sur deux courbes données dans un plan en passant constamment par un point fixe.*

3. — Nous allons montrer qu'on peut toujours, avec la règle

et le compas, construire la tangente en un point donné d'une courbe diamétrale : il est sous-entendu que l'on suppose que les tangentes aux courbes φ et ψ qui ont engendré la diamétrale considérée peuvent être tracées elles-mêmes avec la règle et le compas.

Considérons un triangle ABC, et une transversale Δ; prenons $BR' = AR$ et $CQ' = AQ$.

Dans le triangle $AR'Q'$ on pourra considérer PQR et BC comme deux transversales réciproques de ce triangle : on en conclut que les points P et P' sont symétriques par rapport au milieu de $R'Q'$. C'est cette remarque géométrique que nous allons utiliser.

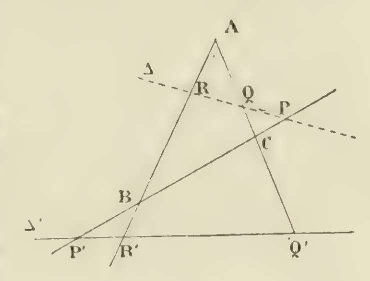


Fig. 2.

4. — Considérons deux courbes *quelconques* φ et ψ et un point fixe O; ayant mené un rayon vecteur OAB, ayant pris le point I milieu de AB, le problème que nous nous sommes posé est celui qui se propose de mener la tangente en I au lieu décrit par ce point quand OAB tourne autour du point O.

Prenons une transversale voisine $OA'B'$ et déterminons les points C et C' par la condition $BC = OA$, $B'C' = OA'$; les points H, H' seront symétriques par rapport au milieu de CC'.

Supposons maintenant que les points AA' se rapprochent et viennent se confondre. nous obtiendrons à la limite la figure suivante.

La droite AA' devient la tangente en A à φ, BB' la tangente en B à ψ; c'est-à-dire les droites AT et BT de la figure 4. Le point C reste fixe et est défini par la condition $BC = OA$. La droite HH', et par suite la droite II' qui lui est parallèle, prend une direction telle que, passant par le point C, elle soit partagée en deux parties égales, par ce point et les droites AT et BT. Si, par conséquent, on construit, comme l'indique la figure 4, le parallélogramme CPTQ, la limite de II', la tangente au point I, par conséquent à la diamétrale, est une droite Δ, menée par ce point et parallèle à PQ.

5. — Le cas où les cordes considérées restent parallèles à une direction fixe doit être examiné particulièrement, car alors le point C′ est éloigné à l'infini et il faut montrer comment la construction précédente doit être modifiée.

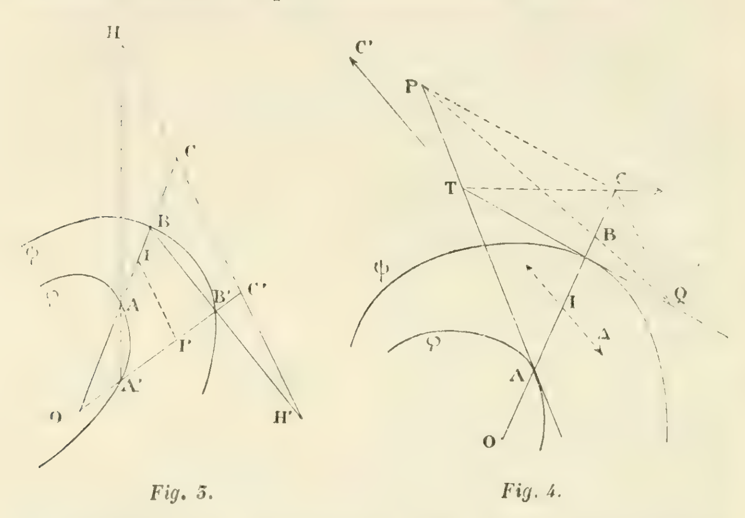


Fig. 3. *Fig. 4.*

Supposons donc que le point O *(fig. 4)* s'éloigne de plus en plus et considérons la droite TC qui passe par le milieu de PQ. Menons TC′ parallèle à PQ, les quatre droites TC, TC′, TP, TQ forment un faisceau harmonique. A la limite le point O étant porté à l'infini et, par suite, le point C lui-même s'étant éloigné à l'infini, la droite TC a pour position limitée une parallèle aux cordes considérées menée par le point T, et la droite TC′ la droite conjuguée harmonique de cette direction, par rapport aux droites TP et TQ. On connaîtra donc encore la direction de la droite II′.

6. — *Remarque.* — En appliquant la construction précédente, il faut bien observer que les droites BC et OA *sont égales et dirigées dans le même sens.* Ainsi si le point O est situé entre les points A et B, il faut prendre le point C dans *la direction* BO et non plus dans la direction OB.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

On considère deux coniques homothétiques, tangentes à Ox, *à l'origine, et des coniques doublement tangentes à chacune d'elles. Par un point fixe* P *de* Ox, *on leur mène des tangentes. Lieu des points de contact.* (Concours académique de Poitiers.)

L'équation générale des coniques bitangentes à deux coniques données $S = 0$, $S' = 0$, est

$$Q^2 - 2\mu(S + \lambda S') + \mu^2 P^2 = 0 \quad (\alpha)$$

dans laquelle μ est un paramètre variable, λ une des racines de l'équation en λ, et P, Q deux facteurs linéaires dont le produit est $S - \lambda S'$.

Cela posé, les deux coniques données ont pour équations

$$\left.\begin{aligned} x^2 + Ay^2 + 2Cy &= 0 \\ x^2 + Ay^2 + 2C'y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

L'équation en λ est

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & A - A\lambda & C - \lambda C' \\ 0 & C - \lambda C' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1 - \lambda)(C - \lambda C')^2 = 0$$

Cette équation a donc une racine simple $\lambda = 1$ et une double $\lambda = \dfrac{C}{C'}$.

A chacune de ces racines correspond un faisceau de coniques bitangentes; nous allons donc les considérer successivement.

Premier faisceau de coniques doublement tangentes.

La valeur $\lambda = 1$ donne $PQ = 2(C - C')y$, nous poserons $P = 2(C - C')$, $Q = y$, et l'équation générale (α) devient

$$y^2 - 4\mu(x^2 + Ay^2 + \overline{C + C'}\,y) + 4\mu^2(C + C')^2 = 0. \quad (2)$$

On peut d'ailleurs vérifier cette équation, en cherchant son intersection avec $x^2 + Ay^2 + 2Cy = 0$; on trouve la combinaison $[y + 2\mu(C - C')]^2 = 0$. De même avec $x^2 + Ay^2 + 2C'y = 0$ on a la combinaison $[y - 2\mu(C - C')]^2 = 0$. Ce qui donne, en passant, ce théorème : *Les deux cordes de contact d'une conique bitangente, sont symétriquement placées par rapport à* Ox.

Si l'on désigne par d la distance OP, la polaire du point P aura pour équation

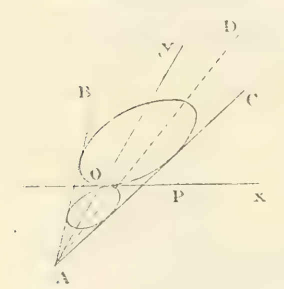
$$4\mu dx + 2\mu(C + C')y - 4\mu^2(C - C')^2 = 0$$

ou, en divisant par μ,

$$2dx + (C + C')y = 2\mu(C - C')^2. \qquad (3)$$

[Au facteur μ que l'on supprime, correspond pour le lieu $y = 0$, résultat qu'on pouvait prévoir.]

Remarquons que cette polaire reste toujours parallèle à une direction fixe quand la conique (2) varie. Cette direction peut même être construite géométriquement. En effet, parmi les coniques du faisceau, se trouve le système des tangentes communes AB, AC, et la polaire correspondante AD se construit avec facilité. Cette remarque nous sera utile.



Revenant au problème proposé, le lieu s'obtiendra évidemment, en éliminant μ entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$y^2(C - C')^2 = 2(x^2 + Ay^2 + \overline{C + C'}y)(2dx + \overline{C + C'}y) - (2dx + \overline{C + C'}y)^2$$

ou bien

$$(x^2 + Ay^2)(2dx + \overline{C + C'}y) = 2(d^2x^2 - CC'y^2). \qquad (4)$$

Le lieu est donc une cubique ayant pour point double l'origine. Nous allons discuter ses principales formes.

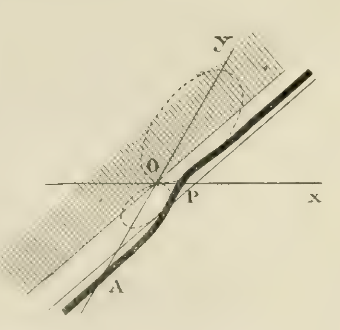
Premier cas. — Les deux coniques sont des ellipses, c'est-à-dire $A > 0$. Il n'y a qu'une asymptote réelle, parallèle à $2dx + (C + C')y = 0$.

Si $C < 0$ et $C' > 0$ (*fig. 1*), l'origine est un point double

isolé. Il n'y a pas de courbe à gauche de la droite $2dx + \overline{C + C'y} = 0$.

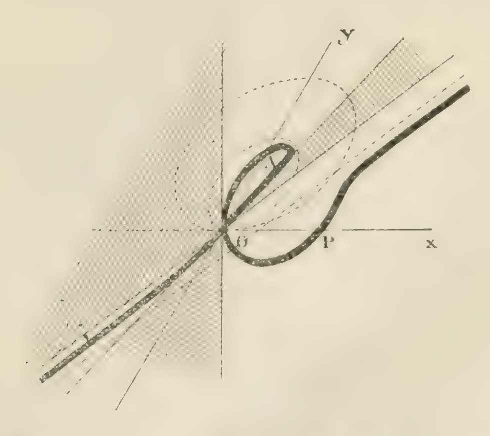
La courbe passe au point P, aux points de contact des tangentes menées de P aux deux coniques données; enfin au point A défini dans la remarque faite plus haut.

En résumé, elle a la forme de la figure 1.



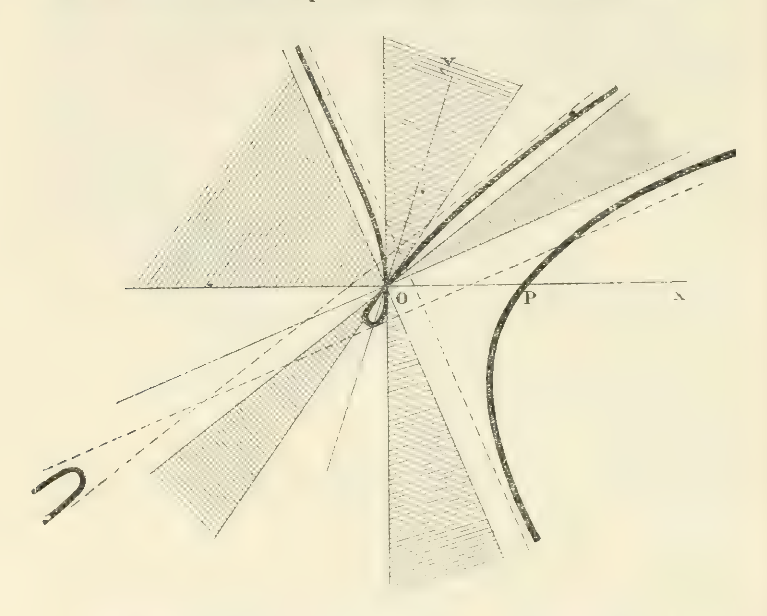
Si l'on a à la fois $C < 0$ $C' < 0$, c'est-à-dire si les deux ellipses sont d'un même côté de Ox, l'origine devient un point double réel dont les tangentes $\frac{y}{x} = \frac{d}{\pm\sqrt{CC'}}$ servent à séparer le plan en régions. Le lieu a la forme 2.

Deuxième Cas. — Les deux coniques sont des hyperboles : $A < 0$.



Nous aurons encore un point double réel ou isolé, suivant que $CC' > 0$ ou < 0. Le plan sera séparé en régions par les droites $x^2 + Ay^2 = 0$ (directions asymptotiques des hyperboles), $2dx - (C + C')y = 0$, et, suivant les cas, par d^2x^2

$= CC'y^2$. Dans ce cas, enfin, les trois asymptotes sont réelles, les deux nouvelles sont parallèles aux droites $x^2 + Ay^2 = 0$.



Troisième Cas. — Enfin supposons qu'on ait donné deux paraboles, c'est-à-dire $A = 0$. Alors l'équation (4) devient

$$x^2[2dx + \overline{C + C'}y] = 2(d^2x^2 - CC'y^2).$$

Elle présente des formes analogues aux précédentes.

Deuxième faisceau de coniques.

Occupons-nous maintenant de la deuxième racine de l'équation en λ : $\lambda = \frac{C}{C'}$. Elle donne

$$PQ = (C' - C)(x^2 + Ay^2)$$
$$= (C' - C)(x + y\sqrt{-A})(x - y\sqrt{-A})$$

et l'équation (α) devient

$$\mu^2[x + y\sqrt{-A}]^2 - 2\mu[(C + C')(x^2 + Ay^2) + 4CC'y] + (C' - C)^2(x - y\sqrt{-A})^2 = 0 \qquad (5)$$

ou, en l'ordonnant par rapport à x et y,

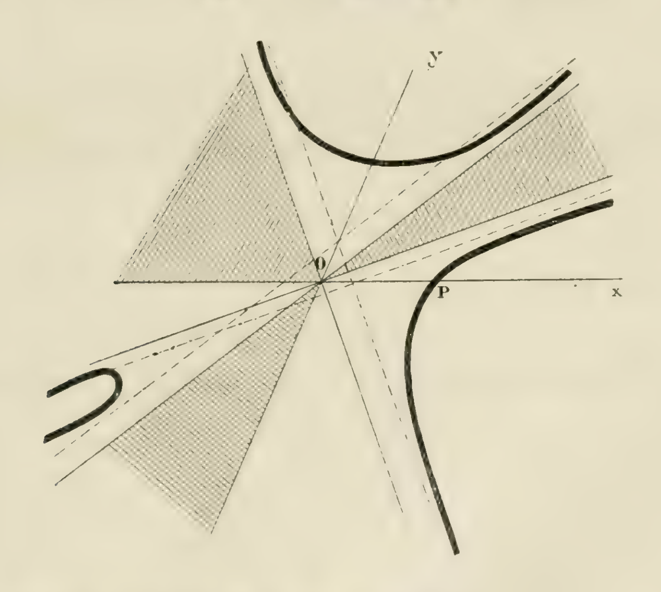
$$x^2[\overline{C'-C}^2 - 2\mu\,\overline{C+C'} + \mu^2]$$
$$- Ay^2[\overline{C'-C} + 2\mu\,\overline{C+C'} + \mu^2] - 2xy\sqrt{-A}\,[\overline{C'-C}^2$$
$$- \mu^2] - 8\mu CC'\,y = 0$$

La polaire du point P a alors pour équation :

$$dx\,[\overline{C'-C}^2 - 2\mu\,\overline{C+C'} + \mu^2] - y\,[d\sqrt{-A}\,(\overline{C'-C}^2$$
$$- \mu^2) + 4\mu\,CC'] = 0$$

ou $\quad d\mu^2\,(x + y\sqrt{-A}) - 2\mu\,[(C + C')dx + 2CC'y]$

$$+ d\,(C' - C)^2\,(x - y\sqrt{-A}) = 0.$$



Éliminant μ entre (5) et (6), on obtient :

$$[d(C' - C)^2\,(x^2 = Ay^2)\,y\,\sqrt{-A}]^2$$
$$= \Big\{\, d(x + y\sqrt{-A})\,[(C + C')\,(x^2 + Ay^2) + 4\,CC'y]$$
$$- (x + y\sqrt{-A})^2\,[\overline{C + C'}\,dx + 2\,CC'y]\,\Big\}$$
$$\Big\{\,(C' - C)^2\,(x - y\sqrt{-A})^2\,[(C + C')\,dx + 2CC'y]$$
$$- d\,(C' - C)^2\,(x - y\sqrt{-A})\,[(C + C')(x^2 + Ay^2) + 4\,CC'y]\,\Big\}$$

ou, en supprimant le facteur $(C' - C)^2\,(x^2 + Ay^2)$,

$$- \mathrm{A}d^2y^2 (\mathrm{C}' - \mathrm{C})^2 (x^2 + \mathrm{A}y^2)$$
$$= \left\{ d(\mathrm{C} + \mathrm{C}')(x^2 + \mathrm{A}y^2) + 4d\mathrm{CC}'y - (x + y\sqrt{-\mathrm{A}})\,[\overline{\mathrm{C} + \mathrm{C}'}\,dx + 2\mathrm{CC}'y] \right\}$$
$$\left\{ (x - y\sqrt{-\mathrm{A}})\,[\overline{\mathrm{C} + \mathrm{C}'}\,dx + 2\mathrm{CC}'y] - d(\mathrm{C} + \mathrm{C}')(x^2 + \mathrm{A}y^2) - 4d\mathrm{CC}'y \right\}$$

On peut encore supprimer le facteur y^2 :

$$\mathrm{A}d^2 (\mathrm{C}' - \mathrm{C})^2 (x^2 + \mathrm{A}y^2) = \mathrm{A}\,[dx\,\overline{\mathrm{C} + \mathrm{C}'} + 2\mathrm{CC}'y]^2 + [\mathrm{A}dy\,(\mathrm{C} + \mathrm{C}') - 2\mathrm{CC}'x + 4\,d\mathrm{CC}']^2$$

ou, enfin, toutes simplifications faites,

$$(x^2 + \mathrm{A}y^2)(\mathrm{A}d^2 + \mathrm{CC}') + 2\mathrm{A}d^2(\mathrm{C} + \mathrm{C}')\,y - 4\,d\mathrm{CC}'(x - d) = 0\,;$$

la seconde partie du lieu cherché se compose d'une conique homothétique aux proposées.

QUESTION 354

1. — Posons

$$\mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

et considérons le carré

A

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	.....	$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	.....	$\frac{1}{n}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	.....	$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	.....	$\frac{1}{n-1}$

B

où les termes de la série harmonique sont écrits d'après une loi que la figure rend évidente.

La somme des nombres renfermés dans ce tableau, nombres comptés par colonnes horizontales ou colonnes verticales, est évidemment

$$nS_n\,;$$

si, d'autre part, on les compte par tranches parallèles à la diagonale AB, on trouve que chacune de ces tranches, jusques et y compris la diagonale AB, donne un résultat égal à 1, ce qui fait une somme égale à n, à laquelle il faut ajouter les tranches qui suivent AB, lesquelles sont respectivement

$$\frac{n-1}{1},\ \frac{n-2}{2},\ \frac{n-3}{3}.\ \ldots\ \frac{2}{n-2},\ \frac{1}{n-1}.$$

On a donc l'identité, facile à vérifier directement,

$$nS_n = n + \left[\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \ldots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right]. \qquad (1)$$

2. — Posons $n = 2p.$

Le crochet renfermera $2p-1$ fractions: l'une d'elles, celle du milieu, est égale à $\frac{p}{p} = 1$ et l'on peut écrire, en groupant les fractions à égale distance des extrêmes,

$$2p\,.\,S_{2p} = 2p + 1 + \left\{\begin{array}{l} \frac{2p-1}{1} + \frac{1}{2p-1} \\ + \frac{2p-2}{2} + \frac{2}{2p-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{p+1}{p-1} + \frac{p-1}{p+1}. \end{array}\right.$$

Or, on a identiquement, quel que soit x,

$$\frac{2p-x}{x} + \frac{x}{2p-x} = \frac{(2p-x)^2+x^2}{x(2p-x)} = \frac{4p^2}{x(2p-x)} - 2,$$

d'où

$$2pS_{2p} = 2p + 1 + 4p^2\left[\frac{1}{1\,.\,(2p-1)} + \frac{1}{2(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)}\right] - 2(p-1).$$

ou
$$S_{2p} = \frac{3}{2p} + 2p\left[\frac{1}{1.(2p-1)} + \frac{1}{2(2p-2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(p-1)(p+1)}\right]. \quad (2)$$

3. — Reprenons l'identité (1) et supposons maintenant
$$n = 2p + 1.$$
Il viendra
$$(2p+1)S_{2p+1} = (2p+1) + \left\{\begin{aligned} &\frac{2p}{1} + \frac{1}{2p} \\ &+ \frac{2p-1}{2} + \frac{2}{2p-1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{p+1}{p} + \frac{p}{p+1}\,; \end{aligned}\right.$$
et, en vertu de l'identité,
$$\frac{2p-(x-1)}{x} + \frac{x}{2p-(x-1)} = \frac{(2p+1)^2}{x(2p-x+1)} - 2,$$
on trouve
$$S_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} + (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right]. \quad (3)$$

Il est remarquable que, dans cette formule, le terme $\frac{1}{2p+1}$ disparaît et l'on trouve, après cette simplification, une nouvelle forme de S_{2p}, savoir :
$$= (2p+1)\left[\frac{1}{1\,.\,2p} + \frac{1}{2\,.(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots + \frac{1}{p(p+1)}\right]. \quad (4)$$
formule plus simple que la formule (2) et qui permet de calculer les $2p$ premiers termes de la série harmonique par une série de p termes seulement.

4. — Cette formule peut d'ailleurs se tirer directement de la série harmonique.

Prenons, en effet, deux termes de cette série :
$$\frac{1}{\alpha}\,; \frac{1}{2p-(\alpha-1)},$$

également éloignés des extrêmes, 1 et $\frac{1}{2p}$.

On a, identiquement,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2p - (\alpha - 1)} = \frac{2p + 1}{\alpha(2p - \alpha + 1)}.$$

Faisons dans cette identité successivement

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 2, \ldots \alpha = p,$$

et en ajoutant on retrouve la formule (4).

5. — On peut donner à l'identité (4) une forme assez remarquable.

On a, en effet,

$$\frac{1}{1 \cdot 2p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\frac{1}{2(2p - 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p - 1}\right),$$

$$\frac{1}{3(2p - 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3p - 3}\right),$$

$$\frac{1}{4(2p - 3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4p - 6}\right),$$

. . . .

Les nombres 1, 3, 6, ... qui apparaissent dans ce tableau, sont les nombres de la seconde colonne du triangle arithmétique de Pascal, c'est-à-dire

$$C_2^2, \quad C_3^2, \quad C_4^2, \quad \ldots$$

Je dis que la loi soupçonnée ici est générale.

En effet, si l'on a

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)},$$

on pourra écrire

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p\alpha - 2\alpha^2 + \alpha}\right),$$

et comme

$$C_{2\alpha}^2 = \frac{2\alpha(2\alpha - 1)}{2} = 2\alpha^2 - \alpha,$$

on a bien

$$\frac{1}{2\alpha(2p - 2\alpha + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p\alpha - C_{2\alpha}^2}\right).$$

Dans l'autre cas

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)}.$$

on écrira

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2\alpha+1)p-2\alpha^2-\alpha}\right),$$

et comme

$$C^2_{2\alpha+1} = \frac{(2\alpha+1)\,2\alpha}{2} = 2\alpha^2+\alpha,$$

on a encore

$$\frac{1}{(2\alpha+1)(2p-2\alpha)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+1)\,p-C^2_{2\alpha+1}}\right);$$

la loi est toujours vraie et l'on arrive à l'identité

$$S_{2p} = \left(p+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{2p-C^2_2}+\frac{1}{3p-C^2_3}+\dots+\frac{1}{p^2-C^2_p}\right], \qquad (5)$$

qui constitue une forme commode pour le calcul des $2p$ premiers termes de la série harmonique.

(A suivre.)

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

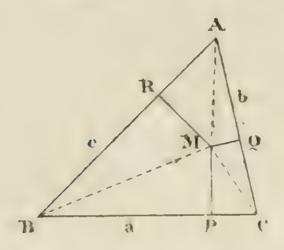
ET LEURS APPLICATIONS

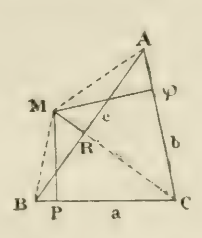
Par M. **E. J. Boquel.**

Nous nous proposons, dans ce travail, d'établir les principales formules relatives à l'emploi d'un système particulier de coordonnées, dont les applications sont très nombreuses, et de montrer, par un certain nombre d'exemples, le parti que l'on en peut tirer dans l'étude de la géométrie. L'importance de ce système de coordonnées tient surtout à ce qu'il est l'expression analytique d'une des méthodes des plus fécondes de la géométrie moderne, la transformation homographique, dont M. Chasles a tiré de si beaux résultats, et nous nous effor-

cerons, dans le cours de cette étude, de mettre en lumière cette signification géométrique.

Définition des coordonnées trilinéaires. — Considérons dans un plan un triangle fixe ABC; un point quelconque M du





plan sera défini, dans le système de coordonnées que nous allons étudier, par trois quantités α, β, γ, qui sont les distances du point M aux trois côtés du triangle ABC, multipliées par des nombres positifs constants arbitrairement choisis, λ, μ, ν, que l'on prend souvent égaux à l'unité.

Les quantités α, β, γ sont affectées d'un signe que l'on fixe par la considération suivante : chacune d'elles est regardée comme positive ou négative, suivant que le point M est situé par rapport au côté dont cette quantité dépend dans la même région du plan que le sommet du triangle qui est opposé à ce côté, ou dans la région différente.

Si donc on écrit

$$\alpha = \lambda . MP, \quad \beta = \mu . MQ, \quad \gamma = \nu . MR,$$

les signes des quantités α, β, γ ne sont pas mis en évidence, et chacune d'elles emporte avec elle son signe particulier.

Dans la première figure, il est clair que les trois quantités α, β, γ sont positives; dans la seconde, les quantités α et β sont seules positives, la quantité γ est au contraire négative, puisque le point M et le sommet C opposé au côté AB dont dépend γ sont dans des régions du plan différentes par rapport à AB.

Les quantités α, β, γ, ainsi définies en grandeur et en signe, se nomment les *coordonnées trilinéaires* du point M; le triangle fixe ABC, auquel elles sont rapportées, est dit le *triangle de référence* : ses côtés s'appellent les *axes de référence*

et les nombres constants λ, μ, ν portent le nom de *paramètres de référence.*

Relation entre les coordonnées trilinéaires d'un même point. — Les trois coordonnées α, β, γ d'un point M ne peuvent évidemment pas être toutes les trois arbitrairement choisies; car le triangle et les paramètres de référence étant fixés, et deux seulement des trois quantités α, β, γ étant données en grandeur et en signe, le point M est parfaitement déterminé sans la moindre ambiguïté, par l'intersection de deux droites menées parallèlement aux deux axes de référence auxquels se rapportent les deux coordonnées connues. Dès lors la troisième coordonnée étant par cela même déterminée, il doit y avoir une relation analytique entre les trois coordonnées d'un même point.

En vertu de la convention faite sur les signes des coordonnées trilinéaires, cette relation s'obtient en exprimant que l'aire du triangle de référence est égale à la somme algébrique des aires des triangles BMC, AMC, BMA.

Soient a, b, c les longueurs des trois côtés BC, CA et AB du triangle de référence; on a, dans le cas de la première figure, où les trois coordonnées trilinéaires du point M sont positives,

$$\text{BMC} + \text{AMC} + \text{BMA} = \text{ABC}$$

c'est-à-dire
$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2\text{S}.$$

Dans le cas de la deuxième figure, où la coordonnée γ est négative, on a

$$\text{BMC} + \text{AMC} - \text{BMA} = \text{ABC};$$

la *longueur* MR étant alors égale, non pas à $\frac{\gamma}{\nu}$, mais bien à $-\frac{\gamma}{\nu}$, il vient

$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} - c\left(-\frac{\gamma}{\nu}\right) = 2\text{S}$$

c'est-à-dire encore
$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2\text{S}.$$

Cette relation entre les trois coordonnées trilinéaires d'un

même point est donc générale, quelle que soit la position du point M dans le plan.

Dans le cas particulier où l'on suppose les paramètres de référence égaux à l'unité, $\lambda = \mu = \nu = 1$, c'est-à-dire où l'on prend pour coordonnées trilinéaires les distances elles-mêmes du point M aux trois côtés du triangle, affectées des signes fixés par la convention que nous avons fait connaître, la relation entre les trois coordonnées d'un point devient

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S.$$

Si enfin l'on observe que l'on a entre les éléments du triangle de référence la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, la condition entre α, β, γ prend la forme

$$\frac{\alpha \sin A}{\lambda} + \frac{\beta \sin B}{\mu} + \frac{\gamma \sin C}{\nu} = \frac{S}{R}$$

et dans l'hypothèse $\lambda = \mu = \nu = 1$, la forme

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{S}{R}.$$

Passage des coordonnées trilinéaires aux coordonnées cartésiennes, et transformation inverse des coordonnées cartésiennes en coordonnées trilinéaires. — Connaissant l'équation d'une ligne quelconque en coordonnées cartésiennes, on veut avoir l'équation de la même ligne en coordonnées trilinéaires par rapport à un triangle de référence donné, ou bien on peut avoir intérêt à faire l'opération inverse ; il faut donc se procurer des formules pour cette transformation.

Supposons que les coordonnées cartésiennes soient rectangulaires, et donnons-nous le triangle de référence du système trilinéaire par les 3 équations de ses côtés par rapport aux axes des cordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned} &(BC) \quad Ax + By + C = 0 \\ &(CA) \quad A'x + B'y + C' = 0 \\ &(AB) \quad A''x + B''y + C'' = 0 \end{aligned}$$

nous savons que l'on a

$$MP = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},\ MQ = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$MR = \frac{A'' + B'' + C''}{\pm\sqrt{A''^2 + B''^2}}$$

et, par conséquent, λ, μ, ν étant les paramètres de référence, on aura

$$\alpha = \lambda\, MP = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\,(Ax + By + C)$$

$$\beta = \mu .\, MQ = \frac{\mu}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}\,(A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \nu .\, MR = \frac{\nu}{\pm\sqrt{A''^2 + B''^2}}.\,(A''x + B''y + C'').$$

Pour que ces formules puissent servir à la transformation, il faut que les coordonnées α, β, γ soient affectées des signes convenables, c'est-à-dire conformes à la convention faite.

Or, il suffit évidemment, pour cela, que les coordonnées trilinéaires α, β, γ soient positives quand le point M est à l'intérieur du triangle de référence. On pourrait, pour arriver à ce résultat, disposer des signes des radicaux ; mais, dans un grand nombre de cas, il y a intérêt à regarder ces radicaux comme positifs ; alors on écrit convenablement les équations des côtés du triangle de référence. Par exemple, si pour un point (xy) situé à l'intérieur du triangle, la fonction linéaire $Ax + By + C$ est négative, la fonction $-(Ax + By + C)$ sera positive, et comme on peut écrire l'équation du côté BC à volonté sous l'une ou l'autre des deux formes $Ax + By + C = o$, ou $-Ax - By - C = o$, on pourra toujours choisir celle de ces deux formes pour laquelle le résultat de la substitution des coordonnées x et y d'un point intérieur au triangle de référence sera positif. Supposons qu'on ait tout d'abord pris cette précaution, et que $Ax + By + C = o$ soit la forme de l'équation du côté BC qui satisfait à la condition ci-dessus; α est une quantité positive quand le point M est à l'intérieur du triangle de référence, c'est-à-dire dans la même région que le sommet A opposé à l'axe de référence BC, et la fonction $Ax + By + C$

conservant le même signe pour tous les points de cette région du plan, tandis qu'elle prend le signe contraire pour les points de l'autre région, la coordonnée α aura le signe convenable dans la formule

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By + B).$$

Il en sera évidemment de même de β et de γ, les équations des deux autres côtés du triangle de référence étant écrites convenablement. Sous cette réserve, les formules établies plus haut seront les formules de transformation.

Si les axes des coordonnées rectilignes, au lieu d'être rectangulaires, faisaient entre eux l'angle θ, les formules de transformation seraient de même

$$\alpha = \frac{\lambda \sin \theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}} (Ax + By + C)$$

$$\beta = \frac{\mu \sin \theta}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B' \cos \theta}} (A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \frac{\nu \sin \theta}{\sqrt{A''^2 + B''^2 - 2A''B'' \cos \theta}} (A''x + B''y + C'')$$

$Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, $A''x + B''y + C'' = 0$ étant, bien entendu, les formes des équations des axes de référence, telles que les premiers membres de ces équations prennent des valeurs positives pour les coordonnées x et y d'un point situé à l'intérieur du triangle de référence.

Lorsque le point M (x, y) change de position dans le plan, les coefficients des fonctions linéaires, qui ne dépendent que de la situation des côtés du triangle de référence, lequel est fixe, ne varient pas, et l'on voit que les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque du plan sont égales aux produits d'un facteur qui reste constant, quel que soit le point, par les valeurs que prennent les premiers membres des équations des côtés du triangle de référence quand on y remplace x et y par les coordonnées particulières du point considéré.

(A suivre.)

QUESTION 264

Solution par M. H. Dupuy, élève au Lycée de Grenoble.

Démontrer que lorsque n *est un entier supérieur a* 5, *on la double inégalité*

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a $e^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$

et il est évident que

$$e^n > \frac{n^n}{1.2.3\ldots n},$$

d'où

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right),$$

ce qui démontre la deuxième inégalité.

— Pour démontrer la première, je dis que, si pour une certaine valeur de n on a

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \qquad (1)$$

on aura aussi, quand n augmente d'une unité,

$$1.2.3.\ldots n(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

En effet, si on a (1), on a aussi

$$1.2.3\ldots n.(n+1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1),$$

inégalité,qui subsistera si on multiplie le deuxième membre par la quantité $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}$, qui est toujours comprise entre 1 et $\frac{e}{2}$, et par suite plus grande que l'unité quand e varie depuis 1 jusqu'à ∞.

On aura ainsi *à fortiori*

$$1.2.3 \ldots n\,(n+1) < \left[\left(\frac{n}{2}\right)^{n}(n+1)\right]^{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2}}$$

c'est-à-dire

$$1.2.3 \ldots n\,(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Or, l'inégalité (1) est vraie, si $n = 6$, donc elle est aussi vraie pour tous les nombres entiers supérieurs à 5.

Nota. — La même question a été résolue par M. Audrieu, à Rouen ; Baron, à Sainte-Barbe.

QUESTION 342

Solution par M. Paul Boulogne, élève au Lycée Saint-Louis.

Par un des points d'intersection A *de deux hyperboles équilatères de même centre* O, *on mène une sécante qui rencontre les deux courbes aux points* B *et* B′. *De ces points on abaisse des perpendiculaires* BC, B′C′ *sur les tangentes aux deux courbes au même point* A. *Démontrer que si l'on joint le centre aux pieds* C *et* C′ *de ces deux perpendiculaires, l'angle* COC′ *est quadruple de l'angle des asymptotes.*

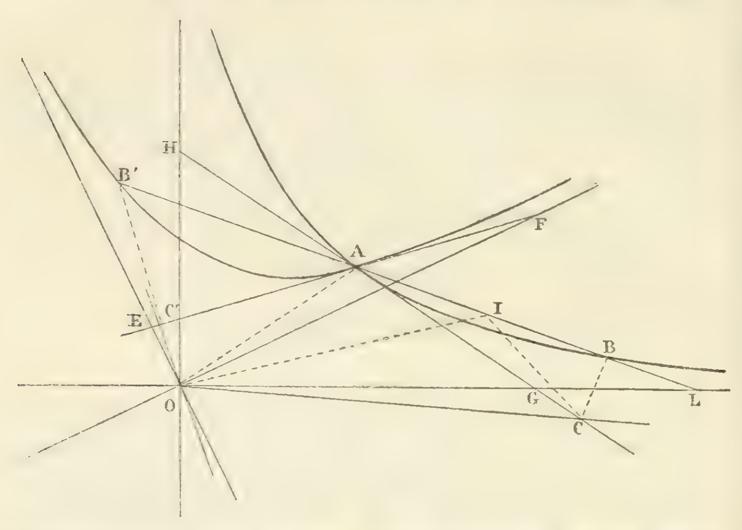
(E. Fauquembergue.)

Lemme I. — L'angle des tangentes est double de l'angle des asymptotes.

Soient E et F, H et G les points où les tangentes rencontrent les asymptotes. D'après une propriété bien connue . AE = AF, et AG = AH. Or ces quatre longueurs sont aussi égales à OA, médiane commune des triangles rectangles HOG, EOF; donc les cinq points O, E, H, F, G sont sur une circonférence de centre A, et l'angle au centre FAG est double de l'angle inscrit FOG.

Lemme II. — L'angle COA est double de l'angle CAB. Soient I le milieu de AB, L le point où cette droite rencontre l'asymptote OG. D'abord CI est égal à AI, puisque c'est la médiane du triangle rectangle ABC. D'autre part, OA, OI

sont les diamètres conjugués des directions AG et AL, donc les angles AOG, IOL sont respectivement égaux à AGO, ILO, par suite leur différence AOI est égale à GAL,



différence des deux autres. Mais alors les quatre points A, I, C, O sont sur une même circonférence, et l'angle COA est double de l'angle CAB.

De même l'angle C′OA est double de l'angle B′AC′, ou de l'angle FAB. Alors C′OC est double de l'angle FAC; donc d'après le premier lemme il est quadruple de l'angle FOG. c. q. f. d.

QUESTION 394

Solution par M. Paul Boulogne, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis (classe de M. Edouard Lucas).

On considère une ellipse rapportée à ses axes et deux points A *et* B *sur cette courbe. La tangente en* A *rencontre l'axe* ox *en un point* α*; et la normale en* A *rencontre le même axe* ox *en un point* α'*; soient de même* β *et* β' *les points analogues relatifs*

au point B *et à l'axe* oy. *Démontrer : 1° que la droite* $\alpha'\beta'$ *passe par le point de rencontre de la parallèle à* oy *menée par le point* A, *et de la parallèle à* ox *menée par le point* B; *2° que la droite* $\alpha'\beta'$ *est perpendiculaire sur la droite* $\alpha\beta$.

(G. L.)

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse. Celle de la tangente en un point sera

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle de la normale au même point,

$$a^2yX - b^2xY = c^2xy.$$

Soient maintenant $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ les coordonnées des points A et B. Faisant dans les équations précédentes $x = x_1$ $y = y_1$, puis $Y = 0$, on obtient les coordonnées des deux points α et α'

$$\alpha \left| \begin{array}{l} X = \frac{a^2}{x_1} \\ Y = 0 \end{array} \right. \qquad \alpha \left| \begin{array}{l} X = \frac{c^2}{a^2}\, x_1 \\ Y = 0. \end{array} \right.$$

Nous aurons de même en y faisant $x = x_2$, $y = y_2$ o cherchant les points de rencontre avec oy,

$$\beta \left| \begin{array}{l} X = 0. \\ Y = \frac{b^2}{y_2} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} X = 0. \\ Y = \frac{c^2}{b^2}\, y_2. \end{array} \right.$$

Dès lors la droite $\alpha'\beta'$ a pour équation

$$\frac{a^2X - c^2\ x_1}{x_1} = \frac{b^2Y}{y_1}.$$

L'équation de cette droite est vérifiée pour $X = x_1$, $Y = y_2$ puisque alors les deux membres se réduisent à b^2, ce qui démontre la première partie.

Les coefficients angulaires de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$ sont

$-\frac{a^2\ y_2}{b^2\ x_1}$ et $\frac{b^2\ x_1}{a^2\ y_2}$, ce qui démontre la seconde partie.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Maloigne, au lycée Saint-Louis.

QUESTIONS PROPOSÉES

4. — Une corde PQ d'une ellipse est normale en P; trouver le minimum de cette corde, et démontrer que si PQ est minimum, le centre du cercle osculateur en P est le point Q. O étant le pôle de la corde PQ, montrer que si OP est minimum, le pôle sera situé sur la seconde tangente commune à l'ellipse et au cercle osculateur en P.

5. — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} \ldots - x - 1 = 0,$$

et montrer que cette équation, en dehors de la racine évidente $x = 1$, n'a aucune racine réelle si n est impair, et une seule racine négative si n est pair.

(G. de Longchamps.)

6. — Si, dans une équation, A, B, C, D désignent quatre coefficients positifs, ou tels tout au moins que AC soit positif, si l'on a BC = AD, l'équation proposée a des racines imaginaires.

(G. de Longchamps.)

7. — Trouver, sans appliquer la règle de L'Hôpital, la vraie valeur de l'expression

$$y = \frac{\frac{n(n+1)}{2} x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \ldots - 2x - 1}{x - 1}$$

pour $x = 1$. *(G. de Longchamps.)*

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 3520-2.

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE
POINT PAR POINT
AU MOYEN D'UNE ÉQUERRE; TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

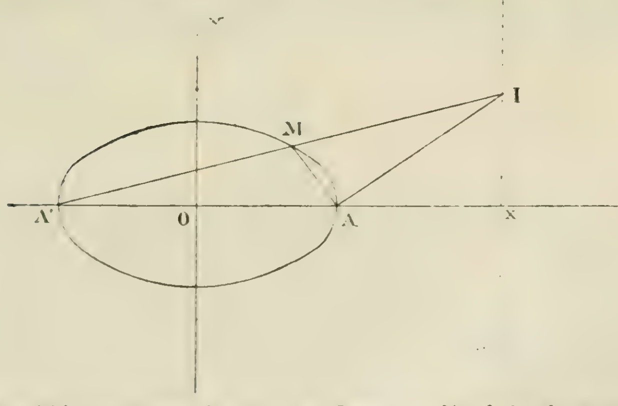
Par **M. G. de Longchamps.**

1. — Considérons une ellipse rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit M un point de cette courbe; $x'y'$ ses coordonnées. La droite MA′ qui passe par le sommet A′ a pour équation

$$y\,(x' + a) = y'\,(x + a). \qquad (1)$$



Considérons aussi la droite AI perpendiculaire à la droite MA, son équation sera

$$(x - a)(a - x') = yy'. \qquad (2)$$

Si nous voulons déterminer le lieu décrit par le point I, point de rencontre des droites AI et MA′, il suffit d'éliminer x' et y' entre (1) et (2), en tenant compte de la condition

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (3)$$

A cet effet, multiplions membre à membre les équations (1) et (2), il vient $\quad y\,[c^2\,x - a\,(a^2 + b^2)] = 0.$

Ainsi le lieu se compose des deux droites,

$$y = 0,$$

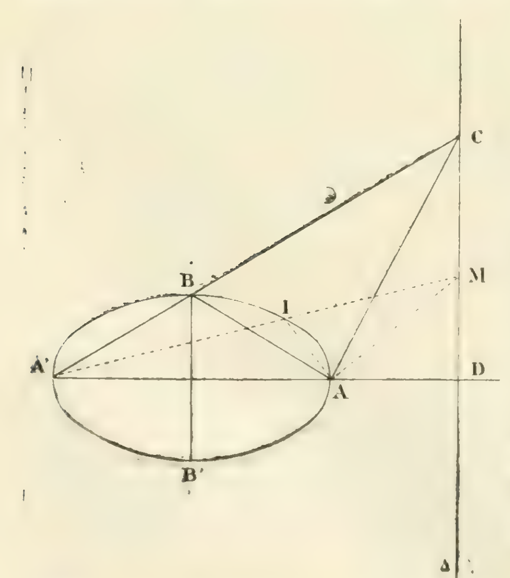
$$x = a\,\frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

La première équation $y = 0$ est ce qu'on peut nommer la *solution singulière* ; et la présence du facteur y s'explique ici, comme dans beaucoup de cas analogues, en remarquant que si l'on fait la construction proposée dans le cas particulier où le point M est précisément situé en A, on est conduit, d'après l'énoncé même, à chercher le lieu des points communs à deux droites, lesquelles se confondent l'une et l'autre avec l'axe des x.

Tous les points de la droite $y = 0$ font donc partie du lieu géométrique que nous avons cherché et l'analyse met, avec raison, en évidence la solution singulière $y = 0$.

Quoi qu'il en soit, le lieu véritable, le lieu géométrique demandé, est celui qui correspond à l'équation

$$x = a\,\frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

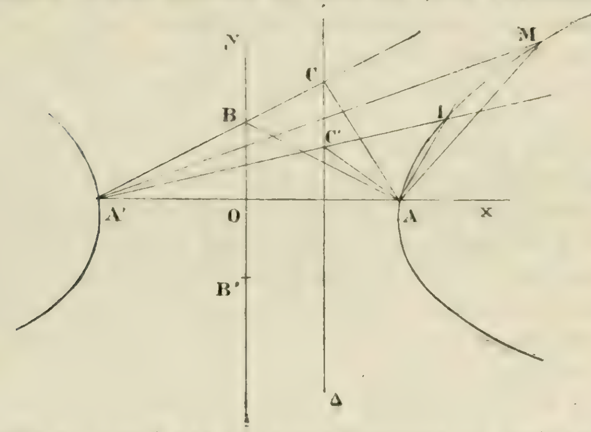


C'est de cette remarque que l'on peut déduire, comme nous allons l'indiquer, la construction, point par point, de l'ellipse au moyen d'une équerre.

2. — Considérons le losange AA′ BB′. Menons la droite A′ B, et au point A élevons une perpendiculaire à la droite AB ; les deux droites se coupent en un point C, et l'on peut, avec l'équerre, abaisser de ce point une perpendiculaire sur AA′. Soit CD la droite ainsi obtenue.

Menons maintenant par A′ une transversale qui coupe CD au point M. Si l'on joint AM et si, toujours avec l'équerre, on élève au point A une perpendiculaire à AM, cette dernière droite coupe AM en un point I qui est un point de l'ellipse dont les sommets sont les points AA′ BB′, sommets du losange considéré.

3. — La construction précédente, dans le cas de l'ellipse, s'applique indifféremment en prenant, pour l'exécuter, les



sommets du grand axe et un des sommets du petit axe, ou, inversement, les deux extrémités du petit axe avec un sommet du grand axe. Elle s'applique aussi à l'hyperbole, mais avec une modification qu'il est nécessaire de signaler.

Si l'on reprend le calcul que nous avons indiqué au début de cette note, mais en l'appliquant, cette fois, à l'hypothèse où le point mobile x', y' est supposé se déplacer sur la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\,;$$

si l'on a, en d'autres termes,

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on trouve pour le lieu du point I la droite

$$x = a\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Le théorème qui sert de base à notre construction subsiste

donc; mais il y a une modification essentielle à la construction précédemment indiquée pour construire la droite Δ.

Si l'on suppose que AA' BB' soient les quatre sommets d'un losange, définissant une hyperbole qui est supposée avoir les points A, A' pour sommets réels et B, B' pour sommets imaginaires, la courbe se construira point par point au moyen d'une équerre de la manière suivante :

Considérons la droite A'B qui est une direction asymptotique de l'hyperbole et supposons que le point M de l'hyperbole s'éloigne à l'infini, sur la courbe. Le rayon vecteur A' M' a pour position limite la droite A'B, et la droite qui, d'après la construction, doit être élevée perpendiculairement à AM au point A, a pour position limite la perpendiculaire abaissée du point A sur A'B ; soit C le pied de cette perpendiculaire. Ce point C appartient au lieu et la droite Δ est obtenue en abaissant de ce point C une perpendiculaire sur AA'. Cette droite une fois construite, comme il vient d'être dit, on obtient un point quelconque de l'hyperbole, au moyen d'une équerre, par la construction indiquée plus haut pour l'ellipse.

4. — Cette construction, dans le cas de l'hyperbole, exige formellement que l'on prenne les deux sommets réels pour les joindre à un point M de la courbe, et l'on peut facilement vérifier qu'elle est en défaut si l'on joint les deux sommets imaginaires au point M et si l'on cherche, avec ces deux rayons vecteurs, à répéter la construction. Ce fait peut surprendre au premier abord, mais il s'explique très bien par des raisons générales, que nous ne voulons pas donner ici et qui sont bien connues. On peut d'ailleurs vérifier le problème suivant :

On considère les sommets imaginaires BB' de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ou, dans un langage préférable les points dont les coordonnées sont $0 + b$, $0 - b$; et l'on joint ces points à un point M quelconque de l'hyperbole ; si on élève au point B à la droite BM une perpendiculaire, cette dernière droite rencontre B'M en un point I dont le lieu géométrique est la

courbe du quatrième degré

$$x^4 - 2\frac{b^2}{a^2}x^2(y+b)^2 + (y^2-b^2)^2 = 0.$$

Cette quartique admet deux points doubles, les points B et B; elle affecte des formes différentes suivant que l'on suppose $a < b$, $a = b$, $a > b$. *(A suivre.)*

QUESTION 354

(*Suite;* voir page 34.)

6. — Reportons-nous maintenant au carré que nous avons considéré au commencement de cette note et après avoir compté par tranches parallèles à AB, jusque et y compris la diagonale AB, au lieu de continuer à compter dans la même direction, prenons des tranches horizontales et nous aurons l'identité

$$n\,S_n = n + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1}, \qquad (6)$$

d'où l'on déduit successivement

$$(\text{A}) \quad \begin{cases} (n-1)\,S_{n-1} = (n-1) + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-2}, \\ (n-2)\,S_{n-2} = (n-2) + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2S_2 = 2 + S_1, \\ \text{d'ailleurs,} \quad S_1 = 1. \end{cases}$$

Considérons maintenant la série

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n,$$

définie par les égalités

$$(\alpha) \quad \begin{cases} A_1 = 1. \\ A_2 = \dfrac{A_1}{n-1}, \\ A_3 = \dfrac{A_1 + A_2}{n-2}, \\ \ldots\ldots \\ A_{n-1} = \dfrac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}}{2} \\ A_n = \dfrac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}}{1}; \end{cases}$$

et multiplions les égalités (A) respectivement par les nombres, $A_1, A_2, \dots A_n$;
les quantités $S_1, S_2, \dots S_n$ disparaissent, et l'on a

$$nS_n = nA_1 + (n-1)A_2 + (n-2)A_3 + \dots + 2A_{n-1} + A_n.$$

Cette relation peut s'écrire

$$nS_n = n(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) + A_n - [A_2 + 2A_3 + \dots + (n-2)A_{n-1}],$$

et d'après les relations (α)

$$nS_n = (n+1)A_n - [A_2 + 2A_3 + \dots + (n-2)A_{n-1}]. \quad (7)$$

7. — Cherchons maintenant une relation entre deux termes consécutifs A_p, A_{p+1}
de la série, précédemment définie,

$$A_1, A_2, \dots A_n.$$

Les deux égalités,

$$A_p = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{n-p+1},$$

$$A_{p+1} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_p}{n-p}$$

donnent entre les deux termes A_p, A_{p+1} la relation

$$(n-p+2)A_p = (n-p)A_{p+1};$$

d'où l'on déduit, en faisant successivement

$$p = 2, p = 3, \dots p = (n-1),$$

la suite d'égalités :

$$1.A_n = 3.A_{n-1},$$
$$2.A_{n-1} = 4.A_{n-2},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$(n-2)A_3 = nA_2,$$

auxquelles il faut joindre

$$(n-1)A_2 = A_1,$$
$$A_1 = 1,$$

provenant des égalités (α); on en tire

$$2A_n = n$$

ou

$$A_n = \frac{n}{2} = n\left(\frac{1}{2}\right),$$

et par suite, d'après les égalités précédentes,

$$A_{n-1} = n\left(\frac{1}{2.3}\right) = n\left(\frac{1}{2.3}\right),$$

$$A_{n-2} = n\left(\frac{1.2}{2.3.4}\right) = n\left(\frac{1}{3.4}\right),$$

$$A_{n-3} = n\left(\frac{1.2.3}{2.3.4.5}\right) = n\left(\frac{1}{4.5}\right),$$

. . . .

$$A_2 = n\left(\frac{1.2\ldots(n-2)}{2.3\ldots n}\right) = n\left(\frac{1}{(n-1)\,n}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (7), celle-ci prendra la forme

$$S_n = \frac{n+1}{2} - \left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{n-2}{2.3}\right]. \qquad (8)$$

En posant $n = 2p + 1$,

on a l'identité

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2p+1}\right) \qquad (9)$$

$$+ \left[\frac{1}{(2p+1)\,2p} + \frac{2}{2p\,(2p-1} + \ldots + \frac{2p-1}{2.3}\right] = p + 1,$$

qu'on peut vérifier directement.

8.— Considérons encore le carré AB, et après avoir compté la première tranche horizontalement, sommons par tranches inclinées à 45° ; on trouve

$$(n-1)\,S_n = (n+1)\left[\frac{n-1}{1.n} + \frac{n-2}{2\,(n-1)} + \frac{n-3}{3\,(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,2}\right], \qquad (10)$$

et en combinant avec l'identité (1)

$$S_n = n - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right]. \qquad (11)$$

Comptons deux tranches horizontalement, puis par tranches inclinées à 45°, on trouve

$$(n-2)\,S_n = (n-2) + (n+2)\left[\frac{n-2}{2n} + \frac{n-3}{3\,(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,3}\right], \qquad (12)^*$$

* C'est la relation 8 de la question. Cette relation avait été transcrite incorrectement ; son inexactitude avait été reconnue et nous avait été signalée par M. Baron, élève du lycée Henri IV, qui a résolu aussi la question.

et d'après (1)

$$2S_n = (n+) - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{n-2}{n}\right]. \quad (13)$$

9. — *Généralement*, après avoir compté $(p-1)$ tranches horizontalement, comptons par tranches inclinées à 45° à partir de la p^{me} tranche et nous aurons l'identité

$$S_n - S_{p-1} = \frac{1}{n} + \frac{n+p-1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{p(n-1)} + \frac{n-p-1}{(p+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)p}\right].$$

ou,

$$S_{n-1} - S_{p-1} = \frac{n+p-1}{n-p+1}\left[\frac{n-p}{p(n-1)} + \frac{n-p-1}{(p+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)p}\right]. \quad (14)$$

Le crochet renferme $(n-p)$ termes dont les dénominateurs sont égaux deux à deux, et si l'on pose

$$n - p = 2k,$$

il vient
$$S_{n-1} - S_{n-2k-1} = (2n - 2k - 1 \quad (15)$$

$$\left[\frac{1}{(n-2k)(n-1)} + \frac{1}{(n-2k+1)(n-2)} + \ldots + \frac{1}{(n-k-1)(n-k)}\right],$$

formule qui permet de calculer assez rapidement la somme d'un nombre quelconque de termes de la série harmonique *entre deux limites arbitrairement choisies.* Il faut remarquer, en effet, que la série $S_{n-1} - S_{n-2k-1}$ renferme $2k$ termes, tandis que la série du second membre est formée de k fractions seulement.

En posant $n - p = 2k - 1,$
on obtient $S_{n-1} - S_{n-}$

$$= 2(n-k)\left[\frac{1}{(n-2k+1)(n-1)} + \ldots + \frac{1}{(n-k-1)(n-k+1}\right] + \frac{1}{n-k} \quad (16)$$

De la formule (15) on déduit comme cas particulier

$$S_{4n} - S_{2n}$$
$$= (6n + 1)\left[\frac{1}{(2n+1)\,4n} + \frac{1}{(2n+2)(4n-1)} + \dots + \frac{1}{3n\,(3n+1)}\right] \quad (17)$$

et, en se servant de la formule de M. CATALAN (*)

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{2n}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{4n}$$
$$= (6n + 1)\left[\frac{1}{(2n+1)\,4n} + \frac{1}{(2n+2)(4n-1)} + \dots + \frac{1}{3n\,(3n+1)}\right] (18)$$

qui réduit une série de $4n$ termes à une autre série de n termes seulement.

De la formule (16) on déduit de même

$$S_{4n-2} - S_{2n-1}$$
$$= 2\,(3n - 1)\left[\frac{1}{2n\,(4n-2)} + \frac{1}{(2n+1)(4n-3)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)\,3n}\right] + \frac{1}{3n-1} \quad (19)$$

et par la formule de M. Catalan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{4n-2}$$
$$= 2\,(3n - 1)\left[\frac{1}{2n\,(4n-2)} + \frac{1}{(2n+1)(4n-3)} + \dots + \frac{1}{(3n-2)\,3n}\right] + \frac{1}{3n-1}. \quad (20)$$

10. — *En résumé*, nous avons donc pu lier la série harmonique aux séries suivantes :

$$\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \dots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$

(*) Note sur une formule de M. BOTESU (*Bulletins de l'Académie royale Belgique*, 1872).

$$\frac{1}{1(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-2)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)(n+1)},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2n-C_2^2}+\frac{1}{3n-C_3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2-C_n^2},$$

$$\frac{1}{n(n-1)}+\frac{2}{(n-1)(n-2)}+\ldots+\frac{n-2}{2.3}$$

$$\frac{n-1}{1.n}+\frac{n-2}{2(n-1)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{n-2}{n}$$

et aussi à la série

$$A_1+A_2+2A_3+\ldots+(n-2)A_{n-1},$$

définies par les égalités successives

$$A_1=1,$$

$$A_2=\frac{A_1}{n-1},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$A_{n-1}=\frac{A_1+A_2+\ldots+A_{n-2}}{2}.$$

On a fait voir, en même temps, dans les formules (15) et (16) le moyen de calculer une tranche quelconque de la série harmonique par une autre série ayant un nombre de termes moitié moindre. Enfin, les formules (18) et (20) donnent le développement de

$$L2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots,$$

développement limité soit au terme de rang $4n$, soit au terme de rang $(4n-2)$, par une série ne renfermant que n termes seulement. On remarquera la méthode analytique qui nous a dirigé dans cette recherche, méthode applicable à toutes les séries et conduisant, sans effort, à des identités que la combinaison algébrique peut assurément inventer, mais en ayant recours, le plus souvent, à des calculs délicats et synthétiques.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E. J. Boquel.**

(*Suite*, voir page 38.)

Les formules de transformation précédentes donnent les coordonnées trilinéaires en fonction des coordonnées cartésiennes, et par conséquent permettent de passer immédiatement de l'équation d'une ligne en coordonnées trilinéaires à l'équation de la même ligne en coordonnées cartésiennes. Pour faire la transformation inverse, c'est-à-dire pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilinéaires, il suffit de résoudre les formules par rapport à x et à y; deux des équations fourniront les coordonnées x et y en fonction de deux seulement des coordonnées α, β, γ, et en substituant les valeurs obtenues dans la troisième formule, on obtiendra une équation de condition entre α, β et γ. Cette relation sera évidemment celle qui existe entre les cordonnées trilinéaires d'un même point, c'est-à-dire

$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S.$$

Nous avons fait remarquer, en effet, que le point M est complètement déterminé par deux seulement des trois quantités α, β, γ, données en grandeur et en signe, la troisième étant déterminée par la connaissance des deux autres et par la position du triangle de référence.

On peut d'ailleurs se convaincre, en effectuant le calcul, que la relation de condition que l'on trouve est bien $\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S$. A cet effet, évaluons d'abord $2S$, a, b et c en fonction des coefficients des équations des axes de référence. Désignons par x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, les coordonnées respectives des trois sommets A, B et C. On sait que l'on a :

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit Δ le déterminant $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$; si l'on fait le produit de ces deux déterminants, en les multipliant ligne par ligne, il vient

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + C & A'x_1 + B'y_1 + C' & A''x_1 + B''y_1 + C'' \\ Ax_2 + By_2 + C & A'x_2 + B'y_2 + C' & A''x_2 + B''y_2 + C'' \\ Ax_3 + By_3 + C & A'x_3 + B'y_3 + C' & A''x_3 + B''y_3 + C'' \end{vmatrix}$$

Or dans ce produit les éléments de la diagonale principale sont seuls différents de zéro; car le sommet B, par exemple, étant à l'intersection des deux cotés BC et AB, on a identiquement

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \text{ et } A''x_2 + B''y_2 + C'' = 0.$$

Pour des raisons analogues, on a aussi identiquement

$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \qquad A'x_3 + B'y_3 + C' = 0$$

et $\qquad A'x_1 + B'y_1 + C' = 0 \qquad A''x_1 + B''y_1 + C'' = 0$

Par conséquent

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + C & 0 & 0 \\ 0 & A'x_2 + B'y_2 + C' & 0 \\ 0 & 0 & A''x_3 + B''y_3 + C'' \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$2S\Delta = (Ax_1 + By_1 + C)(A'x_2 + B'y_2 + C')(A''x_3 + B''y_3 + C'')$$

Cela posé, considérons les trois identités

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C - (Ax_1 + By_1 + C) &= 0 \\ A'x_1 + B'y_1 + C' &= 0 \\ A''x_1 + B''y_1 + C'' &= 0 \end{aligned}$$

et prenons le déterminant de leurs coefficients

$$\begin{vmatrix} A & B & C - (Ax_1 + By_1 + C) \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} [C - (Ax_1 + By_1 + C)](A'B'' - B'A'') \\ \quad + C'(BA'' - AB'') \\ \quad + C''(AB' - BA') \end{array} \right\}$$

Multiplions respectivement les trois identités par les coefficients de $C - (Ax_1 + By_1 + C)$, de C' et de C'' dans ce déterminant, et ajoutons les résultats; les multiplicateurs de x_1 et de y_1 seront identiquement nuls comme étant des déter-

minants ayant deux colonnes identiques, et il restera seulement le déterminant considéré lui-même. Donc

$$\begin{vmatrix} A & B & C - (Ax_1 + By_1 + C) \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & Ax_1 + By_1 + C \\ A' & B' & 0 \\ A'' & B'' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et par suite $Ax_1 + By_1 + C = \dfrac{\Delta}{A'B'' - B'A''}$

On trouverait de même

$$A'x_2 + B'y_2 + C' = \frac{\Delta}{BA'' - AB''}$$

et
$$A''x_3 + B''y_3 + C'' = \frac{\Delta}{AB' - BA'},$$

Il en résulte

$$2S\Delta = \frac{\Delta^3}{(A'B'' - B'A'')(BA'' - AB'')(AB' - BA')}$$

et enfin

$$2S = \frac{\Delta^2}{(A'B'' - B'A'')(BA'' - AB'')(AB' - BA')}.$$

a étant la longueur du côté BC, et h la hauteur correspondante, on a $ah = 2S$.

Or
$$h = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

et nous venons de voir que

$$Ax_1 + By_1 + C = \frac{\Delta}{A'B'' - B'A''}.$$

Donc
$$h = \frac{\Delta}{(A'B'' - B'A'')\sqrt{A^2 + B^2}}$$

et enfin
$$a = \frac{2S}{h} = \frac{\Delta\sqrt{A^2 + B^2}}{(BA'' - AB'')(AB' - BA')}.$$

On obtiendrait de même

$$b = \frac{\Delta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{(A'B'' - B'A'')(AB' - BA')}$$

et $$c = \frac{\Delta\sqrt{A''^2 + B''^2}}{(BA'' - AB'')(A'B'' - B'A'')}.$$

Cela posé, les formules de transformation de coordonnées cartésiennes rectangulaires en coordonnées trilinéaires, sont, comme nous l'avons établi plus haut,

$$Ax + By + C - \frac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} = 0,$$

$$A'x + B'y + C' - \frac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} = 0,$$

$$A''x + B''y + C'' - \frac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} = 0.$$

Le résultat de l'élimination de x et y entre ces trois équations est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \quad \dfrac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} \\ A' & B' & C' - \dfrac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} \\ A'' & B'' & C'' - \dfrac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation de condition qui existe entre les trois coordonnées trilinéaires d'un point. Or, on peut l'écrire

$$\Delta - \begin{vmatrix} A & B & \dfrac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda} \\ A' & B' & \dfrac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu} \\ A'' & B'' & \dfrac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

qui développée devient

$$\Delta = \frac{\alpha\sqrt{A^2 + B^2}}{\lambda}(A'B'' - B'A'') + \frac{\beta\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\mu}(BA'' - AB'')$$
$$+ \frac{\gamma\sqrt{A''^2 + B''^2}}{\nu}(AB' - BA')$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par Δ, et

divisant par le produit des trois mineurs, il vient

$$\frac{\Delta^2}{(A'B''-B'A'')(BA''-AB'')(AB'-BA')} = \frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A^2+B^2}}{(BA''-AB'')(AB'-BA')}$$
$$+\frac{\beta}{\mu}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A'^2+B'^2}}{(A'B''-B'A'')(AB'-BA')}$$
$$+\frac{\gamma}{\nu}\cdot\frac{\Delta\sqrt{A''^2+B''^2}}{(A'B''-B'A'')(BA''-AB'')}$$

c'est-à-dire, en vertu des formules établies précédemment,

$$2S = \frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

— Revenons aux formules de transformation. Si l'on a une équation $f(x, y) = 0$, en coordonnées cartésiennes, et qu'on veuille obtenir l'équation du même lieu en coordonnées trilinéaires, on pourra déduire x et y des deux premières formules de transformation, par exemple, et en remplaçant x et y dans $f(x, y)$ par les valeurs obtenues, qui ne renferment que α et β, on obtiendra une équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, qui ne contiendra que deux des trois coordonnées α, β, γ.

Pour avoir l'équation du lieu en fonction des trois quantités α, β, γ, il faut donc opérer autrement. Prenons, pour fixer les idées, le cas des coordonnées rectangulaires ; des trois formules de transformation nous tirerons les deux suivantes :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\lambda}{\nu}\,\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\frac{Ax+By+C}{A''x+B''y+C''}$$

$$\text{et}\quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\mu}{\nu}\,\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}\cdot\frac{A'x+B'y+C'}{A''x+B''y+C''}.$$

qui, résolues par rapport à x et y, fourniront ces quantités en fonction des rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, de sorte qu'en reportant les valeurs obtenues dans l'équation $f(x, y) = 0$, on aura une équation $F\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$ qui, ramenée à la forme entière, sera l'équation de la courbe considérée, exprimée à l'aide des trois coordonnées trilinéaires α, β, γ.

Il est clair que les valeurs de x et de y ainsi déduites sont exprimées par des fractions dont les deux termes sont du 1er degré en $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, c'est-à-dire des fonctions linéaires homogènes en α, β, γ, et qui, de plus, ont même dénominateur.

L'équation $f(x,y) = 0$ sera remplacée par une équation de la forme $f\left(\frac{M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma}{R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma}, \frac{M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma}{R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma}\right) = 0$.

Si l'équation $f(x, y) = 0$ est algébrique et entière, l'équation en coordonnées trilinéaires, après l'évanouissement des dénominateurs, sera aussi algébrique, entière, et du même degré que $f(x, y) = 0$. De plus, elle sera homogène, non seulement en α, β, γ, mais aussi par rapport aux fonctions linéaires

$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma$, $M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma$, $R_1\alpha + S_1\beta + T_1\gamma$.

En entrant dans les détails du calcul, on constate aisément que les coefficients M_1, N_1, P_1, M_2, N_2, P_2, R_1, S_1, T_1, sont les produits des 9 mineurs du déterminant que nous avons désigné plus haut par Δ par l'une ou l'autre des 3 constantes

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{\mu}{\sqrt{A'^2+B'^2}}, \frac{\nu}{\sqrt{A''^2+B''^2}}.$$

Dans la plupart des cas, on prend pour paramètres de référence les quantités $\sqrt{A^2+B^2}$, $\sqrt{A'^2+B'^2}$, $\sqrt{A''^2+B''^2}$ elles-mêmes; les formules de transformation prennent alors la forme simple

$\alpha = Ax + By + C$, $\beta = A'x + B'y + C'$, $\gamma = A''x + B''y + C''$,

d'où l'on tire

$$\alpha(A''x + B''y + C'') = \gamma(Ax + By + C)$$
$$\beta(A''x + B''y + C'') = \gamma(A'x + B'y + C')$$

et par suite

$$x = \frac{\alpha(B'C'' - C'B'') + \beta(B''C - C''B) + \gamma(BC' - CB')}{\alpha(A'B'' - B'A'') + \beta(A''B - B''A) + \gamma(AB' - BA')}$$
$$y = \frac{\alpha(C'A'' - A'C'') + \beta(C''A - A''C) + \gamma(CA' - AC')}{\alpha(A'B'' - B'A'') + \beta(A''B - B''A) + \gamma(AB' - BA')}$$

formules dont les coefficients sont précisément les neuf mineurs du déterminant Δ. *(A suivre.)*

QUESTION 343

Solution par M. GOULARD, élève au Lycée Louis-le-Grand, à Paris.

Trouver le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits à une conique donnée. Cas où cette conique est une hyperbole dont les asymptotes font entre elles un angle de 60°.

Il est d'abord évident que si dans un triangle le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit, le triangle est équilatéral. Si donc on désigne par p et q les coordonnées du centre du cercle circonscrit à un triangle, il suffira, pour exprimer qu'il est équilatéral, d'écrire que les sommes des coordonnées de ses sommets sont $3p$ et $3q$.

Cela posé, soient l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

et le cercle $$(c-p)^2+(y-q)^2-R^2=0 \tag{2}$$
circonscrit à un triangle inscrit dans l'ellipse. Ces deux courbes se coupent en un quatrième point dont il est facile d'avoir les coordonnées. Si l'on multiplie (1) par a^2 et si l'on en retranche (2), il vient

$$\frac{c^2y^2}{b^2}+2qy+2px+\ldots=0,$$

d'où $$x=-\frac{1}{2p}\left(\frac{c^2y^2}{b^2}+2qy+\ldots\right).$$

L'équation aux ordonnées des points d'intersection de (1) et (2) est donc

$$\frac{1}{4a^2p^2}\left(\frac{c^2y^2}{b^2}+2qy+\ldots\right)^2+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et la somme des racines de cette équation est $-\frac{4b^2q}{c^2}$. La somme de trois d'entre elles devant être égale à $3q$, la quatrième sera $-q\left(\frac{4b^2}{c^2}+3\right)=-\frac{q}{c^2}(b^2+3a^2)$.

On trouverait de même pour l'abscisse du même point

$$\frac{p}{c^2}(a^2 + 3b^2).$$

Écrivant que ce point est sur l'ellipse, et remplaçant p et q par x et y, on aura l'équation du lieu cherché :

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 + 3b^2)^2 + \frac{y^2}{b^2}(b^2 + 3a^2)^2 - c^4 = 0.$$

C'est une ellipse dont les axes ont la même direction que ceux de la proposée. Les longueurs de ces demi-axes sont

$$\frac{ac^2}{a^2 + 3b^2} \text{ et } \frac{bc^2}{b^2 + 3a^2}.$$

Pour avoir le lieu dans le cas de l'hyperbole, il suffit de changer b^2 en $-b^2$, et il vient

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - 3b^2)^2 - \frac{y^2}{b^2}(3a^2 - b^2)^2 - c^4 = 0.$$

C'est une hyperbole. L'un des axes devient infini, et le lieu se réduit à un système de deux droites parallèles, lorsque $a^2 - 3b^2 = 0$ ou lorsque $3a^2 - b^2 = 0$. Dans le premier cas, l'angle des asymptotes est de 60°, et les deux droites du lieu sont imaginaires. Dans le second cas, l'angle des asymptotes est de 120°, et les deux droites sont

$$x = \pm 2a.$$

Dans le cas de la parabole $y^2 = 2Px$, le terme en y^3 manque dans l'équation aux ordonnées des points d'intersection avec le cercle; l'ordonnée du quatrième point est donc $-3q$, et son abscisse $\frac{9q^2}{2P}$. D'un autre côté, l'équation aux abscisses est

$$\frac{1}{4q^2}[(x-p)^2 + 2Px + \ldots]^2 = 2Px.$$

La somme des racines est $-4(P - p)$; la quatrième est donc $p - 4P$. Par suite, l'équation du lieu est

$$9y^2 = 2P(x - 4P).$$

C'est une parabole dont le paramètre est égal au neuvième de celui de la proposée.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Haure, élève au lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 345

Solution par M. Cadot élève au Lycée Saint-Louis.

Soit

$$f(xy) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une conique, les axes de coordonnées étant rectangulaires. Posons

$$\varphi = (f'x)^2 + (f'y)^2 - 4(A + C)\ f(x, y) = 0.$$

L'équation des quatre directrices de la conique est

$$\varphi^2 + 4(A + C)\ f(x,y)\varphi(x,y) + 16\ \delta f^2(x,y) = 0$$

ou $$\delta = AC - B^2.$$

L'équation $\varphi = 0$ *représente le cercle des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

Proposons-nous d'abord de trouver le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique $f(xy) = 0$. Soit (xy) un point du lieu. Les tangentes à la conique $f = 0$ issues de ce point ont pour équation quadratique

$$4\ f(xy)f(XY) - (xf'_x + yf'_y{}^2 + f_z)^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient rectangulaires, il nous suffira d'écrire que l'équation précédente représente une hyperbole équilatère ; donc

$$(f'x)^2 - 4Af(xy) + (f'y)^2 - 4Cf(xy) = 0;$$

donc le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique $f = 0$ est

$$\varphi = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 - 4(A + C)f(xy) = 0.$$

Si la conique est une parabole, cette équation représente une droite qui est la directrice.

Si la conique est du genre ellipse ou hyperbole et a un centre unique, la conique $\varphi = 0$ est un cercle dont l'équation développée peut s'écrire

$$(B^2 - AC)(x^2 + y^2) + 2(BE - CD)x + 2(BD - AD)y + D^2 + E^2 - (A + C)F = 0.$$

Remarquons maintenant que les directrices d'une ellipse et d'une hyperbole sont celles des cordes communes à la conique et au cercle précédent qui ne passent pas par le centre.

Considérons en effet une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes; son équation est

$$\frac{x^2}{a} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{ou} \qquad b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2.$$

Le cercle lieu des sommets des angles droit sera

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2.$$

Les sécantes communes sont représentées par l'équation

$$\lambda(x^2 + y^2 - a^2 \pm b^2) + b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

ou $(b^2 + \lambda)x^2 + (\lambda + a^2)y^2 - a^2a^2 - \lambda(a^2 + b^2) = 0.$

λ satisfaisant à la condition

$$(b^2 + \lambda)(\lambda \pm a)[a^2b^2 - \lambda(a^2 \pm b^2)] = 0.$$

Donnons à λ les valeurs $-b^2$, et $\mp a^2$; nous obtiendrons les sécantes représentées par les équations

$$c^2y^4 \pm b^2 = 0, \qquad c^2x^2 \mp a^4 = 0.$$

Ce sont précisément les deux systèmes de directrices correspondant aux foyers réels et aux foyers imaginaires de la conique. — Le troisième couple de sécantes communes ne correspond pas à des droites remarquables. Il est caractérisé par la propriété de passer par le centre.

Les directrices sont donc les sécantes communes à $f = 0$, $\varphi = 0$ ne passant pas par le centre.

Transportons l'origine des coordonnées au centre.

La conique $f = 0$ devient

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2} = 0.$$

La conique $\varphi = 0$ devient

$$(B^2 - AC)(x^2 + y^2) + H = 0,$$

H étant le nouveau terme indépendant

Les sécantes communes à ces deux coniques seront représentées par l'équation $4f + \lambda\varphi = 0$; les valeurs de λ seront d'ailleurs les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées.

Pour avoir un système de deux droites il suffit que λ vérifie

$$[(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2]\left[\frac{\Delta}{AC - B^2} + \lambda H\right] = 0.$$

Les valeurs de λ auxquelles correspondent des sécantes ne passant pas par le centre sont racines de

$$(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2 = 0.$$

Pour avoir l'équation quadratique des sécantes correspondant à ces valeurs, il nous suffira d'éliminer λ entre

$$4f + \lambda\varphi = 0$$

et
$$(A - \lambda\delta)(C - \lambda\delta) - B^2 = 0,$$

ou

$\delta - \lambda\delta(A + C) + \lambda^2\delta^2 = 0$, ou enfin $\delta\lambda^2 - (A + C)\lambda - 1 = 0$ car $\delta \lessgtr 0$.

L'équation des directrices est donc, en remplaçant λ par $\frac{4f}{\varphi}$.

$$16\,\delta f^2 + 4(A + C)f\varphi + \varphi^2 = 0.$$

Cette équation peut dans tous les cas représenter les directrices de la conique. En effet, si l'on a affaire à une parabole, $\delta = 0$; donc l'équation se réduit à

$$\varphi[4(A + C)f + \varphi] = 0.$$

On obtient donc la courbe $\varphi = 0$, qui est, comme nous l'avons vu, la directrice réelle de la parabole.

QUESTION 372

Solution par M. Baron, élève du Lycée Henri IV.

On donne : 1° dans le plan des xz *une droite parallèle à l'axe* ox ; *2° Dans le plan des* zy *une droite parallèle à l'axe des* y *et ne rencontrant pas l'axe des* z *au même point que la précédente. D'un point pris dans le plan* xoy, *on abaisse des perpendiculaires sur ces deux droites et on joint leurs pieds par une ligne droite. Équation de la surface engendrée par cette droite lorsque le point* xy *décrit la courbe* f (xy) = 0; *cas où* f (xy) = 0 *est une droite.*

Soient AB $\left|\begin{array}{l} y = 0 \\ z = p \end{array}\right.$ CD $\left|\begin{array}{l} x = 0 \\ z = q \end{array}\right.$

$$M \left|\begin{array}{l} x = a \\ y = b \\ z = 0 \end{array}\right.$$

on aura évidemment

$$P \left| \begin{array}{l} x = a \\ y = 0 \\ z = p \end{array} \right. \qquad Q \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = b \\ z = q \end{array} \right.$$

P et Q étant les pieds des perpendiculaires abaissées du point donné M sur les droites AB, CD, PQ aura pour équations

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} = \frac{z-p}{q-p}. \tag{1}$$

D'ailleurs on a $f(ab) = 0$ (2)

la surface engendrée par (1) sera donc

$$f\left(\frac{(q-p)\,y}{z-p},\ \frac{(q-p)\,x}{z-q}\right) = 0; \tag{3}$$

Si le point M décrit la droite $Ax + By + C = 0$, la surface sera

$$\frac{A(q-p)y}{z-p} + \frac{B(q-p)\,x}{z-q} + C = 0$$

ou

$$A(q-p)(z-q)\,y + B(q-p)(z-p)x + C(z-p)(z-q) = 0$$

les plans du centre sont

$$\left| \begin{array}{r} z - p = 0 \\ z - q = 0 \\ Ay + Bx = 0 \end{array} \right.$$

la surface est donc un paraboloïde hyperbolique ; elle contient les droites $\left| \begin{array}{l} z = p \\ y = 0 \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} z = q \\ x = 0 \end{array} \right.$

le plan des xy est un plan directeur.

On peut d'ailleurs remarquer qu'en faisant $z = 0$, on obtient une équation du premier degré en x, y. La surface est donc engendrée par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes parallèles à un même plan, ce qui caractérise le paraboloïde hyperbolique.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Dupuy, Petit, à Grenoble ; Gino-Loria, à Mantoue ; Lelieuvre, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

8. — On considère une ellipse rapportée à ses axes et le cercle Δ qui passant par les foyers est concentrique à cette ellipse. Par un point M, pris sur le cercle, on mène à l'ellipse deux tangentes qui coupent le cercle aux points A et B, différents de M. Démontrer que la droite AB est parallèle au grand axe de l'ellipse. *(G. L.)*

9. — On considère une hyperbole rapportée à ses axes ;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 :$$

sur l'axe Oy, on considère les deux points B et B′ qui sont à une distance b de l'origine et on les joint à un point M, mobile sur l'hyperbole. La perpendiculaire à B′M au point B′ rencontre BM en un point I, dont on demande le lieu géométrique. Ce lieu est une quartique; on demande de la construire et d'indiquer les différentes formes de la courbe suivant que l'on a

$$b < a, \quad b = a, \quad b > a. \qquad (G. L.)$$

10. — Soit AB une corde dans une parabole, C le milieu de AB. On projette le point C en C′ sur l'axe et on mène par ce point C une perpendiculaire à AB, perpendiculaire qui rencontre l'axe au point D. Démontrer que, quel que soit AB, C′D est constamment égal à p. Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole connaissant deux points et l'axe de la courbe.

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu que les normales A et B coupent l'axe en des points équidistants du point D. *(G. L.)*

11. — On donne une parabole P, et un point M $(\alpha\beta)$ dans son plan. Par ce point supposé fixe, on fait tourner une droite Δ, qui rencontre P en A et B, et l'axe de la parabole au point C. Par les points A et B, on fait passer un cercle qui touche en D la tangente au sommet de la parabole. La

droite CD rencontre le cercle en un second point E que l'on joint au centre du cercle, ce qui donne une droite Δ'. Démontrer que le lieu des points de rencontre de Δ et de Δ' est une parabole quand Δ tourne autour de M. On expliquera les résultats par des considérations purement géométriques.

(G. L.)

12. — On considère une ellipse rapportée à ses axes : soient A,A', les extrémités du grand axe, BB' les extrémités du petit axe. On mène les tangentes à l'ellipse en ces quatre points, et une tangente Δ supposée mobile rencontre celles-ci en des points $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, enfin sur $\alpha\alpha'$ comme diamètre on décrit un cercle U, et sur $\beta\beta'$, un cercle V. Cela posé on propose les questions suivantes :

1° Équation générale des cercles U ;

2° Équation des cercles V ;

3° Quel est l'angle d'anomalie du point de contact M de la tangente Δ quand les cercles U et V sont égaux ?

4° Démontrer que l'axe radical des cercles U et V n'est autre chose que la normale au point M.

5° Par le centre de l'ellipse on mène une tangente au cercle V. Démontrer que le lieu des points de contact est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.

6° Démontrer que les cercles U et V se coupent orthogonalement.

7° Trouver le lieu décrit par les points communs aux cercles U et V, et démontrer que ce lieu se compose de deux cercles concentriques à l'ellipse, et de rayon $(a - b)$ (et $a + b$).

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 3938-2

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE*

QUARTIQUE A UN POINT DOUBLE

Considérons un faisceau ponctuel de coniques

$$C_1 + \lambda C_2 = 0$$

et un faisceau de couples de droites en involution, issues de l'origine,

$$A_1 + \mu A_2 = 0$$

dans l'équation duquel, par conséquent, A_1 et A_2 sont homogènes et du second degré en x et y. Etablissons entre λ et μ une relation homographique

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

et éliminons λ et μ entre ces trois équations; nous aurons le lieu du point d'intersection d'un couple du second faisceau avec la conique correspondante du premier. L'équation du lieu est

$$(aA_1 - bA_2)\, C_1 = (cA_1 - dA_2)C_2.$$

Elle représente une quartique dont l'origine est un point double, et qui passe par les points qui servent de base au faisceau de coniques. Les tangentes à l'origine ont pour équation, en désignant par c_1 et c_2 les termes constants dans les équations des coniques C_1 et C_2,

$$(aA_1 - bA_2)c_1 = (cA_1 - dA_2)c_2.$$

Chacune d'elles, en dehors du point double, coupe la quartique en un quatrième point qui, satisfaisant aux deux équations précédentes, satisfait aussi à la suivante :

$$\frac{C_1}{c_1} = \frac{C_2}{c_2},$$

laquelle représente la conique du faisceau qui passe par l'origine.

Réciproquement, on démontre que *toute quartique à un point double peut être ainsi engendrée d'une infinité de manières :*

---

* Nous espérons, par cette note extraite de la *Géométrie analytique* de **M. Picquet**, donner à nos lecteurs le désir de lire ce livre si intéressant que vient de publier la librairie Masson, et qui est conçu dans l'esprit large et fécond de la Géométrie moderne.

(Note de la Rédaction.)

on peut se donner arbitrairement sur la quartique deux des points qui servent de base au faisceau des coniques. Les deux autres s'obtiennent alors en faisant passer une conique par les deux premiers, par le point double et par les quatrièmes points d'intersection avec la quartique des tangentes au point double ; ce sont les deux derniers points d'intersection de la conique et de la quartique, et chaque conique du faisceau ainsi défini coupe alors la quartique en quatre nouveaux points situés sur deux droites conjuguées d'un faisceau en involution dont le sommet est le point double de la quartique.

Une quartique à un point double est de la dixième classe ; on peut donc lui mener du point double six tangentes ; on démontre que les points de contact de ces six tangentes sont sur une même conique. L'enveloppe des droites qui coupent harmoniquement cette conique et la conique variable du faisceau ponctuel qui vient d'être déterminé, est la conique variable d'un faisceau tangentiel : on démontre également que *le faisceau en involution qui sert à la génération de la quartique est le système des tangentes menées de l'origine à toutes les coniques du faisceau tangentiel.*

Considérons comme application la quartique à nœud

$$(x^2 + y^2 + 4)(x^2 - y^2) + 5x(x^2 - 2y^2) = 0. \quad (1)$$

Dans cet exemple, les tangentes à l'origine sont les droites

$$x^2 - y^2 = 0, \quad (2)$$

parallèles en même temps aux bissectrices de l'angle des axes et aux deux asymptotes réelles. Les quatrièmes points d'intersection avec la courbe sont donc à l'infini sur ces droites, et l'une des coniques qui déterminent le faisceau ponctuel sera, par exemple, l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 - 2x = 0$$

qui passe par ces points et par le point double. Elle coupe la quartique en quatre autres points, qui servent de base au faisceau ; une seconde conique du faisceau s'obtiendra en éliminant $x^2 - y^2$ entre les équations (1) et (2), ce qui donne, en divisant par x :

$$7x^2 - 8y^2 + 8 = 0$$

et l'équation générale des coniques du faisceau est alors

$$x^2(7 + \lambda) - y^2(8 + \lambda) - 2\lambda x + 8 = 0. \quad (3)$$

On verra d'ailleurs plus loin que les points de contact des six tangentes menées de l'origine à la quartique sont sur le cercle $$x^2 + y^2 - 4 = 0. \qquad (4)$$

Si l'on exprime qu'une droite coupe harmoniquement la conique (3) et le cercle (4), on trouve, en appliquant une condition connue:

$$40u^2 - 20v^2 - w^2 + 2\lambda(2u^2 - 2v^2 + uw) = 0,$$

qui est l'équation tangentielle d'un faisceau de coniques.

Si l'on fait $w = 0$, on obtient le faisceau des tangentes menées par l'origine à ces coniques

$$5(2u^2 - v^2) + \lambda(u^2 - v^2) = 0$$

ou, en coordonnées ponctuelles, par suite de l'élimination de u et v entre l'équation $ux + vy = 0$ et la précédente,

$$5(x^2 - 2y^2) + \lambda(x^2 - y^2) = 0.$$

Si l'on élimine maintenant λ entre cette équation et l'équation (3), on trouve l'équation (1) de la quartique, ainsi que c'était annoncé.

Pour construire la courbe (1), posons $y = tx$; on en conclut $x^2(1 - t^4) + 5x(1 - 2t^2) + 4(1 - t^2) = 0$; d'où

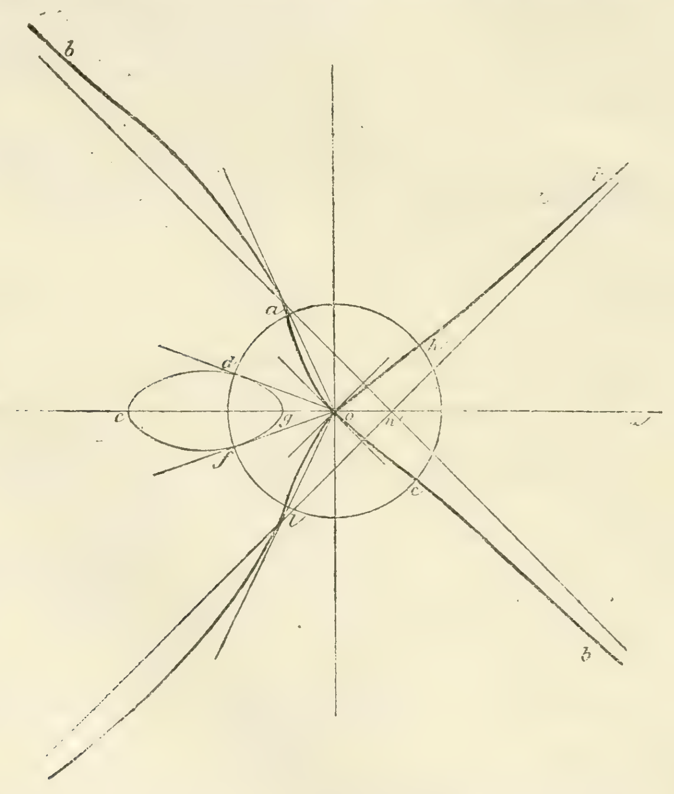
$$x = \frac{5(2t^2 - 1) \pm \sqrt{25(2t^2 - 1)^2 - 16(1 - t^2)^2(1 + t^2)}}{2(1 - t^4)}.$$

L'expression sous le radical est du sixième degré et bicubique en t; si l'on y considère t^2 comme l'inconnue, on voit sans peine qu'elle a trois racines positives séparées par 0, $\frac{1}{2}$, 1 et ∞: des substitutions intermédiaires montrent qu'elles sont très voisines de $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$ et $6,5$; d'où il suit que les six valeurs de t sont réelles et voisines de

$$\pm 0.357; \pm 0.815 \text{ et } \pm 2.55.$$

Désignons les par $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$: l'expression sous le radical n'est positive, et par suite x et y ne sont réels que pour des valeurs de t comprises entre $-t_3$ et $-t_2$; entre $-t_1$ et $+t_1$; entre t_2 et t_3: d'ailleurs à chaque valeur de t correspondent deux systèmes de valeurs pour x et y. Ainsi pour $t = -t_3$, ces deux valeurs sont égales; x est négatif,

y est positif, et l'on obtient un point a de la courbe pour lequel la tangente est la droite $y = -t_3 x$; t variant de $-t_3$ à $-t_2$, l'une des valeurs de x fournit la branche abc qui passe à l'infini pour $t = 1$, et l'autre la branche aoc qui passe à l'origine pour la même valeur de t; au point c, la courbe est tangente à la droite $y = -t_2 . x$. De $-t_1$ à $+t_1$,



on a de même l'ovale $defg$ tangente aux droites $y = \pm t_1 x$, et coupant l'axe X'OX aux points $x = -1$, $x = -4$; enfin t variant de t_2 à t_3, on a la branche $hklO$, symétrique de la première par rapport à l'axe X'OX.

Les points à l'infini sont les points cycliques et les points à l'infini sur les bissectrices des axes; à ces derniers cor-

respondent deux asymptotes réelles que l'on trouve par la formule ordinaire, et dont les équations sont

$$4(x \pm y) = 5.$$

Elles se coupent au point n de l'axe X'OX dont l'abcisse est égale à $\frac{5}{4}$.

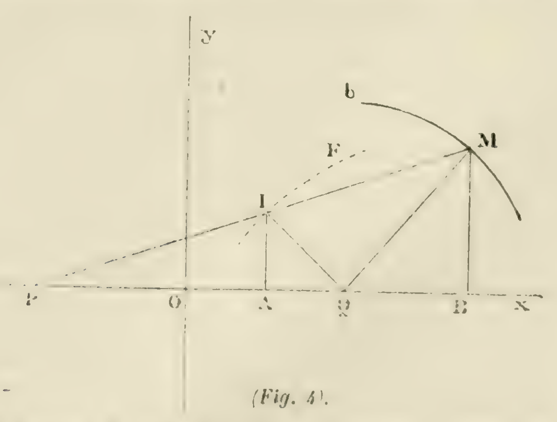
TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. **G. de Longchamps** (1).

(Suite.)

5. — Les résultats précédents sont tirés d'une méthode générale de transformation que nous avons imaginée, méthode à laquelle, et pour des raisons que nous donnerons tout à l'heure, nous proposons de donner le nom de *transformation réciproque*. Nous indiquerons seulement le principe et les formules fondamentales de cette transformation.

Imaginons une courbe plane f, et dans son plan deux points P, Q. Joignons-les à un point quelconque M de f; puis



(Fig. 4).

au point Q élevons à QM une perpendiculaire. Cette der-

(1) Voir le journal, 1882, p. 49.

nière droite rencontre PM en un point I, dont le lieu géométrique quand M parcourt f est une courbe F, qui est ainsi, et d'après la loi géométrique que nous venons d'énoncer, une transformée de f.

Les formules de transformation sont faciles à établir. Appelons x, y, les coordonnées du point M; X, Y celles du point correspondant I.

Les triangles semblables QAI, QMB donnent, en posant

OP = OQ = d.
$$\frac{y}{d - X} = \frac{x - d}{Y};$$
$$\frac{y}{Y} = \frac{d + x}{d + X}.$$

De ces relations, et par des calculs faciles, on tire successivement
$$\frac{x}{d} = \frac{Y^2 - X^2 + d^2}{d^2 - X^2 - Y^2},$$
$$\frac{y}{d} = \frac{2Y(d - X)}{d^2 - X^2 - Y^2},$$
et aussi
$$\frac{X}{d} = \frac{y^2 - x^2 + d^2}{d^2 - x^2 - y^2}.$$
$$\frac{Y}{d} = \frac{2y(d - x)}{d^2 - x^2 - y^2}.$$

On pourra remarquer que cette transformation appartient au genre des transformations *rationnelles*, *unicursales* et *réciproques*.

1° La transformation est *rationnelle*, parce que les formules qui la définissent $x = f(X, Y)$,
$$y = \varphi(X, Y),$$
sont des fonctions rationnelles de X et de Y; et parce que, *réciproquement*, X et Y sont des fonctions rationnelles de x et de y.

2° La transformation est *unicursale*, parce qu'au point x, y, ne correspond qu'*un* point X, Y et que, *réciproquement*, au point X, Y ne correspond qu'*un* point x, y.

3° La transformation est *réciproque*, parce que si les formules qui servent à transformer l'espace e en l'espace E, sont
$$x = b\,(X_1 Y),$$
$$y = \varphi\,(X_1 Y),$$

réciproquement, les formules de passage de l'espace E en l'espace e sont

$$X = f(x_1 y),$$
$$Y = \varphi(x_1 y).$$

6. — Il résulte des formules de transformation que nous venons de donner qu'*à une courbe* f, *de degré* m, *correspond généralement une transformée* F *de degré* 2m.

Si l'on considère la droite QQ' élevée au point Q, perpendiculairement à PQ, cette droite rencontre f en m points A_1, A_2 ... A_m ; l'on voit ainsi que *le point* P *est un point multiple d'ordre* m *de* F *et les tangentes à* F *en ce point sont les* m *droites* PA_1, PA_2, ... PA_m.

D'autre part, si l'on imagine les m points de rencontre de PQ avec f, la construction étant appliquée à chacun de ces points, on trouve le point Q, comme point correspondant et l'on reconnaît ainsi que *le point* Q *est un point de multiplicité* m, *et les* m *tangentes à la courbe* F *en ce point* Q *sont confondues avec* QQ'.

Enfin, si l'on considère le cercle Δ, décrit sur PQ comme diamètre, et si l'on appelle B un point commun à f et à Δ, à ce point B correspond un point de F situé à l'infini et la *courbe* F *a donc* 2m *directions asymptotiques, qui sont obtenues en joignant ,au point* P *les points de rencontre de* f *avec le cercle décrit sur* PQ *comme diamètre.*

Les formules de transformation mettent ce dernier point en évidence en montrant que si X et Y deviennent infinis, les coordonnées x et y, du point correspondant, satisfont à l'équation

$$x^2 + y^2 = d^2.$$

7. — Mais cette réciprocité des courbes f, F est encore mise en évidence par des formules de transformation en coordonnées polaires, formules que nous allons établir et desquelles nous déduirons quelques conséquences intéressantes.

Prenons (*fig.* 4) pour axe polaire Px, pour origine le point P, et posons $PM = \rho$, $PI = r$, $MPx = \omega$;

alors,

$$y = \rho \sin \omega, \qquad Y = r \sin \omega,$$
$$x + d = \rho \cos \omega, \quad X + d = r \cos \omega,$$

et les formules précédemment établies donnent, après un

calcul simple,
$$\frac{\rho}{2d} = \frac{\frac{r}{2d}\cos\omega - 1}{\frac{r}{2d} - \cos\omega}$$

ou
$$\frac{r}{2d} = \frac{\frac{\rho}{2d}\cos\omega - 1}{\frac{\rho}{2d} - \cos\omega}.$$

Il y a entre ρ et r une équation homographique en involution, et si l'on pose

$$\frac{\rho}{2d} = u, \qquad \frac{r}{2d} = v,$$

la relation est

$$uv - (u + v)\cos\omega + 1 = 0, \tag{A}$$

qui peut être considérée comme la formule fondamentale de la transformation réciproque qui nous occupe.

8. — Ici se présente, très naturellement, une question délicate et qui a été autrefois soulevée par M. Moutard, à propos de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous voulons parler des *courbes anallagmatiques.*

M. Moutard a proposé de nommer courbes anallagmatiques celles qui jouissent de cette propriété remarquable que, si l'on cherche à les transformer par la méthode des rayons vecteurs réciproques, *on retrouve la courbe elle-même.* Mais le terme proposé par M. Moutard, terme qui exprime bien et nettement la propriété qu'il veut définir, nous paraît, si cela n'a déjà été fait, pouvoir être appliqué dans une donnée plus générale à toutes les courbes qui, *dans une transformation définie, se reproduisent elles-mêmes quand on cherche à les transformer.*

9. — Cherchons dans les anallagmatiques de notre transformation.

Si la courbe proposée f est de degré m et si le point P, point qu'on peut nommer le pôle de la transformation, est de multiplicité $(m-1)$, si par conséquent l'équation polaire est rationnelle et linéaire en ρ, la transformée F ne sau-

rait coïncider avec f. Mais supposons que f étant de degré m le point P soit de multiplicité $(m-2)$; dans ce cas, l'équation polaire de la courbe algébrique proposée est une fonction rationnelle et du second degré en ρ, de la forme

$$\frac{\rho^2}{4d^2} - A \cdot \frac{\rho}{2d} + B = 0.$$

A et B étant fonctions de ω seulement et si f est une anallagmatique de notre transformation, u et v sont les deux racines de cette équation. On a donc

$$u + v = A,$$
$$uv = B;$$

la formule (A) devient

$$B - A \cos\omega + 1 = 0$$

et *l'équation générale des anallagmatiques de degré* m, *admettant le pôle de transformation comme point multiple d'ordre* (m—2) est :

$$\frac{\rho^2}{4d^2} - A\frac{\rho}{2d} + A\cos\omega + 1 = 0,$$

A *étant une fonction arbitraire de* ω.

10. — On peut vérifier ce théorème général dans des cas particuliers.

1° Supposons d'abord $A = 0$; alors f est un cercle de centre P et de rayon PQ, et l'on reconnaît qu'en effet ce cercle se reproduit lui-même par notre transformation.

2° Prenons maintenant $A = \dfrac{2}{\cos\omega}$,

l'équation (B) devient

$$\frac{\rho^2}{4d^2} - \frac{2}{\cos\omega} \quad \frac{\rho}{2d} + 1 = 0,$$

d'où
$$\frac{\rho}{2d} = \frac{1 \pm Sm\omega}{\cos\omega}.$$

On reconnaît là l'équation de la strophoïde rapportée à son axe et à son sommet, et l'on vérifie facilement qu'en effet le pôle étant au sommet de la strophoïde, le point nommé Q étant le point double de cette courbe, celle-ci se produit elle-même par la transformation réciproque.

3° Enfin, et pour montrer comment on peut trouver méthodiquement ces anallagmatiques, demandons-nous si le lima-

çon de Pascal peut, dans un cas particulier tout au moins, se reproduire par la transformation précédente. Si l'on appelle a le diamètre du cercle générateur du limaçon, b la longueur dont on prolonge les rayons vecteurs, on sait que l'équation polaire de cette courbe est

$$\rho^2 - 2a\rho \cos \omega + a^2 \cos^2 \omega - b^2 = 0.$$

Identifions avec l'équation générale des anallagmatiques de notre système, avec l'équation

$$\rho^2 - 2dA\rho + 4Ad^2 \cos \omega - 4d^2 = 0$$

on aura $$a \cos \omega = dA.$$

$$a^2 \cos^2\omega - b^2 = 4Ad^2 \cos \omega - 4d^2$$

ou $$a^2 \cos^2 \omega - b^2 = 4ad \cos^2 \omega - 4d^2,$$

et ceci doit avoir lieu *quel que soit* ω, ce qui donne par conséquent $$a = 4d \qquad b = 2d,$$

Il est facile de reconnaître directement que dans cette hypothèse le limaçon de Pascal se reproduit en effet lui-même.

11. — D'une façon plus générale imaginons le lieu suivant : *On considère des cercles* Δ *passant par un point fixe* Q *et assujettis à une seconde condition* ARBITRAIREMENT *choisie; les extrémités des diamètres de ces cercles, diamètres qui passent par un point fixe* P, *décrivent une anallagmatique de la transformation réciproque.*

QUESTION 9

Solution par M. TOQUÉ, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

On considère une hyperbole rapportée à ses axes, sur l'axe Oy,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

on considère les deux points B *et* B′ *qui sont à une distance* b *de l'origine et on les joint à un point* M, *mobile sur l'hyperbole. La perpendiculaire à* B′M *au point* B′ *rencontre* BM *en un point* I, *dont on demande le lieu géométrique. Ce lieu est une quar-*

tique; on demande de la construire et d'indiquer les différentes formes de la courbe suivant que l'on a

$$b < a, \quad b = a, \quad b > a. \qquad (G. L.).$$

Les formules de transformation qui lient les coordonnées X, Y d'un point de l'hyperbole aux coordonnées du point dont on cherche le lieu géométrique sont (*)

$$X = -\frac{2bx\,(y+b)}{x^2+y^2-b^2}; \qquad Y = \frac{x^2-y^2+b^2}{x^2+y^2-b^2},$$

et comme le point X, Y est sur l'hyperbole, on a

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{4\,b^2x^2\,(y+b)^2}{(a^2x^2+y^2-b^2)^2} - \frac{(x^2-y^2+b^2)^2}{(x^2+y^2-b^2)^2} = 1$$

ou, après calculs,

$$a^2\,x^4 - 2b^2\,(y+b)^2\,x^2 + a^2\,(y^2-b^2)^2 = 0.$$

C'est une première forme de l'équation du lieu.

Intersection avec Ox. — Faisant $y = 0$ on a l'équation

$$a^2x^4 - 2b^4x^2 + a^2b^4 = 0.$$

La condition de réalité de racines est $b^8 - a^4b^4 >, 0$, ou $b^4(b^4 - a^4) \geq 0$. Si $b < a$, la courbe ne coupe pas Ox. Pour $b = a$, on a un carré parfait $a^2(x^2 - a^2)^2 = 0$. Enfin, si $b > a$, on a quatre points d'intersection avec Ox.

Tangentes horizontales. — Considérons l'équation [α] comme bicarrée en x. La réalité des racines dépend de

$$\begin{aligned} U &= b^4(y+b)^4 - a^4\,(y^2-b^2)^2 \\ &= (y+b)^2\,[b^4\,(y+b)^2 - a^4\,(y-b)^2] \\ &= [b^2\,(y+b) + a^2\,(y-b)]\,[b^2\,(y+b) - a^2\,(y-b)]. \end{aligned}$$

On a ainsi, pour séparer le plan en régions, deux tangentes horizontales

$$Y_1 = \frac{b\,(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, \quad Y_2 = \frac{b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

Les abscisses du point de contact sont

$$x_1 = \pm\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \qquad x_2 = \pm\frac{2ab^2}{a^2-b^2}.$$

Nous verrons à les construire plus loin.

(*) Voir le Journal page 77.

Intersection avec Oy. — Faisant $x = 0$, on a l'équation $(y^2 - b^2)^2 = 0$, qui donne les points B et B'; ce sont des points doubles. Nous sommes ainsi amené à transporter l'origine en ces points, pour voir la forme de la courbe dans le voisinage.

Transport de l'origine au point B. — Posant $y = Y + b$, $x = X$, l'équation [α] devient

$$2b^2X^2(Y + 2b)^2 = a^2[X^4 + Y^2(Y + 2b)^2]$$

ou

$$[\beta] \quad (Y + 2b)^2[2b^2X^2 - a^2Y^2] = a^2X^4.$$

C'est une nouvelle forme de l'équation du lieu. Elle met en évidence les tangentes au point double B; ces tangentes sont $Y = \pm \frac{b\sqrt{2}}{a}x$, valeur facile à construire. En outre, elles séparent le plan en régions. Cette séparation nous montre que B', se trouvant dans la région ombrée, est un point double isolé.

Transport de l'origine en B'. — Posant $x = X$, $y + b = Y$, on a

$$2b^2X^2Y^2 = a^2[X^4 + Y^2(Y - 2b)^2].$$

On voit que par B' passe une tangente double $Y^2 = 0$. Transformons encore l'équation; on peut l'écrire

$$a^2X^4 - b^2X^2Y^2 + Y^2[a^2(Y - 2b)^2 - b^2X^2] = 0,$$

ou

$$X^2[a^2X^2 - b^2Y^2] + Y^2[aY + bX - 2ab][aY - bX - 2ab] = 0$$

ou [γ]

$$X^2\left(\frac{X}{b} - \frac{Y}{a}\right)\left(\frac{X}{b} + \frac{Y}{a}\right) + Y^2\left(\frac{Y}{b} + \frac{X}{a} - 2\right)\left(\frac{Y}{b} - \frac{X}{a} - 2\right) = 0.$$

C'est une troisième forme de l'équation du lieu, rapportée cette fois à B' pour origine. Les droites

$$\frac{Y}{b} + \frac{X}{a} - 2 = 0, \quad \frac{Y}{b} - \frac{X}{a} - 2 = 0$$

sont les droites BA, BA' de la figure; les droites

$$\frac{X}{b} - \frac{Y}{a} = 0, \quad \frac{X}{b} + \frac{Y}{a} = 0$$

représentent les perpendiculaires abaissées du point B' sur les deux droites précédentes.

On forme ainsi deux triangles B.1.3 et B.2.4.

Ces triangles sont très importants; d'abord ils donnent une séparation; B est un point double avec des tangentes bien déterminées; et, de plus, les points 1, 2, 3, 4 ne sont autre chose que les points de contact des tangentes horizontales à la courbe.

Il suffit, pour s'en assurer, de calculer les coordonnées de ces points 1, 2, 3, 4; on tombera sur les valeurs précédemment obtenues pour les tangentes horizontales.

Quatrième forme de l'équation. — L'équation (α) peut s'écrire encore

$$a^2(y^2 - b^2)^2 = x^2[2b^2(y + b)^2 - a^2x^2]$$

ou

$$[\delta] \quad a^2(y^2 - b^2)^2 = x^2[b\sqrt{2}\,(y + b) - ax][b\sqrt{2}\,(y + b) + ax].$$

Cette forme d'équation donne les points où la courbe rencontre la parallèle à Ox menée par B.

Les tangentes en ces points sont les droites

$$b\sqrt{2}\,(y + b) \pm ax = 0,$$

passant toutes deux par le point B' et faciles à construire.

Asymptotes. — Soit $y = \gamma x + \delta$ une asymptote.

Désignant par φ_m l'ensemble des termes de degré m dans l'équation, par φ_{m-1} l'ensemble des termes de degré $m - 1$, et remplaçant x par 1, y par γ, les valeurs de γ sont données par

$$\varphi_m(\gamma) = a^2\gamma^4 - 2b^2\gamma^2 + a^2 = 0$$

ou

$$\gamma^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - a^4}}{a^2}.$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut $b \geq a$.

On sait que
$$\delta = -\frac{\varphi_{m-1}(1,\gamma)}{\varphi'_m(1.\gamma)}.$$

D'ailleurs
$$\begin{cases} \varphi'_m = 4a^2\gamma^3 - 4b^2\gamma \\ \varphi_{m-1} = -4b^3\gamma \end{cases}$$

Donc
$$\delta = \frac{b^3}{a^2\gamma^2 - b^2}.$$

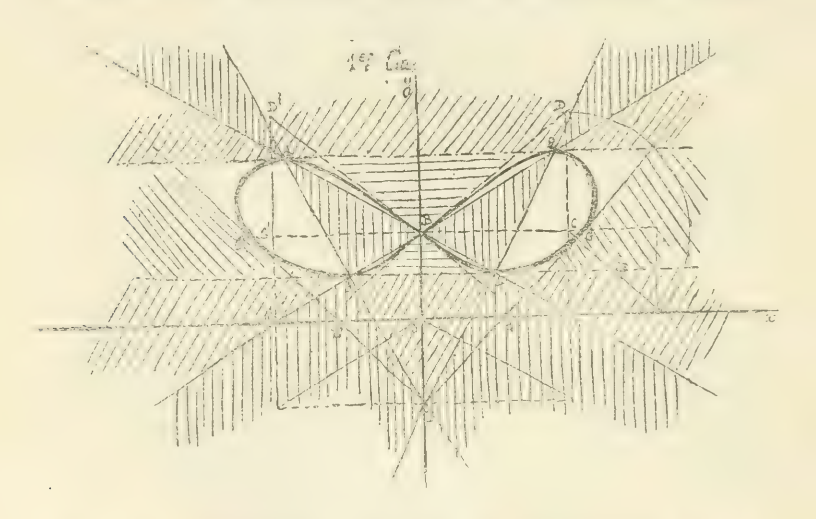
Remplaçant γ^2 par sa valeur, on a

$$\gamma_1^2 = \frac{b^2 + \sqrt{b^4 - a^4}}{a^2}, \quad \delta_1 = \frac{b^3}{\sqrt{b^4 - a^4}},$$

$$\gamma_2^2 = \frac{b^2 - \sqrt{b^4 - a^4}}{a^2}, \quad \delta_2 = - \frac{b^3}{\sqrt{b^4 - a^4}}.$$

Il y a donc, si $b > a$, quatre asymptotes réelles, symétriques par rapport à Oy, et se coupant sur l'axe Oy en des points symétriques par rapport à l'origine.

Premier cas : $b < a$. — Il n'y a pas d'asymptotes, pas de points à l'infini. La courbe est comprise entre les deux



tangentes horizontales données par les triangles B.1.3, B.2.4.

Deuxième cas : $b = a$. *Hyperbole équilatère.* — L'équation (α) devient $x^4 - 2(y + a)^2 x^2 + (y^2 - a^2)^2 = 0$.

Les tangentes au point double B sont $2X^2 = Y^2$.

Les formules donnant les tangentes horizontales deviennent

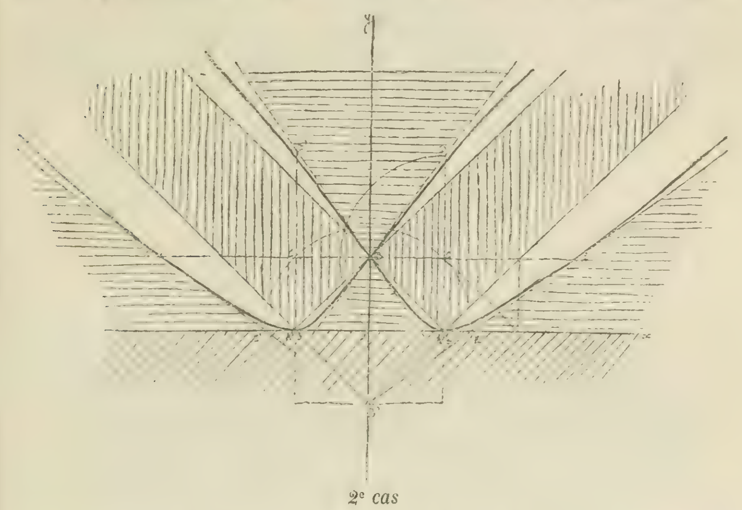
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = \infty$$
$$x_1 = \pm a \qquad x_2 = \infty$$

Ainsi, l'une des tangentes s'est transportée à l'infini.

C'est ce qu'indiquent aussi les triangles B.2.4. B.1.3, dont les sommets 1 et 2 sont à l'infini. Car, transportant l'origine en B', la troisième forme de l'équation devient

$$X^2(X - Y)(X + Y) + Y^2(Y + X - a)(Y\,2 - X - 2a) = 0. \quad (\gamma)$$

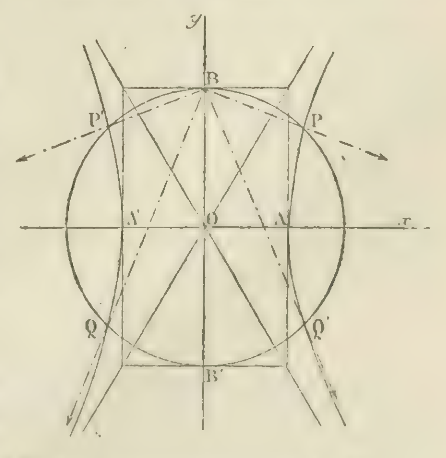
Les directions asymptotiques sont données par $(y^2 - 1)^2 = 0$; les deux bissectrices sont donc des directions



2e cas

asymptotiques doubles. Mais on a alors $\delta =$; donc la courbe n'a que des branches paraboliques.

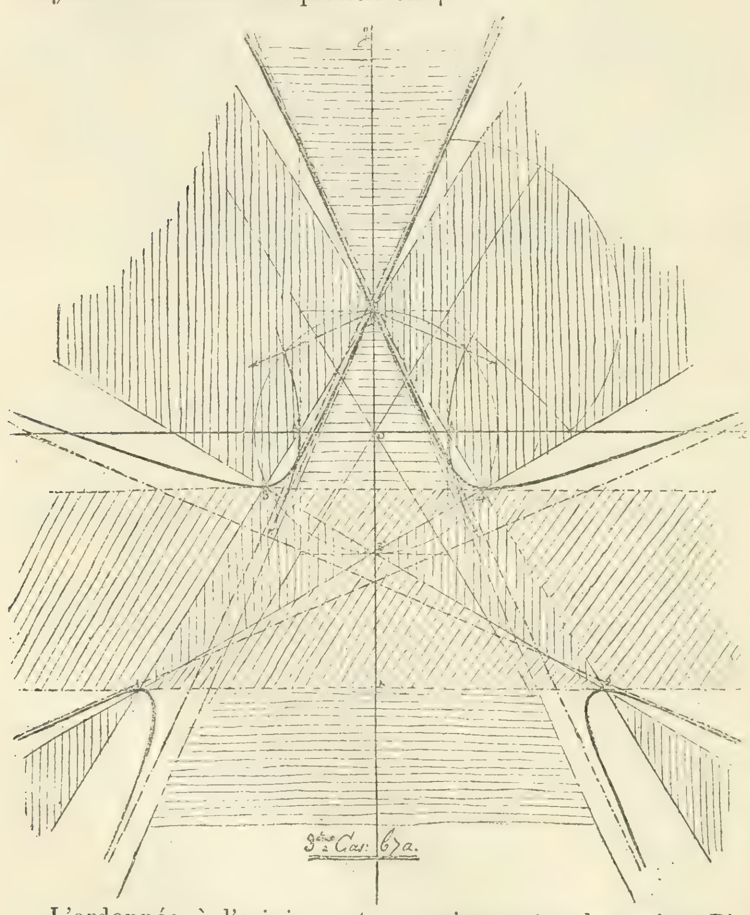
Troisième cas : $b > a$. — Les deux tangentes horizontales sont toutes deux au-dessous de Ox; la courbe est extérieure à l'intervalle compris entre les deux tangentes.



Il y a alors quatre asymptotes réelles. Cherchons géométriquement les directions asymptotiques. Pour qu'on ait un point à l'infini, il faut que MB et B'I soient parallèles; or B'I est menée perpendiculaire à MB'; donc il faut que MB soit perpendiculaire à MB'.

Par suite, le point M doit être à l'intersection de l'hyperbole proposée avec la circonférence de diamètre BB'.

On a ainsi les quatre directions asymptotiques BP, BQ, BP', BQ'. Elles sont perpendiculaires deux à deux; on le voyait du reste sur l'équation en γ.



L'ordonnée à l'origine est comprise entre les points B' et K, dont les ordonnées sont respectivement, en valeur absolue, b et

$$\frac{b(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2}.$$

Nous allons, pour cela, montrer qu'on a

$$b^2 < \delta^2 < \frac{b^2(b^2+a^2)^2}{(b^2-a^2)^2}.$$

La première inégalité revient à

$$b^2 < \frac{b^6}{b^4 - a^4}, \text{ ou } b^4 - a^4 < b^4,$$

ce qui est vrai.

La deuxième revient à

$$\frac{b^6}{b^4-a^4} < \frac{b^2(a^2+b^2)^2}{(b^2-a^2)^2}$$

ou $$b^4(b^2-a^2) < (b^2+a^2)^3,$$

ou enfin $$a^6 + 3a^4b^6 + 4a^2b^4 > 0,$$

ce qui est évident.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E. J. Boquel.**

(*Suite*, voir page 59)

Autre définition des coordonnées trilinéaires. — Identité des deux définitions. — Les coordonnées trilinéaires s'introduisent encore dans le calcul par des considérations en apparence différentes de celles qui précèdent, mais qui en réalité ont une signification identique.

Un point quelconque du plan peut être déterminé par l'intersection de deux droites tournant autour de deux des sommets du triangle de référence, et dont les équations sont respectivement

$$Ax + By + C = k(A''x + B''y + C''),$$
$$A'x + B'y + C' = h(A''x + B''y + C'').$$

Ces droites seront parfaitement déterminées par les valeurs particulières des paramètres k et h qui leur correspondent.

Or, si l'on se reporte à la définition générale d'un système quelconque de coordonnées, on voit que l'on pourra regar-

der les variables k et h comme de nouvelles coordonnées du point M, puisque les valeurs de ces paramètres détermineront deux lignes dont l'intersection fournira le point M.

Connaissant les coordonnées cartésiennes x_1 et y_1 d'un point M_1 du plan, les coordonnées k_1 et h_1 dans le nouveau système seront données par les formules

$$k_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{A''x_1 + B''y_1 + C''}, \quad h_1 = \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{A''x_1 + B''y_1 + C''}.$$

Réciproquement, connaissant les coordonnées k_1 et h_1 d'un point M_1 dans le nouveau système, on aura ses coordonnées rectilignes en résolvant les équations (1) par rapport à x_1 et à y_1. Ces équations du premier degré donneront x_1 et y_1 par des fractions rationnelles dont les deux termes sont du premier degré en k_1 et h_1, et qui de plus ont même dénominateur, c'est-à-dire qui sont de la forme

$$x_1 = \frac{Mk_1 + Nh_1 + P}{Rk_1 + Sh_1 + T}, \quad y_1 = \frac{M'k_1 + N'h_1 + P'}{Rk_1 + Sh_1 + T}. \quad (1)$$

Une équation $f(x_1 y) = o$ dans le système de Descartes deviendra donc, en coordonnées nouvelles,

$$f\left(\frac{Mk + Nh + P}{Rk + Sh + T}, \frac{M'k + N'h + P'}{Rk + Sh + T}\right) = o, \quad (2)$$

de même qu'une équation $\varphi(k_1 h) = o$ dans le nouveau système considéré deviendra, en coordonnées cartésiennes,

$$\varphi\left(\frac{Ax + Bx + C}{A''x + B''y + C''}, \frac{A'x + B'y + C'}{A''x + B''y + C''}\right) = o. \quad (3)$$

Toute équation algébrique et entière dans l'un des systèmes se transformera donc en une équation algébrique entière. et du même degré dans l'autre système.

Si l'on pose $\alpha = Ax + By + C$, $\beta = A'x + B'y + C'$, $\gamma = A''x + B''y + C''$, l'équation (3) prend la forme homogène $\varphi\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right) = o$, qui, par l'évanouissement des dénominateurs, devient de la forme $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = o$, équation homogène en α, β, γ.

Or, les lettres α. β. γ. que nous avons prises. dans la première définition, pour représenter les coordonnées trilinéaires d'un point, ne sont autre chose que les α. β, γ actuels,

Il suffit, en effet, pour leur donner la même signification, de supposer les équations des axes de référence convenablement écrites, de manière à satisfaire à la convention fondamentale sur les lignes des coordonnées trilinéaires, et de prendre pour paramètre de référence les facteurs constants qui entrent dans les expressions des distances d'un point aux trois axes de référence, c'est-à-dire de prendre, en coordonnées rectangulaires,

$$\lambda = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \mu = \sqrt{A'^2 + B'^2}, \quad \nu = \sqrt{A''^2 + B''^2},$$

ou, en coordonnées obliques,

$$\lambda = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta}}{\sin\theta}, \quad \mu = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}}{\sin\theta}$$

$$\nu = \frac{\sqrt{A''^2 + B''^2 - 2A''B''\cos\theta}}{\sin\alpha};$$

k et h seront alors les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ de deux des coordonnées trilinéaires primitivement définies à la troisième.

Cas particulier. — Supposons les coordonnées cartésiennes rectangulaires; on peut prendre les équations des axes de référence sous la forme

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 = 0$$
$$x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 = 0$$
$$x\cos\varphi_3 + y\sin\varphi_3 - p_3 = 0$$

et admettre que ce triangle de référence est tel que l'origine des coordonnées cartésiennes soit dans son *intérieur;* alors pour chaque côté un point intérieur au triangle est du même côté que l'origine par rapport à ce côté; si de plus on fait les paramètres de référence égaux à l'unité, les coordonnées trilinéaires d'un point du plan seront alors données en grandeur et en signe par les formules

$$\alpha = p_1 - x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1,$$
$$\beta = p_2 - x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2,$$
$$\gamma = p_3 - x\cos\varphi_3 - y\sin\varphi_3,$$

et elles seront exactement les distances elles-mêmes du point aux trois côtés du triangle de référence, leurs signes, conformes à la convention fondamentale, étant bien ceux

que prennent les seconds membres de ces formules pour le point considéré.

(A suivre.)

QUESTION 357

Solution par PAUL BOULOGNE, élève au Lycée Saint-Louis.

Étant donnée une conique tangente en deux points fixes A *et* B *aux deux côtés d'un angle fixe, on mène à cette conique une troisième tangente variable terminée en* C *et* D *aux côtés de l'angle donné. Par les points* C *et* D *on mène des parallèles aux deux côtés de l'angle : on demande le lieu des points d'intersection de ces parallèles quand la troisième tangente prend toutes les positions possibles.*

Prenons les côtés de l'angle pour axes de coordonnées, OA pour axe des x, OB pour axe des y. Désignons par a et b les longueurs OA, OB, et soient x_1, y_1 les coordonnées du point du lieu. L'équation de la conique est

$$(bx + ay - ab)^2 + \lambda\, xy = 0, \qquad (1)$$

celle de la droite CD,

$$y_1 x + x_1 y - x_1 y_1 = 0. \qquad (2)$$

Éliminons y entre (1) et (2), nous obtiendrons l'équation aux x des points d'intersection de la droite et de la conique. Écrivant que cette équation a une racine double, nous aurons l'équation du lieu. L'élimination de y conduit à

$$x^2 [(bx_1 - ay_1)^2 - \lambda x_1 y_1] + x [2ax_1 (y_1 - b)(bx_1 - ay_2) + \lambda x_1^2 y_1] + a^2 x^2_1 (y_1 - b)^2 = 0.$$

Écrivant que cette équation a une racine double, simplifiant et enlevant les indices, on obtient

$$xy (4ab + \lambda) - 4ab^2 x - 4a^2 by + 4a^2 b^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à des parallèles aux asymptotes, et dont le centre est sur la diagonale issue de O du parallélogramme construit sur OA et OB. Si les droites étaient rectangulaires, l'hyperbole serait équilatère.

Nota. — Ont résolu aussi cette question: MM. Jourdan, à Rouen; Baron, à Sainte-Barbe; Gino Loria, à Mantoue; Petit, à Grenoble.

M. Gino Loria et M. Herzog, élève du lycée Corneille à Rouen, ont remarqué que le lieu pouvait facilement se trouver par des considérations géométriques; les droites qui, par leur intersection, donnent les points du lieu forment deux faisceaux homographiques ayant pour sommets les points à l'infini sur les tangentes à la conique donnée. On en conclut de suite que le lieu est une conique, et comme elle passe par les pivots des deux faisceaux, c'est une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux deux tangentes fixes.

QUESTION 358

Solution par M. Cadot, élève au Lycée Saint-Louis.

On demande si la série

$$1 + \frac{2^m}{1} + \frac{3^m}{m+p} + \frac{4}{3^m+p} + \ldots + \frac{n}{(-1)^{m+}} + \ldots$$

est convergente.

Considérons le rapport $\dfrac{L\dfrac{1}{u_n}}{Ln}$ qui a pour valeur

$$\frac{L\dfrac{(n-1)^{m+p}}{n^m}}{Ln} = \frac{(m+p)\,L(n-1) - m\,L\,n}{Ln}$$
$$= (m+p)\frac{L(n-1)}{Ln} - m.$$

Lorsque n croît indéfiniment, $\dfrac{L(n-1)}{Ln}$ tend vers 1: donc le rapport tend vers p.

Si la valeur absolue de p est > 1, la série est convergente.

Si la valeur absolue de $p = 1$, la série est divergente, car le produit $nu_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{m+1}$ tend vers 1 en restant toujours supérieur à 1.

Si la valeur absolue de p est < 1, la série est encore divergente: car $nu_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{m+p} n^{1-p}$; or $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{m+p}$ tend vers 1; n^{1-p} ne tend pas vers 0, puisque l'exposant $1-p$ est positif, donc la série est divergente.

Nota. — La même question a été résolue par M. Petit, à Grenoble.

QUESTION 370

Solution par M. BARON, élève du Lycée Henri IV.

On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$, *et l'on considère les coniques osculatrices à cette parabole en son sommet; montrer que: 1° le lieu des sommets de ces coniques est une parabole; 2° le lieu de leurs foyers est un cercle.*

Soit $y^2 = 2px$ (1) la parabole; les coniques osculatrices en son sommet à (1) auront évidemment pour équation

$$y^2 - 2px + \lambda x^2 = 0. \qquad (2)$$

1° Lieu des sommets.

Un diamètre a pour équation

$$\lambda x - p + my = 0; \qquad (3)$$

le coefficient angulaire d'une tangente perpendiculaire à (3) a pour valeur $-\dfrac{\lambda x - p}{y}$;

donc

$$-\frac{\lambda x - p}{y} = \frac{m}{\lambda}. \qquad (4)$$

Entre (2), (3), (4) j'élimine m et λ.

$$\lambda x - p + my = 0 \qquad (3)$$
$$(\lambda x - p)\lambda + my = 0 \qquad (4)$$
$$\overline{(\lambda x - p)(\lambda - 1) = 0}$$

Comme λ est différent de 1, car $\lambda = 1$ correspond au cercle osculateur à la parabole en O, on doit prendre $\lambda = \dfrac{p}{x}$, ce qui donne pour le lieu

$$y^2 - 2px + px = 0$$

ou

$$y^2 - px = 0, \qquad (5)$$

parabole ayant même axe et même sommet que la première et son foyer au milieu de la distance focale de la première.

2° Lieu des foyers.

Soit $(\alpha\beta)$ un point du lieu.

L'équation quadratique des tangentes menées de ce point à (2) est

$$(y^2 - 2px + \lambda x^2)(\beta^2 - 2p^2 + \lambda\alpha^2) - [\alpha(\lambda x - p) + \beta y - px]^2 = 0.$$

J'exprime que ces tangentes sont rectangulaires.

$$\begin{cases} (\alpha\lambda - p)\beta = 0 \\ \lambda\beta^2 - p^2 = -2p\alpha + \lambda\alpha^2 \end{cases}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve le cercle
$$\alpha^2 + \beta^2 - p\alpha = 0$$
tangent à l'origine à l'axe des y et ayant son centre au foyer de la parabole donnée.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Boulogne, au lycée Saint-Louis; Lelieuvre, à Rouen; Petit, à Grenoble; Finat, à Moulins.

QUESTIONS PROPOSÉES

13. — Etant donnés deux points A et B d'une parabole inconnue, et la droite Δ, axe de cette courbe, on abaisse sur Δ les perpendiculaires AA′, BB′; puis on trace les droites AB′, BA′, qui se coupent en un certain point C. Démontrer que si, par le point C, on mène une parallèle à l'axe Δ, cette droite rencontre AB en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet. *(G. L.)*

14. — On considère la parabole P
$$(\lambda y - x)^2 - 2px = 0,$$
qui est tangente à l'axe Oy au point O, et qui coupe l'axe des x au point M tel que OM $= 2p$; on considère aussi la parabole cubique Q, enveloppe des normales de P. Cette courbe est tangente à l'axe Ox au point A, et coupe cet axe en un autre point B. Soit enfin C le point de rencontre de l'axe P avec Ox. On imagine maintenant que, d'un point R, mobile sur Ox, on mène à la courbe P des normales. Ce problème dépend d'une équation du second degré.

1° Déterminer et discuter cette équation, et montrer quels résultats elle donne quand on suppose successivement le point R à l'un des points A, B, C ou M.

2° Après avoir déterminé, en fonction de λ, les rapports

$$\frac{OA}{OM}, \quad \frac{OB}{OM}, \quad \frac{OC}{OM},$$

déduire de ces relations que l'on a

$$2OA \cdot OC = AC \cdot OM.$$

3° Examiner successivement le cas où le point B se confond avec O, et celui où le point A coïncide avec M. Énoncer les théorèmes auxquels donnent lieu ces deux hypothèses.

4° Démontrer que le paramètre p de la parabole est donné par la formule

$$p = \frac{\lambda}{(\lambda^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

et que l'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{p}{\lambda^2 + 1} = 0.$$

5° Trouver l'enveloppe de cette droite quand on suppose que p est constant, et construire la courbe donnée.

(G. L.)

15. — Trouver le lieu des points M tel que, parmi les normales issues de ce point à la parabole

$$y^2 - 2px = 0,$$

il y en ait deux qui forment avec la droite

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

un triangle isoscèle. Ce lieu est une parabole ; construire cette courbe lorsque l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{8}$, et montrer que le sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée.

(G. L.)

16. — On considère une ellipse E rapportée à ses axes, et une conique Δ passant par les foyers et les extrémités B, B′ du petit axe de E. Cette conique Δ rencontre E en deux points M et N, différents de B et B′. En ces points, on mène à E des normales qui rencontrent Δ en des points I, I′, dont on demande le lieu géométrique.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 744-2.

TRANSFORMATIONS RÉCIPROQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 49 et 77.)

12. — *Proposons-nous maintenant de déterminer la tangente aux courbes* F, *transformées des courbes* f, *par transformation réciproque.*

Soient O, O′ les deux points fixes, O désignant particulièrement celui d'entre eux que nous avons nommé le *pôle*

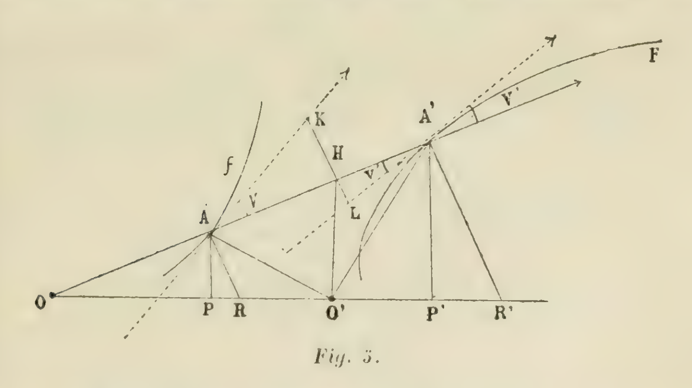


Fig. 5.

principal. Ayant pris sur f un point A, on sait que pour obtenir le point correspondant A′ sur F, il faut joindre AO′ et au point O′ élever à AO′ une perpendiculaire qui rencontre OA au point cherché A′.

Si l'on pose $OO' = a$, $OA = \rho$, $OA' = r$, et si l'on désigne par ω l'angle que fait A′AO avec OO′, on a, comme nous l'avons précédemment montré,

$$\rho r - a(\rho + r)\cos\omega + a^2 = 0.$$

Mais si l'on veut éviter les calculs que nous venons de rappeler, nous ferons observer que l'on peut immédiatement obtenir cette formule de transformation par la remarque

suivante. Abaissons du point O′ sur la droite OAA′ la perpendiculaire OH, on aura

$$\overline{O'H}^2 = AH.A'H$$

ou $$a^2 \sin^2 \omega = (a \cos \omega - \rho)(r - a \cos \omega)$$

et, après simplification, on a bien

$$\rho r - a(\rho + r) \cos \omega + a^2 = 0. \qquad (A)$$

13. — *Recherche de la relation qui existe entre les angles formés par un rayon vecteur avec les tangentes aux points correspondants.*

Appelons V, V′ ces angles qui sont donnés par les formules

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho d\omega}{d\rho} \quad \operatorname{tg} V' = \frac{r d\omega}{dr}. \quad (^1)$$

La formule (A) donne d'ailleurs

$$\rho \frac{dr}{d\omega} + r \frac{d\rho}{d\omega} - a \left(\frac{d\rho}{d\omega} + \frac{dr}{d\omega}\right) \cos \omega + a(\rho + r) \sin \omega = 0\,;$$

on a donc

$$\rho r(\operatorname{cotg} V + \operatorname{cotg} V') - a \cos \omega\,(\rho \operatorname{cotg} V + r \operatorname{cotg} V')$$
$$+ a(\rho + r) \sin \omega = 0,$$

ou encore, après calcul,

$$\rho r \sin (V + V') - a\rho \sin V' \cos (\omega + V)$$
$$- ar \sin V \cos (\omega + V') = 0.$$

Si l'on tient compte de la condition (A) on aura

$$\rho \sin V \cos (\omega - V') + r \sin V' \cos (\omega - V)$$
$$= a \sin (V + V')$$

ou encore

$$(a - \rho \cos \omega) \operatorname{cotg} V' + (a - r \cos \omega) \operatorname{cotg} V$$
$$= (\rho + r) \sin \omega. \qquad (B)$$

14. — Telle est la relation fondamentale entre les angles V et V′ ; elle permettra de construire la tangente à la courbe f, si l'on sait construire la tangente à F, ou inversement.

On peut déduire de la formule (B) des constructions très

(¹) Nous employons ici la notation différentielle, qui est commode et plus agréable à beaucoup de nos lecteurs ; nos jeunes lecteurs, pour mieux suivre cette démonstration, voudront bien remplacer $\frac{d\rho}{d\omega}$ par ρ'_ω et $\frac{dr}{d\omega}$ par r'_ω.

diverses pour déterminer l'angle V′ connaissant l'angle V. Voici l'une de ces constructions.

La formule (B) peut s'écrire

$$O'P \operatorname{cotg} V' - O'P' \operatorname{cotg} V = AP + A'P', \qquad (C)$$

P, P′ désignant les projections des points A, A′ sur la ligne des pôles OO′.

Aux points A, A′ élevons à la droite OAA′ des perpendiculaires qui rencontrent les lignes des pôles OO′ aux points R, R′ ; puis au point H qui est situé sur AA′ et se projette sur OO′ au point O′ lui-même élevons à AA′ une perpendiculaire qui rencontre en K et en L les tangentes aux courbes f et F aux points A, A′ ; on déduit, de cette construction, le calcul suivant :

On a d'abord $$AH = KH \operatorname{cotg} V$$
$$A'H = HL \operatorname{cotg} V'$$

et, par suite

$$\frac{O'P.A'H}{LH} - \frac{AH.O'P'}{KH} = AP + A'P.$$

D'autre part

$$AH = \frac{O'P}{\cos \omega}, \; A'H = \frac{O'P'}{\cos \omega}$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{O'P.O'P'}{\cos \omega}\left(\frac{1}{LH} - \frac{1}{KH}\right) = AP + A'P'$$

ou enfin, en remarquant que $O'P.O'P' = AP.A'P'$,

$$\frac{1}{LH} - \frac{1}{KH} = \frac{1}{AR} + \frac{1}{A'R'}.$$

Cette relation est fondamentale pour le tracé des tangentes dans cette méthode de transformation ; elle permet, par une construction assez rapide, de trouver le point K, si l'on connaît le point L, ou inversement.

Mais il faut observer, comme nous l'avons déjà fait remarquer, qu'on peut tirer de la formule (B) beaucoup d'autres constructions, probablement plus simples ou plus remarquables que la précédente. C'est ce que nous allons d'ailleurs montrer en nous occupant dans le paragraphe suivant d'une courbe célèbre.

15 — *Appliquons la formule* (B) *à la courbe de séparation*

d'ombre et de lumière dans l'épure de la vis à filets triangulaires (*).

Cette courbe se définit ainsi: *Soit* f *un cercle donné de centre* O′, O *un point fixe; on prend sur le cercle un point* A *que l'on joint au point* O, *cette droite rencontre la perpendiculaire élevée au point* O′ *au rayon* O′A *en un point* A′ *dont le lieu, quand le point* A *décrit* f, *est la courbe de séparation d'ombre et de lumière dans l'épure de la vis à filets triangulaires.*

On voit que cette courbe peut être considérée comme transformée du cercle par la transformation réciproque.

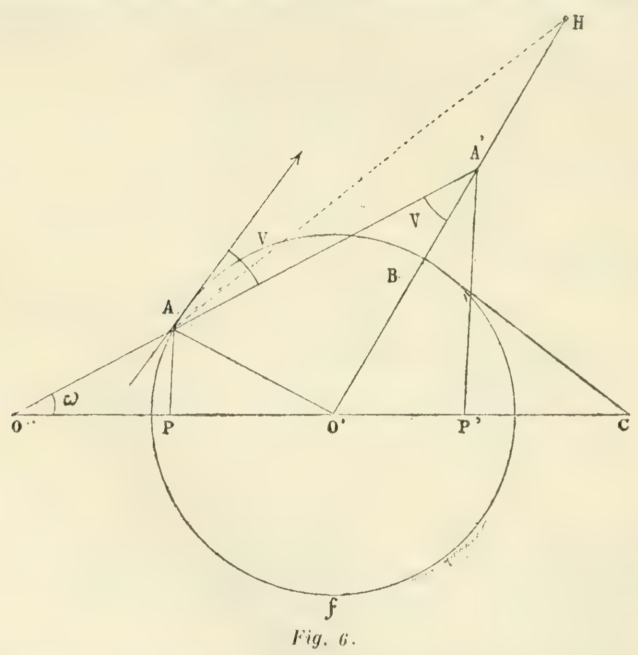


Fig. 6.

La méthode que nous venons de donner pour la construction des tangentes peut donc s'appliquer à cette courbe. Poncelet (*loc. cit.*) trouve, par l'application de la méthode de Roberval, une construction qui, dans le cas considéré, est plus simple que la construction générale indiquée plus haut.

(*) Voyez Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, t. I, p. 450.

Il est intéressant de retrouver, avec le secours de notre formule, l'élégante construction de Poncelet.

De la formule (B) on a déduit (C), et celle-ci, dans le cas particulier où f est un cercle, devient

$$\cot V' - \cot V = \frac{\cot(\omega + V)}{\sin^2 V}; \qquad (1)$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} AP &= R\cos(\omega + V) \quad OA' = R\cot V \\ A'P' &= R\cot V \sin(\omega + V) \\ O'P &= R\sin(\omega + V) \\ O'P' &= R\cot V\cos(\omega + V) \end{aligned}$$

la relation (1) peut s'écrire

$$\frac{\sin(V - V')}{\sin V'} = \frac{\cot(\omega + V)}{\sin V}. \qquad (2)$$

Si au point B, point de rencontre de f avec O'A', on mène la tangente qui rencontre OO' au point C, on aura

$$BC = R\,\mathrm{tg}\,(\omega + v). \qquad (3)$$

D'autre part le triangle rectangle AO'A' donne

$$(r - \rho)\sin V = R \qquad (4)$$

et les relations (2), (3), (4), donnent par combinaison

$$\frac{r - \rho}{\sin(V - V')} = \frac{BC}{\sin V'}.$$

C'est de cette relation que l'on déduit immédiatement la construction suivante, indiquée par Poncelet: *On prolonge le rayon recteur* O'A' *d'une longueur* A'H $=$ BC *et la droite* AH *donne la direction de la tangente au point* A' *à la courbe* F.

C'est ce que prouve en effet le triangle AA'H: car, en posant

$$HAA' = x, \text{ on a } \frac{r - \rho}{\sin(V - x)} = \frac{A'H \text{ ou } BC}{\sin x};$$

donc

$$V' = x.$$

16. — Remarque I. — Dans le cas particulier où le pôle O est sur le cercle, la courbe devient une *strophoïde*. — C'est ce que la géométrie reconnaît immédiatement. On déduit donc de la construction qui précède un moyen très simple de tracer la tangente en un point donné sur la strophoïde.

Remarque II. — Considérons une courbe f, et, par la transformation réciproque, transformons-la en une courbe F; si

l'on transforme f et F par la méthode des rayons vecteurs réciproques, on obtient deux courbes f' et F' qui, si la puissance de transformation est égale à OO'^2, peuvent être considérées comme transformées l'une de l'autre par notre méthode.

En effet, les formules

$$\rho'\rho = a^2$$
$$r'r = a^2$$

donnent

$$\rho r = \frac{a^4}{\rho' r'}$$

et

$$\rho + r = \frac{a^2(\rho' + r')}{\rho' r'}$$

et la formule $\rho r - a(\rho + r)\cos\omega + a^2 = 0$

devient $\rho' r' - a(\rho' + r')\cos\omega + a^2 = 0$

formule qui prouve bien que f' et F' sont des courbes transformées l'une de l'autre par notre méthode.

Il résulte de cette observation une remarque importante. Supposons que l'on considère une anallagmatique de notre système de transformation; supposons par conséquent que f et F ne fassent qu'une *seule et même courbe* φ; alors f' et F' ne forment aussi *qu'une courbe* φ', savoir la transformée de φ par rayons vecteurs réciproques. Mais alors φ', formé de deux branches de courbe qui se déduisent l'une de l'autre par la transformation réciproque, est aussi une anallagmatique de cette transformation.

Il y a pourtant exception à cette règle quand la courbe φ est elle-même anallagmatique dans la transformation par rayons vecteurs réciproques. Par exemple la strophoïde est anallagmatique par rapport aux rayons vecteurs qui partent de son sommet, dans l'une et l'autre des deux méthodes. Dans ce cas singulier φ' et φ coïncident, et l'on ne peut plus, de l'anallagmatique φ, déduire la nouvelle anallagmatique φ'.

Remarque III. — Si l'on considère une conique Δ et un point M sur la courbe ; si, autour du point M, on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent Δ aux points B, C, on sait que BC rencontre la normale en M à Δ, en un point fixe P; c'est le *théorème de Frégier*. Il en résulte que si l'on transforme Δ par transformation réciproque, M et P étant les

pôles, mais P le pôle principal, on retrouve la conique Δ elle-même. Ainsi *les coniques, dans les conditions de transformation que nous venons de définir, sont des anallagmatiques de notre système.* Cette remarque intéressante nous a été faite par M. Ed. Lucas. *(A suivre.)*

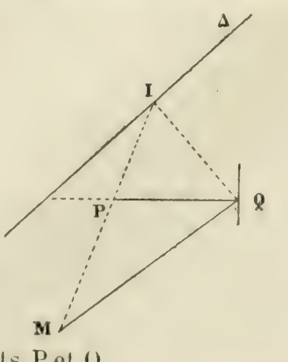
CONSTRUCTION D'UNE CONIQUE

AU MOYEN D'UNE ÉQUERRE CONNAISSANT LES DEUX EXTRÉMITÉS D'UNE CORDE NORMALE ET DEUX AUTRES POINTS

Par M. **Petit**, élève en Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne,

Ce problème peut être résolu par l'application du théorème de Pascal, mais on peut aussi le résoudre par une construction, qui paraît sensiblement plus rapide, en utilisant la transformation réciproque imaginée par M. G. de Longchamps (*). Nous allons, à cet effet, considérer une conique comme transformée d'une droite, grâce au théorème suivant.

Théorème I. — *Étant donnés deux points fixes* P *et* Q, *et une droite fixe* Δ, *si l'on considère un angle droit pivotant autour du point* Q, *si l'on joint* IP, *le lieu du point de rencontre* M *de cette droite avec* QM *est une conique.*



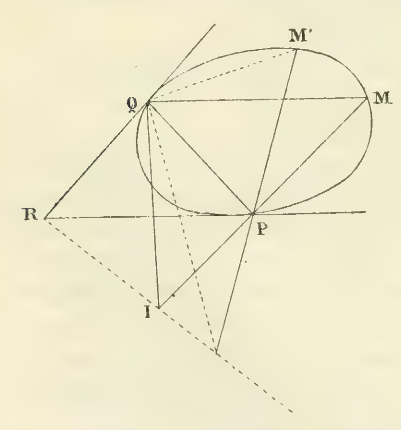
Car à une droite PI correspond une seule droite QI, par suite une seule droite QM. Donc QM et PI sont deux droites correspondantes de deux faisceaux homographiques. Par conséquent, M décrit une conique passant par les points P et Q.

(*) Voir le *Journal*, p. 49.

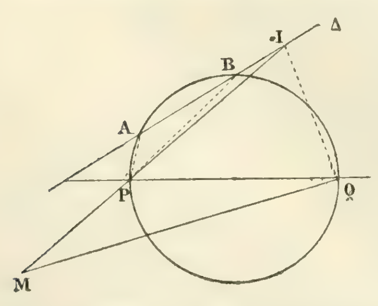
Si l'on remarque que le point Q est obtenu quand la droite QI est confondue avec QP, on voit que QM à ce moment est devenue la tangente en Q. Donc cette tangente est perpendiculaire à QP, c'est-à-dire que PQ est une corde normale.

Théorème II. — *Réciproquement, si l'on donne une conique et une corde normale* PQ, *si l'on joint un point quelconque* M *de la conique aux deux points* P *et* Q, *et si en* Q *on élève la perpendiculaire* QI *à* QM, *le lieu du point de rencontre* I *de cette droite* QI *avec* PM *est une droite.*

En effet, menons les tangentes en P et Q aux extrémités de la corde normale. On obtient un point R; joignons ce point au point I qui correspond au point M pris sur la conique.



Si l'on construit le lieu du point M′ obtenu en faisant pivoter un angle droit autour de Q en prenant RI comme droite fixe Δ et les deux points fixes P et Q, d'après le théorème précédent, ce lieu est une conique qui admet avec la conique donnée trois points communs et deux tangentes communes. Donc ces deux coniques coïncident.



Par conséquent, si l'on donne les extrémités d'une corde normale et deux points, par la construction précédente, les deux points donnés autres que P et Q donnent deux points de la droite Δ; connaissant cette droite Δ, on construira aisément la conique point par point avec une équerre.

Remarque. — Pour savoir à quel genre appartient la conique correspondant à une droite et à deux points donnés, nous remarquerons que le point M ne s'éloigne à l'infini que si QM et IM sont parallèles, c'est-à-dire si l'angle MIQ est droit. Donc si l'on décrit un cercle sur PQ comme diamètre, PA et PB sont les directions asymptotiques. Par conséquent. le lieu est une ellipse si Δ est extérieur à ce cercle, une parabole si elle lui est tangente et une hyperbole si elle lui est sécante.

ÉTUDE
SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler**.

I. — Préliminaires. Représentation géométrique d'une forme binaire.

Considérons sur une droite deux points fixes O, O' que nous appellerons *points fondamentaux* : la position d'un point quelconque A de la droite sera déterminée, si on connaît le rapport $\frac{OA}{O'A}$ de ces distances aux points O et O', et si l'on convient en outre de regarder ce rapport comme positif lorsque A est situé entre O et O', comme négatif dans le cas contraire. Cette convention est tout à fait analogue à celle que l'on emploie pour les coordonnées trilinéaires : un point situé dans l'intérieur du triangle de référence a ses coordonnées positives.

Ce qui précède donne l'interprétation géométrique de la forme binaire du premier degré $ax + by$: égalée à zéro, elle représente un point tel que le rapport de ses distances aux points O et O' ($OA = x$, $O'A = y$) a pour valeur $\frac{OA}{O'A} = \frac{x}{y} = -\frac{b}{a}$. Une forme binaire de degré n telle que

$$f = ax^n + nbx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2} \quad cx^{n-2}y^2 + \ldots$$

étant le produit de n facteurs linéaires, représentera un système de n points réels ou imaginaires.

Lorsqu'on fait subir à une forme donnée une *transformation linéaire* en posant $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$, cela revient à changer la position des points fondamentaux. Le nouveau point à partir duquel on compte les distances X est tel que pour ce point on a $X = 0$; il est donc déterminé par l'équation $\beta' x - \beta y = 0$, puisqu'on déduit des formules de transformation $X = \frac{\beta' x - \beta y}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. De même, le nouveau point à partir duquel on compte les distances Y est déterminé par l'équation $\alpha' x - \alpha y = 0$, puisque $Y = \frac{-\alpha' x + \alpha y}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

On sait qu'on appelle *invariant* d'une forme toute fonction des coefficients qui, par l'effet d'une transformation linéaire, se reproduit, multipliée par un facteur ; si φ désigne la fonction dont il s'agit, a, b, c,... étant les coefficients de la forme primitive, A, B, C,... ceux de la transformée, on aura $\varphi(A, B, C\ldots) = K \,.\, \varphi(a, b, c, \ldots)$

Si l'on parvient à démontrer qu'une équation telle que $\varphi(a, b, c, \ldots) = 0$ représente une propriété géométrique des points du système donné, propriété indépendante de la position des points fondamentaux, il est clair qu'on aura démontré par cela même que $\varphi(a, b, c, \ldots)$ est un invariant. Car on aura aussi $\varphi(A, B, C, \ldots) = 0$ après la transformation linéaire; donc $\varphi(A, B, C, \ldots)$ qui est fonction implicite de a, b, c,... et aussi de α, β, α', β', doit contenir en facteur $(a, b, c, \ldots)$. Certaines fonctions, renfermant à la fois les coefficients de la forme et les variables x, y, jouissent aussi de la propriété d'invariance ; φ désignant le symbole opératoire d'une pareille fonction, on a

$$\varphi(A, B, C, \ldots X, Y) = K \,.\, \varphi(a, b, c, \ldots x, y),$$

K étant un facteur indépendant des coefficients et des variables. Ces fonctions, appelées *covariants*, sont de nouvelles formes qui, égalées à zéro, représentent des groupes

de points liés au système des points donnés par des relations géométriques indépendantes des points fondamentaux.

Nous allons étudier les invariants et les principaux covariants de la forme binaire du quatrième degré par des procédés tout à fait élémentaires.

II. — Résolution et discussion de l'équation du quatrième degré.

La forme du quatrième degré, que nous écrirons

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4,$$

possède deux invariants, l'un du second, l'autre du troisième degré par rapport aux coefficients. Ils se présentent d'eux-mêmes, comme on va le voir, lorsqu'on cherche à résoudre l'équation $f = 0$, et jouent un rôle capital dans la discussion des racines.

Une des méthodes les plus usitées pour la résolution de l'équation du quatrième degré, celle de Ferrari, consiste à compléter le carré dont $a^2x^4 + 4abx^3y$ sont les deux premiers termes, et à écrire, après avoir multiplié tous les termes par a.

$$(ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - y^2[x^2(4b - 6ac + 2a\lambda) + 2xy(2b\lambda - 2ad) + y^2(\lambda^2 - ae)] = 0. \quad (1)$$

En exprimant que le second polynôme entre crochets est un carré parfait, on obtient une équation du troisième degré en λ, dont chaque racine fournit une décomposition de la forme donnée en deux facteurs quadratiques.

Cette équation en λ est

$$\lambda^3 - 3c\lambda^2 + \lambda(4bd - ae) + 3ace + 2b^2c - 2ad^2 = 0. \quad (2)$$

En faisant disparaître le second terme par la substitution $\lambda = \mu + c$, on obtient

$$\mu^3 - \mu(ae - 4bd + 3c^2) + 2(ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3) = 0.$$

Nous poserons dorénavant

$$ae - 4bd + 3c^2 = I$$

$$ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3 = J$$

et nous écrirons ainsi l'équation résolvante :

$$\mu^3 - I\mu + 2J = 0. \quad (3)$$

Les fonctions I et J sont les deux invariants fondamentaux de la forme du quatrième degré ; il sera démontré un

eu plus loin que ces fonctions jouissent de la propriété de invariance.

Puisque à chaque racine de l'équation (2) correspond un mode de décomposition de la forme du quatrième degré, si cette équation a une racine double, la forme ne pourra se décomposer que de deux manières distinctes : elle aura donc un facteur double. Il résulte de là que $I^3 - 27J^2 = 0$ est la condition pour que l'équation $f = 0$ ait deux racines égales ; l'expression $I^3 - 27J^2$, qui est le discriminant du polynôme $\mu^3 - I\mu + 2J$, est aussi le discriminant de la forme f, ou du moins ne peut en différer que par un facteur.

On constate aisément que ce facteur est l'unité. Effectivement, si l'on forme le discriminant de f en éliminant x et y entre les deux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ par la méthode de Sylvester, on trouve

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

Le terme principal a^3e^3 de ce déterminant se retrouve dans l'expression $I^3 - 27J^2$, ce qui suffit pour démontrer notre assertion.

Lorsqu'on a à la fois $I = 0$, $J = 0$, la résolvante a une racine triple nulle ; cela veut dire qu'on ne peut décomposer la forme en deux facteurs quadratiques que d'une seule manière (en prenant $\lambda = c$) ; donc $f = 0$ a aussi une racine triple, qui peut même être quadruple.

Quand f admet un facteur linéaire quadruple, on doit avoir $b^2 = ac$, $bc = ad$, $bd = ae$, ou simplement une seule de ces trois conditions, avec $I = 0$ et $J = 0$.

Enfin lorsque f a deux facteurs doubles, il faut joindre à l'évanouissement du discriminant une deuxième condition qui peut être mise sous différentes formes. Une des plus simples est $ad^2 - b^2e = 0$, comme il est facile de s'en assurer en exprimant que f est le carré d'un polynôme du second degré. On reconnait aussi très facilement que les deux ra-

cines doubles de $f = 0$ sont réelles, si $b^2 - ac > 0$, imaginaires si $b^2 - ac < 0$.

Supposons maintenant que le discriminant soit différent de zéro. Il n'y a pas de racine double, et trois cas peuvent se présenter :

1° Les quatre racines sont réelles; alors il est évident que le polynôme f peut être décomposé de trois manières en facteurs du second degré à coefficients réels.

2° Deux racines sont réelles, les deux autres sont imaginaires; en désignant ces racines par γ, δ, $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, on aura les trois décompositions suivantes :

$$(x - \gamma y)(x - \delta y) \times (x - y(\alpha + \beta i))(x - y(\alpha - \beta i))$$
$$(x - \gamma y)(x - y(\alpha + \beta i)) \times (x - \delta y)(x - y(\alpha - \beta i))$$
$$(x - \gamma y)(x - y(\alpha - \beta i)) \times ((x - \delta y)(x - y(\alpha + \beta i))$$

La première est à coefficients réels; les deux autres sont à coefficients imaginaires, et il est facile de voir que les coefficients de ces deux dernières décompositions sont imaginaires conjugués.

3° Les quatre racines sont imaginaires; on verra, comme dans le cas précédent, qu'une des trois décompositions est à coefficients réels; les deux autres ont leurs coefficients imaginaires, mais ils ne sont pas conjugués.

Ces remarques étant faites, supposons que l'on ait $I^3 - 27 J^2 < 0$; la résolvante en μ aura une racine réelle et deux imaginaires. L'équation du 4e degré aura deux racines réelles et deux imaginaires. En effet, si l'on porte dans l'équation (1) les valeurs de λ qui répondent aux valeurs imaginaires de μ, on aura évidemment deux décompositions en facteurs du second degré à coefficients imaginaires, et ces coefficients seront conjugués. Quant à la valeur réelle de μ, elle ne peut donner que des facteurs réels, une au moins des trois décompositions étant réelle. Nous sommes donc dans le deuxième des trois cas examinés tout à l'heure; il y a deux racines réelles, deux imaginaires.

Supposons maintenant que l'on ait $I^3 - 27 J^2 > 0$. La résolvante en μ aura ses trois racines réelles; l'équation du 4e degré aura ses quatre racines réelles ou ses quatre racines imaginaires. Pour lever l'ambiguïté, il faut consulter le

signe du coefficient $4b^2 - 6ac + 2a\lambda$ dans l'équation (1). Toute valeur de λ qui rend ce coefficient positif donne une décomposition réelle, toute valeur qui le rend négatif donne une décomposition en facteurs imaginaires, puisque. alors, le premier membre de (1) est la somme de deux carrés. Dans le cas actuel il peut arriver : ou bien que les trois valeurs réelles de λ rendent positive la quantité $4b^2 - 6ac + 2a\lambda$, et alors l'équation $f = 0$ a ses quatre racines réelles ; ou bien qu'une seule des trois valeurs rende cette quantité positive, alors $f = 0$ a ses quatre racines imaginaires.

Remarque. — Il résulte de la discussion précédente qu'une au moins des trois racines de la résolvante satisfait toujours à la condition $4b^2 - 6ac + 2a\lambda > 0$ ou, en remplaçant λ par $\mu + c$: $2b^2 - 2ac + a\mu > 0$. Le fait est facile à vérifier.

Remplaçons dans le premier membre de l'équation (2) μ par $\frac{2ac - 2b^2}{a}$; nous obtenons, toutes réductions faites,

$$-\frac{2}{a^3}\left[a^4 d^2 + d(4a^2 b^3 - 6a^3 bc) + 4b^6 - 12ab^4c + 9a^2b^2c^2\right]$$

ou bien
$$-\frac{2}{a^3}\left[a^2 d + 2b^3 - 3abc\right]^2,$$

résultat essentiellement négatif, puisque a est toujours supposé positif. Comme les substitutions de $+\infty$ et de $\frac{2ac - 2b^2}{a}$ à la place de μ dans la résolvante donnent des résultats de signes contraires, il y a une ou trois racines comprises entre $+\infty$ et $\frac{2ac - 2b^2}{a}$, et par suite une au moins des trois racines de la résolvante satisfait à la condition $2ac - 2b^2 + a\mu > 0$.

Pour lever l'ambiguïté qui se présente lorsque le discriminant est positif, sans calculer les racines de la résolvante, il faut recourir aux fonctions de Sturm ; nous allons exprimer ces fonctions au moyen des invariants I et J.

On trouve d'abord pour la suite de Sturm :

$$f = ax^4 + 4bx^3y + \ldots$$
$$V_1 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$
$$V_2 = 3x^2(b^2 - ac) + 3xy(bc - ad) + y^2(bd - ae)$$
$$\begin{aligned}V_3 = x[(b^2 - ac)(9ac^2 - 9b^2c + abd - a^2e) \\ + 3(bc - ad)(3b^3 - 4abc + a^2d)] \\ + y[(bd - ae)(3b^3 - 4abc + a^2d) - 3d(b^2 - ac)^2] \\ = Ax + By\end{aligned}$$
$$V_4 = A^2(ae - bd) + 3AB(bc - ad) - 3B^2(b^2 - ac).$$

Les polynômes A et B s'expriment au moyen de I et de J. Ainsi

$$A = 6ab^2c^2 - 8ab^3d + 15a^2bcd - 9a^2c^3 - a^2b^2e + a^3ce - 3a^3d^2$$
$$= 3a^2(ace + 2bcd - b^2e - ad^2 - c^3) + 6ab^2c^2 - 8ab^3d$$
$$- 2a^3ce + 8a^2bcd + 2a^2b^2e - 6a^2c^3$$
$$= 3a^2J + 2aI(b^2 - ac).$$

Comme a est supposé positif, on peut diviser par a et prendre $$A = 3aJ + 2I(b^2 - ac).$$

De même on trouve $B = 3bJ + I(bc - ad)$.

Quant à la dernière fonction V_4, elle est nécessairement égale au discriminant de f multiplié par un facteur, puisque $V_4 = 0$ exprime qu'il y a un facteur commun du premier degré entre f et f'_x. C'est ce qu'on peut vérifier en remplaçant A et B par leurs valeurs ; il vient alors

$$V_4 = 9J^2(a^2e + 6ab^2c - 4a^2bd - 3b^4)$$
$$+ [3aIJ + J^2(b^2 - ac)][4(b^2 - ac)(ae - bd) + 3(bc - ad)^2]$$
$$= 9J^2(a^2I - 3(b^2 - ac)^2) + (3aIJ + I^2(b^2 - ac))(I(b^2 - ac) - 3aJ)$$
$$= (b^2 - ac)^2(I^3 - 27J^2).$$

En supprimant le facteur positif $(b^2 - ac)^2$, on peut prendre $V_4 = I^3 - 27J^2$.

Supposons maintenant $I^3 - 27J^2 > 0$. Pour que l'équation ait quatre racines réelles, il faut que les coefficients des premiers termes de la suite de Sturm soient positifs ; on a ainsi les deux conditions

$$b^2 - ac > 0, \quad 3aJ + 2I(b^2 - ac) > 0.$$

Si ces deux quantités sont de signes contraires ou si toutes deux sont négatives, l'équation a ses quatre racines imaginaires.

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION

Quatre racines réelles $\quad I^3 - 27J^2 > 0, \quad b^2 - ac > 0,$
$\qquad 3aJ + 2I(b^2 - ac) > 0$

Quatre racines imaginaires $I^3 - 27J^2 > 0$ $\quad$ une au moins des des deux quantités $b^2 - ac$ et $3aJ + 2I(b^2 - ac)$ négative :

Deux racines réelles et deux imaginaires	$I^3 - 27J^2 < 0$	
Une racine double	$I^3 - 27J^2 = 0$	
Une racine triple	$I = 0, \quad J = 0$	
Une racine quadruple	$I = 0, \quad J = 0, \quad b^2 - ac = 0$	
Deux racines doubles	$I^3 - 27J^2 = 0$ $ad^2 - b^2e = 0$	(réelles, si $b^2 - ac > 0$, imaginaires si $b^2 - ac < 0$).

(A suivre.)

LIEU GEOMÉTRIQUE (*)

Par M. **Toqué**, élève au Lycée Charlemagne.

On considère une asymptote d'une hyperbole, un point fixe P *par lequel passe l'hyperbole: l'un des foyers est constamment situé sur la perpendiculaire menée de* P *sur l'asymptote. Lieu du point d'intersection de la deuxième asymptote avec la directrice qui correspond au foyer donné.*

Prenons pour Oy l'asymptote donnée, pour Ox la perpendiculaire abaissée du point fixe P sur l'asymptote. On sait que la directrice s'obtient en abaissant du foyer une perpendiculaire sur l'asymptote; donc l'origine est un point de la directrice, qui par suite a pour équation $y - mx = 0$. Soit λ l'abscisse du foyer; l'équation de l'hyperbole, en mettant en évidence le foyer et la directrice, et en tenant compte de ce que Oy est asymptote, est

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = (y - mx)^2;$$

ou

$$(m^2 - 1)x^2 + 2\lambda x - 2mxy - \lambda^2 = 0.$$

Exprimant que l'hyperbole passe par P, et posant $OP = d$, on a

$$(m^2 - 1)d^2 + 2\lambda d - \lambda^2 = 0. \qquad (1)$$

La directrice est

$$y = mx. \qquad (2)$$

Enfin le faisceau parallèle aux asymptotes mené par l'origine est $x[(m^2 - 1)x - 2my] = 0$.

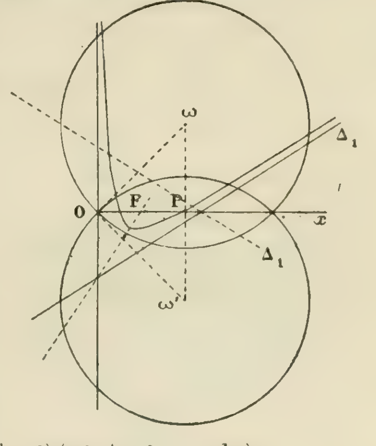
(*) Question proposée à quelques candidats à l'École polytechnique, 1881.

Cherchons le centre de l'hyperbole; il est donné par

$$\begin{cases} x = 0 \\ (m^2 - 1)x + \lambda - my = 0 \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = 0 \\ my = \lambda \end{cases}$$

La deuxième asymptote a donc pour équation

$$(m^2 - 1)x - 2my + 2\lambda = 0. \quad (3)$$



On aura l'équation dulieu en éliminant m, et λ entre (1), (2) et (3) donne

$$2\lambda = \frac{2y^2}{x} - \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)x \quad (3)$$

ou $$\lambda = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Substituant dans (1), on a

$$d^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = \frac{x^2 + y^2}{2x}\left[\frac{x^2 + y^2}{2x} - 2d\right],$$

ou $$4d^2(y^2 - x^2) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4dx).$$

Ordonnons par rapport à $x^2 + y^2$; nous avons

$$(x^2 + y^2)^2 - 4dx(x^2 + y^2) - 4d^2(y^2 - x^2) = 0.$$

En résolvant nous avons

$$x^2 + y^2 = 2dx \pm 2dy.$$

Le lieu se compose donc d'un système de deux cercles, dont les centres ont pour coordonnées $\begin{cases} x = d \\ y = d \end{cases}$ $\begin{matrix} x = d \\ y = -d \end{matrix}$

On a ainsi les points ω et ω', obtenus en élevant en P une perpendiculaire à Ox, et prenant $P\omega = P\omega' = PO$. Ces deux cercles passent par l'origine; ils sont orthogonaux.

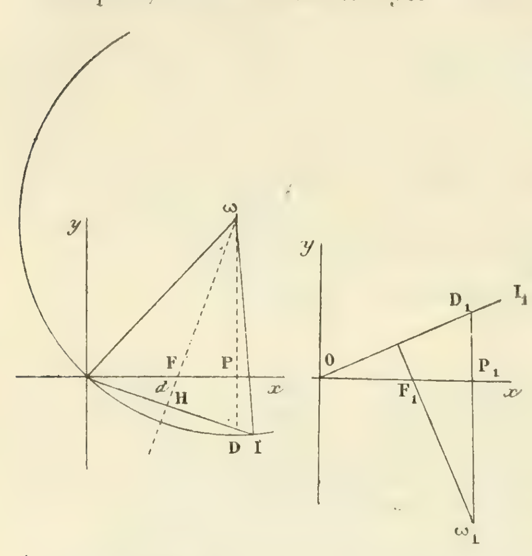
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

Nous avons trouvé deux cercles, mais cela tient à ce que pour une portion déterminée de F on peut choisir. au lieu de l'asymptote Δ_1, la symétrique Δ_2 par rapport à Ox.

Pour trouver géométriquement le lieu, nous nous appuierons sur le théorème suivant ;

Tout point d'une hyperbole est équidistant du foyer et de la directrice, la distance à la directrice étant comptée parallèlement à une asymptote.

Cela posé, donnons-nous le foyer F sur Ox; alors l'hyperbole est bien déterminée; il s'agit de la construire, sachant qu'elle passe par P, et que Oy est une asymptote. Menons par P une parallèle à Ox, et prenons $PD = PF$. Joignant OD, ce sera la directrice, et la perpendiculaire FH, abissée de F sur la directrice, est l'axe



de l'hyperbole. Soit ω le point où l'axe rencontre DP. Les triangles rectangles $FP\omega$, DPO sont égaux, et par suite $P\omega = PO$. Donc le point ω, où l'axe rencontre la verticale $P\omega$, est un point fixe, quelle que soit l'hyperbole considérée. D'ailleurs, comme le point I cherché est le symétrique de O par rapport à H, on a $\omega I = \omega O$, et le lieu de de I est la circonférence de centre ω, de rayon ωI.

Nous avons obtenu cette hyperbole en comptant PD au-dessous de Oy; on a ainsi la figure 1. En portant PD au-dessus de Ox, on a la figure 2, qui n'est autre chose que la figure 1, qu'on a fait tourner de 180° autour de Ox. Il en sera donc de même pour le lieu. Le lieu du point I est la circonférence déjà trouvée; celui de I_1 est cette circonférence, qu'on a fait tourner de 180° autour de Ox comme charnière.

On peut faire varier la distance de F à l'origine depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Comme positions particulières, prenons

le foyer en O; l'hyperbole se réduit alors aux deux axes Ox et Oy, et le point correspondant du lieu est le point O.

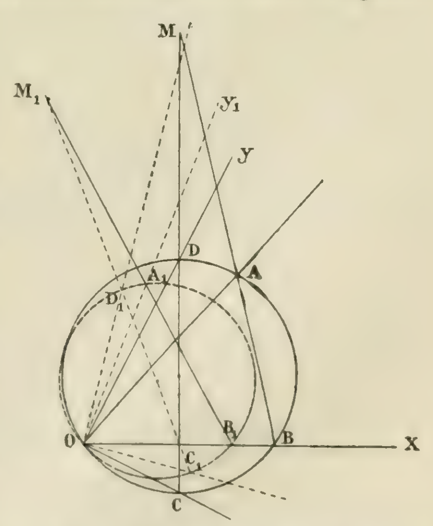
Plaçant le foyer en P, l'hyperbole devient une droite double parallèle à Oy menée par P, et le point correspondant du lieu est le symétrique de O par rapport à P.

QUESTION 382

Solution par M. Tranié, élève au Lycée de Toulouse,

Si les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de cette droite décrit une ellipse; démontrer que l'aire de cette ellipse est indépendante de l'angle des deux droites. (Steiner.)

Soient Ox, Oy les deux droites, AB la droite de longueur constante, M le point de cette droite qui décrit l'ellipse considérée.



On démontre dans les cours que, l'angle xOy étant constant, le cercle OBA est de grandeur constante, et que le mouvement de la droite AB peut être remplacé par celui du diamètre de ce cercle passant par le point M. Soit DC ce diamètre. Le point M engendre une ellipse dont les axes sont dirigés suivant OC et OD, et dont les longueurs sont MD et MC. Cette ellipse a une aire égale à π . MC. MD.

Supposons que l'angle des droites Ox, Oy varie et devienne xOy_1 : soient $A_1B_1 = AB$, $M_1A_1 = MA$; traçons le cercle oA_1B_1 et le diamètre $M_1D_1C_1$.

L'aire de la nouvelle ellipse, décrite par le point M_1, a pour expression $\pi . M_1D_1 \times M_1C_1$.

Or $M_1C_1 . M_1D_1 = M_1A_1 . M_1B_1 = MA . MB = MC . MD$.

Donc la surface reste constante.

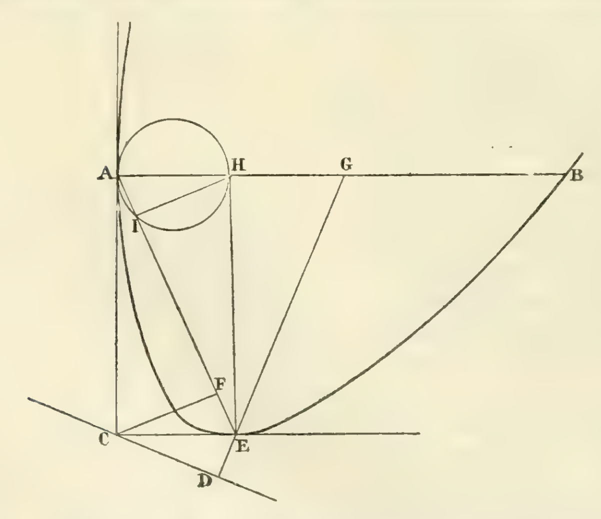
NOTA. — La même question a été résolue par M. Dupuy, à Grenoble.

QUESTION 387

Solution par M. Paul BOULOGNE, élève au Lycée Saint-Louis.

Lieu des foyers de paraboles qui rencontrent en deux points fixes A *et* B *une droite, et qui sont normales en* A *à cette droite. On propose de vérifier géométriquement le résultat trouvé.*

Prenons AB pour axe des x ; la perpendiculaire en A à cette



droite pour axe des y, et appelons b la distance AB. L'équation générale des paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé est $(x + Cy)^2 - bx = 0$.

Pour avoir le lieu des foyers, écrivons que dans l'équation,

$$4[(x_1 + 4Cy_1)^2 - bx_1][(x + Cy)^2 - bx] -$$
$$[x(2(x_1 + Cy_1) - b) + 2Cy(x_1 + Cy_1) - bx_1]^2 = 0$$

le coefficient du rectangle est nul, et ceux des carrés égaux, nous aurons, après simplifications,

$$Cy_1 - x_1 = 0$$
$$4C^2x_1 + 4Cy_1 - b = 0$$

et en éliminant C entre ces deux équations, nous aurons celle du lieu : $4x^3 + 4xy^2 - by^2 = 0$;

d'où on tire $y = \pm x \sqrt{\dfrac{x}{\dfrac{b}{4} - x}}$.

On reconnaît une cissoïde de Dioclès ayant l'origine pour pôle, l'axe des x pour axe et pour asymptote la parallèle à l'axe des y menée au quart de AB à partir de A.

Géométriquement, soit une parabole satisfaisant à l'énoncé. Par le point C où la tangente en A rencontre la directrice menons une parallèle à AB. Elle est tangente à la parabole en un point E. Le diamètre passant par le point E rencontre AB en son milieu G. De plus AE passe par le foyer: mais alors les angles GAE, EGA sont égaux d'après la propriété de la normale. Donc la hauteur EH a son pied au milieu de AG. On sait aussi que CF est perpendiculaire sur AE. Les triangles rectangles CFE, AIH sont égaux comme équiangles et ayant les hypoténuses égales: donc AI = FE, et la droite HE étant fixe, le point F décrit la cissoïde définie plus haut.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Andrieu, à Rouen; Baron, à Sainte-Barbe.

QUESTION 395

Solution par Paul Boulogne, élève au lycée Saint-Louis.

Par un point (α, β) *extérieur à une ellipse on mène les tangentes* PA *et* PB *à cette ellipse. Par le point* I, *intersection des normales en* A *et* B *on mène les deux autres normales* IC *et* ID;

enfin aux points C *et* D *qui sont les pieds sur la courbe des deux dernières normales, on mène les tangentes* CM, DM, *qui se rencontrent en* M. *On demande : 1° d'exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de celles du point* P ; *2° de trouver l'équation du lieu du point* M *quand le point* P *se déplace de façon que les premières normales* AI *et* BI *fassent entre elles un angle droit.*

Soient α', β' les coordonnées du point M. Les droites AB, CD, polaires de P et de M, ont pour équations

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0$$

et

$$\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation de la conique passant par le centre et par A, B, C, D est

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Or cette courbe, on le sait, est une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes, dont les coefficients de x^2 et de y^2 sont nuls, ce qui donne

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\alpha\alpha'}{a^4} = 0$$

et

$$\frac{1}{b^2} + \frac{\beta\beta'}{b^4} = 0.$$

D'où on déduit

$$\alpha' = -\frac{a^2}{\alpha}, \quad \beta' = -\frac{b^2}{\beta}.$$

Si l'angle AIB est droit, l'angle APB est aussi droit, et quand I se déplace de façon que AIB soit droit, P décrit le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, lieu des angles droits dont les côtés sont tangents à l'ellipse; mais on a

$$\alpha = -\frac{a^2}{\alpha'}, \quad \beta = -\frac{b^2}{\beta'} :$$

donc le point M décrira le lieu

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = a^2 + b^2,$$

courbe du quatrième degré composée de quatre branches infinies asymptotes aux droites

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

REMARQUE. — Cette seconde partie n'est pas autre chose que la question 329.

QUESTIONS PROPOSÉES

15. — Trouver l'équation du cône ayant pour sommet le centre d'une surface du second ordre, et admettant pour génératrice les trois axes de coordonnées rectangulaires et les trois axes de la surface. *(Ed. Lucas.)*

16. — Ayant posé

$$\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + c_1z = P_1 & a_1x + a_2y + a_3z = Q_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = P_2 & b_1x + b_2y + b_3z = Q_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = P_3 & c_1x + c_2y + c_3z = Q_3 \end{array}$$

avec
$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

et supposant d'ailleurs δ différent de zéro, on demande de démontrer que les deux ellipsoïdes

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1$$
$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$$

sont égaux. *(Jacobi.)*

17. — Les conditions étant celles de la question précédente, on demande de trouver l'équation du cône contenant les axes des deux surfaces.

18. — Trouver le lieu du point dont la distance à une ligne fixe est dans un rapport donné avec la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes.

(The Educat. Times.)

19. — On donne un cercle C; par un point A de ce cercle, on élève une perpendiculaire AB à son plan. On mène une

sécante AM qui coupe le cercle en M ; sur AB, de part et d'autre de A, on prend AP = AP′ = AM ; on mène les lignes MP et MP′ et on demande :

1° Le lieu des droites MP et MP′, quand le point M décrit le cercle. Sections planes parallèles au plan du cercle.

2° Par chaque point P de la droite AB il passe deux génératrices PM et PM′ de la surface. Le plan de ces génératrices coupe la surface suivant une conique dont on demande l'équation, le lieu des foyers, des centres et des sommets.

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que la solution de chaque question doit être mise sur une feuille à part portant le numéro de la question, le nom de l'auteur de la solution, l'établissement auquel il appartient et l'énoncé complet de la question. Les figures, s'il y a lieu, doivent être faites à part, avec beaucoup de soin ; enfin, nous prions nos correspondants de soigner la rédaction et l'écriture de leurs solutions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 9820-2.

TRANSFORMATIONS RÉCIPROQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 49, 77 et 97.)

17. — La transformation que nous étudions appartient au genre des transformations de *Magnus*; elles sont définies par les formules
$$x = \frac{U}{W}, \qquad y = \frac{V}{W},$$
U, V, W étant des fonctions du second degré en X, Y. Dans les transformations de cette espèce, à une courbe *f*, de degré *m*, correspond, en général, et comme nous l'avons fait remarquer plus haut, une courbe F, de degré $2m$. Mais la courbe F peut être d'un degré moindre et nous nous proposons d'indiquer maintenant les causes qui font abaisser le degré de la transformée. Nous ferons voir ainsi comment, par suite de cet abaissement, nous avons été conduit à la construction de l'ellipse, point par point, au moyen d'une équerre, construction que nous avons exposée au début de ce travail.

18. — Pour plus de clarté dans les développements qui vont suivre, nous rappelons que nous avons nommé *pôle principal* celui des deux points donnés d'où partent les rayons vecteurs; le second point donné pour cette transformation sera nommé *pôle secondaire*. Les axes de coordonnées sont, comme précédemment, la ligne des pôles qui est prise pour axe des x, et la perpendiculaire élevée à cette droite au milieu de la ligne des pôles.

19. Théorème. — *Lorsque la courbe* f *passe par le pôle principal, le degré de la courbe transformée* F *est abaissé d'une unité.*

Les formules établies plus haut (p. 78)

$$(A)\left\{\begin{aligned} \frac{x}{d} &= \frac{Y^2 - X^2 + d^2}{d^2 - X^2 - Y^2} \\ \frac{y}{d} &= \frac{2Y(d - X)}{d^2 - X^2 - Y^2} \end{aligned}\right.$$

donnent
$$\frac{y}{x+d}=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+d},$$
formule qui a d'ailleurs servi à les établir.

Si la courbe f passe par le pôle principal, on a
$$yf_1(x, y) = (x+d)\, f_2(x, y), \qquad (1)$$
f_1 et f_2 étant des fonctions entières en x et y, l'une et l'autre de degré $(m-1)$, tout au plus, en supposant f de degré m.

Or, si dans une fonction entière $\varphi(x, y)$, de degré m, on remplace x et y par les formules de Magnus
$$x=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}}, y=\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{W}},$$
$\varphi(x, y)$ devient $\dfrac{\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\mathrm{W}^m}$, Φ étant en général de degré $2m$, dans tous les cas, Φ ne peut pas être d'un degré supérieur.

D'après cette remarque, l'équation (1) deviendra
$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}+d}\,\frac{\mathrm{F}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\mathrm{W}^{m-1}}=\frac{\mathrm{F}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\mathrm{W}^{m-1}},$$
F_1 et F_2 étant de degré $(2m-2)$. L'équation transformée
$$\mathrm{YF}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\mathrm{X}+d)\mathrm{F}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$
est donc de degré $(2m-1)$ seulement. On voit aussi que cette courbe passe par le pôle principal.

20. — Théorème. — *Si la courbe* f *passe par le pôle secondaire, le degré de la courbe transformée* F *est abaissé d'une unité.*

Les formules (A) donnent
$$\frac{y}{x-d}=\frac{\mathrm{X}-d}{\mathrm{Y}} \quad (*)$$

Si la courbe f, qu'on transforme, passe par le pôle secondaire, son équation peut s'écrire
$$yf_1(x, y) = (x-d)f_2(x, y)$$
et, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir le théorème précédent, on voit que le degré de la transformée F est seulement égal à $(2m-1)$.

21. — Théorème. — *Si la courbe qu'on transforme* f, *passe par le pôle secondaire, normalement à la ligne des pôles, le degré de la transformée est abaissé de deux unités.*

(*) Voir p. 78.

L'équation de f est alors

$$y^2 f_1(x, y) = (x - d) f_2(x, y).$$

Les formules (A) donnent d'ailleurs

$$\frac{y^2}{d(x-d)} = \frac{2(X-d)^2}{W}$$

en posant, $$W = d^2 - X^2 - Y^2.$$

D'autre part, et d'après la remarque que nous avons faite tout à l'heure, $f(x, y)$ devient $\frac{F_1(X, Y)}{W^{m-2}}$; et, puisque f_1 est de degré $(m - 2)$ seulement, F_1 est de degré $(2m - 4)$. De même $f_2(x, y)$ devient $\frac{F_2(X, Y)}{W^{m-1}}$, F_2 étant de degré $(2m - 2)$.

L'équation transformée est donc

$$\frac{2d(X-d)^2}{W} \cdot \frac{F_1(X, Y)}{W^{m-2}} = \frac{F_2(X, Y)}{W^{m-1}}$$

ou $$2d(X - d)^2 F_1(X, Y) = F_2(X, Y).$$

Ce que nous venons de dire du degré des fonctions F_1 et F_2 prouve que cette équation est seulement de degré $(2m - 2)$.

22. — Corollaire I. — *A une courbe de degré* m *on peut, à volonté, faire correspondre des courbes de degré* 2m, (2m — 1), (2m — 2), *ou enfin* (2m — 3).

23. — Corollaire II. — *A une conique on peut faire correspondre une quartique, une cubique, une conique, ou une droite suivant le choix que l'on fait des pôles.*

24. — On comprend maintenant comment, en disposant des pôles conformément à la remarque précédente, on peut faire correspondre une droite à une conique et construire celle-ci point par point au moyen d'une équerre.

En faisant passer la conique: 1° par le pôle principal; 2° par le pôle secondaire; 3° normalement à la ligne des pôles en ce point, la transformée qui est au plus de degré 4, s'abaisse de trois unités. Ainsi à la conique correspond une droite. Si de plus on fait passer la conique par le pôle principal, mais normalement à la ligne des pôles, la symétrie exige que la droite transformée soit perpendiculaire à la

ligne des pôles; et c'est ainsi qu'en cherchant à favoriser, *autant qu'il est possible,* la transformation d'une conique, dans ce système de transformation, nous avons trouvé la construction que nous venons de rappeler.

25. — Au cercle décrit sur la ligne des pôles comme diamètre correspond la droite de l'infini. Si l'on considère des cercles passant par le pôle secondaire, ayant leur centre sur la ligne des pôles, mais ne passant pas par le pôle principal, la transformée est nécessairement une conique (21). Il est facile de reconnaître soit par la géométrie, soit au moyen des formules de transformation, que cette transformée est un cercle. Le pôle principal est le centre de similitude de ces deux cercles, qui sont d'ailleurs tangents l'un à l'autre au pôle secondaire.

26. — **Théorème.** — *A une conique Δ, passant par les deux pôles, correspond une conique Δ' qui, elle aussi, passe par ces points et ces deux courbes jouissent de cette propriété, que si l'on fait tourner les axes de l'une de 45°, ils deviennemt parallèles à ceux de la seconde conique.*

En effet à la conique Δ

$$x^2 - d^2 = y\,(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

correspond la conique Δ'

$$X^2 - d^2 = Y\,(\alpha' X + \beta' Y + \gamma')$$

en posant

$$-\alpha' = 2d\,\frac{\beta + 1}{\alpha d + \gamma},$$

$$\beta' = \frac{\alpha d - \gamma}{\alpha d + \gamma},$$

$$\gamma' = \frac{2d^2\,(\beta - 1)}{\alpha d + \gamma},$$

et l'on peut facilement vérifier que les axes de la première sont parallèles aux bissectrices des axes de la seconde.

27. — *Construction des axes et des sommets d'une conique Δ définie par cinq points.*

Parmi les cinq points donnés, nous en distinguons un en particulier, le point O', qui sera le pôle secondaire de notre transformation. On peut, par le théorème de Pascal, déterminer, avec une règle, la tangente à Δ au point O' et, avec

une équerre, la normale qui sera prise pour ligne des pôles. Cette droite rencontre la conique en un point O, que le théorème de Pascal permet encore de déterminer. C'est le point O qui sera le pôle principal.

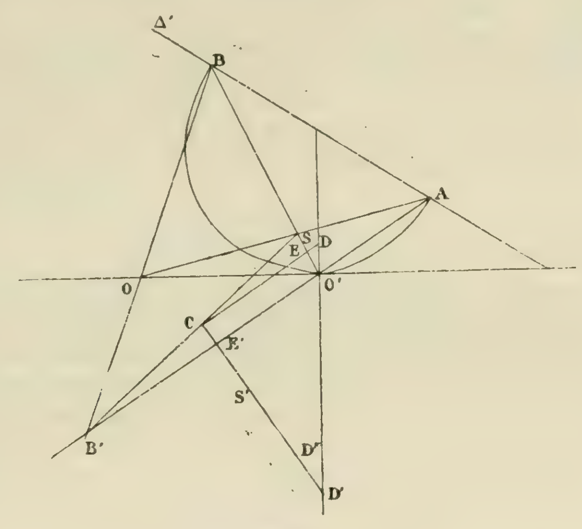


Fig. 7.

Si maintenant avec ces points O et O' on transforme les points donnés, et il y en a quatre indépendamment de O', on obtiendra quatre points en ligne droite; soit Δ' cette droite transformée de Δ.

Aux cercles qui sont bitangents à Δ et dont l'un des points de contact est le point O' correspondent des cercles tangents à Δ' et coupant O'O normalement au point O' (25). On obtient ainsi, et comme l'indique la figure, les deux cordes principales O'A', O'B', du point O'. On détermine donc, par cette construction simple, le centre C, et les axes en position sont les droites CD, CD'.

Pour trouver les sommets, il faut observer que l'on a les relations, S, S' étant les points inconnus

$$\overline{CS}^2 = CD.CE, \qquad \overline{S'C}^2 = CE'.CD',$$

qui permettent de les obtenir facilement.

28. — *Détermination du cercle de courbure en un point d'une conique définie par cinq points.*

Si l'on considère le cercle U de courbure au point O′, ce cercle se transforme en un cercle U′, qui passe par O′ normalement à O′O et qui, pour des raisons évidentes, passe aussi par le point commun à Δ′ et à OO′ Le cercle U est en

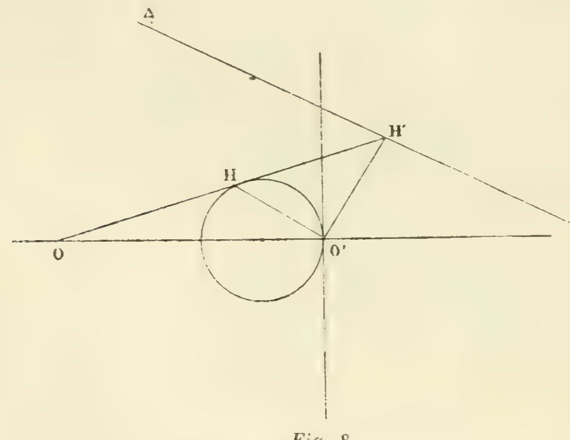


Fig. 8.

effet caractérisé par cette propriété que trois de ses points d'intersection avec Δ sont confondus en O′. Il faut donc que le cercle transformé U′ rencontre Δ′ en deux points dont l'un est confondu avec le point de rencontre de Δ′ et de OO′.

Quant à l'autre point, il coïncide donc d'après cette remarque avec la projection de O′ sur Δ′. Soit H′ ce point (*fig. 8*); en transformant H′ le point H appartient au cercle de courbure qui est donc déterminé par le point H, et le contact en O′ avec la perpendiculaire à la ligne des pôles.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Pour déterminer le centre d'une conique dont l'équation en coordonnées cartésiennes est

$$f(x, y) = 0,$$

on prend habituellement l'intersection des deux droites dont les équations sont

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Mais cette règle pratique doit être entendue en ce sens que le centre est l'intersection de deux diamètres de la courbe; et il n'est pas indispensable de prendre les deux diamètres qui sont conjugués l'un à ox, l'autre à oy; souvent même l'équation de la conique peut fournir deux diamètres distincts dont l'emploi sera plus commode; nous indiquerons l'exemple suivant.

Désignons par A, B, et C les trois fonctions linéaires

$$ax + a'y + a'' = A$$
$$bx + b'y + b'' = B$$
$$cx + c'y + c'' = C$$

et supposons en outre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro; l'équation

$$\alpha^2A^2 + \beta^2B^2 + \gamma^2C^2 - 2\beta\gamma BC - 2\gamma\alpha CA - 2\alpha\beta AB = 0$$

est, pour chaque système de valeurs des paramètres α, β, γ, l'équation d'une conique inscrite au triangle dont les côtés ont pour équations respectives

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

proposons-nous de déterminer le centre de cette courbe.

L'équation de la conique peut s'écrire

$$(\alpha A + \beta B - \gamma C)^2 - 4\alpha\beta \cdot AB = 0,$$

ce qui met en évidence deux tangentes et leur corde de contact; si nous menons par le point de concours de ces deux

tangentes deux droites

$$\lambda A + \mu B = 0 \qquad (1)$$
$$\lambda A - \mu B = 0 \qquad (2)$$

et si la première est parallèle à la corde de contact, la seconde sera un diamètre; or, pour que les droites

$$\lambda A + \mu B = 0$$
$$\alpha A + \beta B - \gamma C = 0$$

soient parallèles, il faut la condition

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta - c\gamma & a'\alpha + b'\beta - c'\gamma \\ a\lambda + b\mu & a'\lambda + b'\mu \end{vmatrix} = 0.$$

qui devient, après calcul,

$$(n\beta + m\gamma)\lambda - (n\alpha + l\gamma)\mu = 0;$$

donc la droite (2) a pour équation

$$\begin{vmatrix} A & B \\ n\beta + m\gamma & n\alpha + l\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ou bien $\quad nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0.$

(Dans cette équation, nous avons posé

$$bc' - cb' = l$$
$$ca' - ac' = m$$
$$ab' - ba' = n.)$$

On trouvera, par une permutation tournante, l'équation d'un autre diamètre

$$(mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0;$$

donc enfin le centre est l'intersection des deux droites

$$\begin{cases} nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0, \\ (mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0. \end{cases}$$

Cela posé, si on demande le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent en outre par un point donné, ce lieu s'obtiendra de la manière suivante :

Désignons par A_1, B_1, C_1 les valeurs que prennent, pour le point donné, les fonctions linéaires A, B, C; puis éliminons α, β, γ entre les équations homogènes

$$\left[\begin{array}{l} nA\alpha - nB\beta + (lA - mB)\gamma = 0 \\ (mB - nC)\alpha + lB\beta - lC\gamma = 0 \\ \sqrt{\alpha A_1} \quad \sqrt{\beta B_1} + \sqrt{\gamma C_1} = 0 \end{array}\right.$$

Or les deux premières relations donnent comme valeurs proportionnelles de α, β, γ, les expressions suivantes:

$$l^2 A, \; m^2 B, \; n^2 C;$$

donc le lieu des centres a pour équation

$$\sqrt{A_1 l^2 . A} + \sqrt{B_1 m^2 . B} + \sqrt{C_1 n^2 . C} = 0;$$

ce qui nous apprend que le lieu est une conique qui passe par le point donné et est inscrite au même triangle que toutes les coniques dont elle contient les centres. Nous n'avions pas pour objet spécial d'indiquer ces résultats si faciles à prévoir par la géométrie des coniques; nous voulions seulement indiquer un procédé de recherche qui sera utile dans beaucoup d'autres questions.

Un abonné.

NOTE

SUR LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

Par M. **Aug. Daguillon**, élève de l'École normale supérieure.

Cet article a pour but de montrer comment la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques permet quelquefois de résoudre le problème de mener la tangente en un point d'une courbe algébrique.

Résolvons préalablement cette question :

Étant donnée l'équation d'une courbe f(x, y) = o, *les coordonnées* α *et* β *du pôle et la puissance* μ *d'inversion, trouver l'équation de la courbe inverse de la courbe donnée (les axes étant d'ailleurs rectangulaires).*

Soit M un point de la courbe donnée, de coordonnées x et y. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point P; les formules de transformation seront

$$x = x_1 + \alpha,$$
$$y = y_1 + \beta,$$

x_1 et y_1 désignant les nouvelles coordonnées du point P; et l'équation de la courbe deviendra

$$f(x_1 + \alpha, y_1 + \beta) = 0.$$

Si nous passons en coordonnées polaires, le pôle étant en

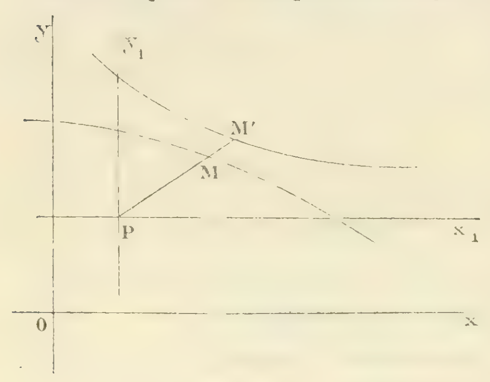
P et ox_1 étant l'axe polaire, au moyen des formules

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega,$$
$$y_1 = \rho_1 \sin \omega,$$

l'équation de la courbe prendra la forme

$$f(\rho_1 \cos \omega + \alpha, \rho_1 \sin \omega + \beta) = 0.$$

Soit M' le point correspondant au point M dans la courbe réciproque; ρ_1 désignant la distance PM, et ρ'_1 la distance PM', on a par définition



$$\text{PM . PM}' = \mu$$

c'est-à-dire $\rho_1\rho_1{}' = \mu$.

$$\text{d'où } \rho_1 = \frac{\mu}{\rho_1{}'}.$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$f\left(\frac{\mu \cos \omega}{\rho_1{}'} + \alpha, \frac{\mu \sin \omega}{\rho_1{}'} + \beta\right) = 0$$

et sous cette forme elle représente l'équation polaire de la courbe réciproque cherchée. Si nous voulons en avoir l'équation cartésienne, les formules de transformation seront

$$\cos \omega = \frac{x_1{}'}{\rho_1{}'} \quad \sin \omega = \frac{y_1{}'}{\rho_1{}'} \quad \rho_1{}'^2 = x_1{}'^2 + y_1{}'^2$$

et il viendra

$$f\left(\frac{\mu x_1{}'}{x'^2_1 + y_1{}'^2} + \alpha, \frac{\mu y'_1}{x_1{}'^2 + y_1{}'^2} + \beta\right) = 0.$$

Enfin, si nous revenons au premier système d'axes, cette équation se mettra sous la forme

$$f\left(\frac{\mu(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \alpha, \frac{\mu(y' - \beta)}{(x' - \alpha)^2 = (y' - \beta)^2} + \beta\right) = 0$$

On voit donc que, pour avoir l'équation de la courbe réciproque d'une courbe donnée, α et β étant les coordonnées du pole, μ la puissance d'inversion, il suffit de faire dans l'équation de la courbe donnée

$$x = \frac{\mu(x' - \alpha)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \alpha.$$

$$y = \frac{\mu(y' - \beta)}{(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2} + \beta.$$

x' et y' désignant les coordonnées d'un point quelconque de la courbe réciproque.

Dans le cas où le pôle est à l'origine des coordonnées, ces formules se simplifient :

$$x = \frac{\mu x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{\mu y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Ceci posé, on sait que si l'on considère deux points M et M de deux courbes inverses situés sur un même rayon vecteur, les tangentes en ces points font des angles égaux avec ce rayon vecteur. Si donc on peut construire simplement la tangente au point M, on en déduira aisément la tangente en M'. Prenons un exemple

Soit une parabole $y^2 - 2px = 0$. *Cherchons quelle en est l'inverse, le pôle étant au sommet de la parabole.*

Les formules de transformation seront

$$x = \frac{\mu x'}{x'^2 + y'^2} \quad y = \frac{\mu y'}{x'^2 + y'^2}$$

et la courbe réciproque aura pour équation

$$\frac{\mu^2 y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} = \frac{2p\mu x'}{x'^2 + y'^2}$$

ou
$$\mu y'^2 = 2px'(x'^2 + y'^2). \qquad (1)$$

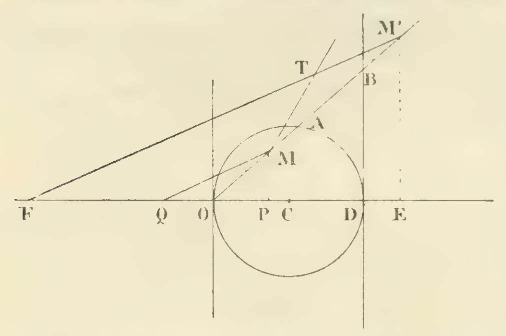
D'autre part, l'équation de la cissoïde définie par un cercle de rayon a, ayant son centre sur l'axe de la parabole, et passant en son sommet, celui-ci étant le point de rebroussement de la cissoïde, serait

$$2ay^2 = x(x^2 + y^2). \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) étant de même forme, on voit que la figure inverse de la parabole est une cissoïde. Inversement, si on se donne cette dernière courbe et le paramètre p d'une parabole, on peut toujours déterminer une puissance μ d'inversion telle que la cissoïde soit la figure inverse de la parabole; il suffit pour cela d'identifier les équations (1) et (2), ce qui donne

$$\frac{2p}{\mu} = \frac{1}{2a} \text{ d'où } \mu = 4pa.$$

Ayant alors construit un point M de la cissoïde, si l'on voulait déterminer la tangente en ce point, il suffirait de chercher sur le rayon vecteur OM le point correspondant M′ de la parabole, de mener en ce point la tangente à la parabole, et de faire en M avec MM′ un angle TMM′ = TM′M; mais ici il est bon de remarquer que, toutes les paraboles de même axe et de même sommet étant homothétiques, et ayant par suite des tangentes parallèles en leurs points homologues, on peut prendre arbitrairement le point M′ sur le prolongement de OM. La construction s'achève en abaissant M′E perpendiculaire sur OD, prenant OF = OE, et joignant M′F, ce qui donne la direction de la tangente à la parabole ; il suffit alors de faire TMM′ = TM′M pour avoir la tangente à la cissoïde.



En particulier, on peut supposer que le point M′ se confonde avec M ; alors la construction se réduit à ceci : prendre à gauche du point O une longueur OQ égale à l'abscisse du point M ; joindre QM et tracer la droite MT, symétrique de QM par rapport à OM.

Voici un nouvel exemple de l'application que l'on peut faire de la méthode d'inversion par rayons vecteurs réciproques au tracé des tangentes aux courbes algébriques.

On sait que la *lemniscate de Bernouilli* est le lieu des points tels que le produit des distances de chacun d'eux aux points fixes F et F′ soit égal au carré de la moitié de la longueur FF′.

L'équation de cette courbe, rapportée à la droite FF′ et à la perpendiculaire Oy élevée en son milieu, est la suivante :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

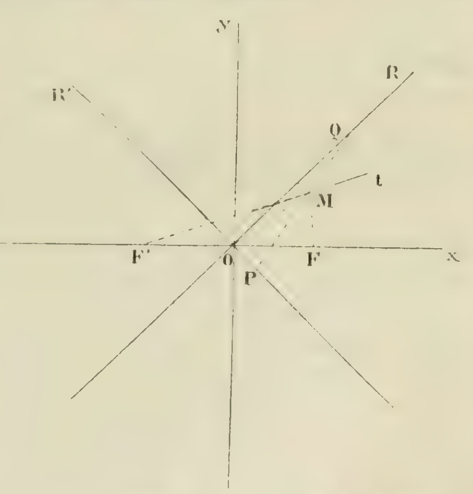
Prenons le point O pour pôle, et soit μ la puissance d'inversion ; la courbe réciproque de la lemniscate proposée aura, en vertu des formules de passage que nous avons indiquées dans un précédent article, pour équation

$$x^2 - y^2 - \frac{\mu^2}{2a^2} = 0.$$

Ce sera donc une hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Ceci nous conduit à la construction suivante :

Soit M un point de la lemniscate. Supposons (ce qui est toujours possible) que nous ayons choisi μ de telle sorte que le point M se confonde avec son inverse M′, et soient OR, OR′ les bissectrices des angles des axes, asymptotes de l'hyperbole à laquelle appartient M′. La tangente à l'hyperbole en ce point s'obtient facilement en menant une droite PMQ telle que PM = MQ. La tangente à la lemniscate sera une droite MT faisant avec le rayon vecteur OM un angle égal et de sens contraire à OMP.



ETUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E. J. Boquel.**

(*Suite*, voir page 89.)

DE LA LIGNE DROITE

Equation de la ligne droite en coordonnées trilinéaires. — L'équation $Ax + By + C = 0$ se transformant en une équation homogène du même degré en coordonnées trilinéaires, toute droite a une équation de la forme

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$$

où m, n, p sont des constantes.

On peut d'ailleurs établir ce théorème directement comme il suit : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ *étant les équations en coordonnées rectilignes de trois droites non concourantes, toute droite du plan est comprise dans l'équation* $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$.

En effet, cette équation représente des droites, puisqu'elle est du premier degré en x et y; elle contient deux paramètres arbitraires qui sont les rapports de deux quelconques des quantités m, n, p à la troisième; on peut donc profiter de l'indétermination de ces deux paramètres pour faire passer la droite que représente l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma$ o par deux points $(x' \, y')$, $(x'' \, y'')$ pris à volonté.

Si l'on désigne par α', β', γ', α'', β'', γ'', ce que deviennent les fonctions linéaires α, β, γ, quand on y remplace x et y respectivement par x' et y', x'' et y'', on aura, pour déterminer les deux paramètres dont il s'agit, les deux conditions

$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0,$$
$$m\alpha'' + n\beta'' + p\gamma'' = 0.$$

Il y aura toujours une solution unique et bien déterminée, à moins que les quantités α', β', γ', α'', β'', γ'', ne satisfassent aux relations $\quad \dfrac{\alpha'}{\alpha''} = \dfrac{\beta'}{\beta''} = \dfrac{\gamma'}{\gamma''}.$

Or, ces conditions expriment précisément que les trois droites

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ passent par un même point, ce qui est contraire à l'hypothèse (*).

Si elles étaient remplies, il y aurait une infinité de valeurs pour les trois paramètres à déterminer, et alors l'équation $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$ représenterait toutes les droites passant par le point de concours des trois droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

— *Équations des axes de référence.* — Ces équations sont respectivement, quels que soient les paramètres de référence :

pour BC : $\alpha = 0$; pour AC : $\beta = 0$; pour AB : $\gamma = 0$.

Car, pour tous les points de la première de ces droites, par exemple, et pour ces points seulement, on doit avoir $MP = 0$; or $MP = \frac{\alpha}{\lambda}$, et comme le paramètre de référence n'est pas infini, il en résulte $\alpha = 0$.

Ces équations sont comprises dans l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, en y supposant nulles deux des trois constantes m, n, p.

— *Équation d'une droite passant par l'un des sommets du triangle de référence.* — L'équation d'une droite passant, par exemple, par le sommet A, doit être vérifiée par les coordonnées de ce sommet, qui sont $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; la constante m de l'équation générale doit donc être identiquement nulle, ce qui donne une équation de la forme

$$n\beta + p\gamma = 0 \text{ ou } \beta = K\gamma,$$

K étant un paramètre arbitraire.

De même, les droites passant par les sommets B et C ont respectivement pour équations

$$m\alpha + p\gamma = 0, \text{ ou } \gamma = g\alpha$$

et

$$m\alpha + n\beta = 0, \text{ ou } \alpha = f\beta$$

dans lesquelles g et f sont des paramètres arbitraires.

(*) Si l'on désigne par $-\lambda$ la valeur commune des trois rapports $\frac{\alpha'}{\alpha''}$, $\frac{\beta'}{\beta''}$, $\frac{\gamma'}{\gamma''}$, le point par lequel passeraient alors les trois droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ aurait pour coordonnées rectilignes $x = \frac{x' + \lambda x''}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y' + \lambda y''}{1 + \lambda}$; c'est-à-dire que ce serait le point qui divise le segment $[(x'y'), (x''y'')]$ dans le rapport λ.

Ces résultats sont d'ailleurs des conséquences immédiates de la transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées trilinéaires.

On remarquera à ce sujet que, lorsqu'on emploie en coordonnées rectilignes une équation symbolique de la forme $\alpha = 0$, on ne fait, en réalité, qu'employer une équation en coordonnées trilinéaires, la droite considérée étant prise pour l'un des axes de référence, et qu'il en est de même pour une équation de la forme $\alpha + \lambda\beta = 0$, qui représente une droite quelconque passant par celui des trois sommets du triangle de référence dont les coordonnées sont $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Ajoutons qu'on peut déjà constater, dès à présent, combien les coordonnées trilinéaires sont avantageuses dans un grand nombre de questions de géométrie; car, si l'on se reporte à des démonstrations données dans tous les cours et par conséquent trop connues pour que nous y revenions ici, par exemple, pour établir sur les équations symboliques que les bissectrices ou les médianes d'un triangle se coupent en un même point, on reconnaîtra que, dans ce mode de raisonnement, on ne fait au fond que prendre le triangle considéré pour triangle de référence, et écrire les équations en coordonnées trilinéaires de ses bissectrices ou de ses médianes. Or on sait par expérience combien ces démonstrations sont simples et élégantes.

— *Equation générale des droites qui passent par un point donné* (α', β', γ'). — Il faut écrire que l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$ est vérifiée par les coordonnées du point ($\alpha'\beta'\gamma'$). On obtient ainsi la condition

$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0.$$

Cette condition détermine l'un des rapports $\frac{m}{p}$. $\frac{n}{p}$ en fonction de l'autre, et si l'on substitue la valeur de n, par exemple, dans l'équation générale, on obtient l'équation cherchée, qui est $m(\alpha\beta' - \beta\alpha') + p\,(\gamma\beta' - \beta\gamma') = 0$.

Cette équation ne renferme plus que le seul paramètre arbitraire $\frac{m}{p}$. Mais, dans un grand nombre d'applications,

on préfère conserver l'équation générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, qui contient deux paramètres arbitraires, en y joignant la condition $m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0$. qui relie entre eux ces deux paramètres ; on obtient, en effet, par cette manière d'opérer, des calculs généralement plus symétriques.

— *Equation de la droite qui passe par deux points donnés* $(\alpha'\beta'\gamma')$, $(\alpha''\beta''\gamma'')$. — L'équation générale de la droite étant $m\alpha + n\beta + p\beta = 0$, on devra exprimer qu'elle est vérifiée par les coordonnées des deux points donnés.

On aura donc $$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0 \qquad (1)$$
avec les conditions
$$m\alpha' + n\beta' + p\gamma' = 0, \qquad (2)$$
$$m\alpha'' + n\beta'' + p\gamma'' = 0. \qquad (3)$$

Il faut tirer des deux conditions (2) et (3) les valeurs de deux des trois paramètres m, n, p en fonction du troisième, et les reporter dans l'équation (1), où le paramètre qui reste disparaîtra de lui-même comme facteur commun. Ce calcul n'est autre chose que l'élimination de m, n, p entre les trois équations linéaires et homogènes (1), (2), (3), et par conséquent il donne pour résultat l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$$

qui est celle de la droite passant par les deux points donnés.

Cette équation ne prendrait la forme indéterminée que si les trois mineurs

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

étaient simultanément nuls, ce qui donnerait

$$\frac{\alpha'}{\alpha''} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

et les trois axes de référence devraient être alors des droites concourantes, ce qui est contraire à l'hypothèse fondamentale.

Corollaire. — *Coordonnées trilinéaires du point qui divise un segment donné* $[(\alpha'\beta'\gamma'), (\alpha''\beta''\gamma'')]$ *dans un rapport donné.* —

L'équation de la droite qui passe par deux points peut être écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda} & \dfrac{\beta' + \lambda\beta''}{1+\lambda} & \dfrac{\gamma' + \lambda\gamma''}{1+\lambda} \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

en supposant $1 + \lambda$ différent de o.

Cette droite renferme donc tous les points dont les coordonnées sont exprimées par les formules

$$\alpha = \frac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda}, \quad \beta = \frac{\beta' + \lambda\beta''}{1+\lambda}, \quad \gamma = \frac{\gamma' + \lambda\gamma''}{1+\lambda},$$

où λ est un paramètre variable, en y comprenant même le point correspondant à la valeur $\lambda = -1$, dont les coordonnées sont infinies, et que l'on peut regarder comme le point à l'infini sur la droite.

Quelle est la signification géométrique du paramètre λ? Il est facile de reconnaître qu'il exprime le rapport dans lequel le point mobile M divise le segment M′ M″. En effet, de la formule $\alpha = \dfrac{\alpha' + \lambda\alpha''}{1+\lambda}$ on tire $\lambda = \dfrac{\alpha - \alpha'}{\alpha'' - \alpha}$.

Si R est le paramètre de référence relatif à l'axe BC, on aura, en appelant P, P′, P″ les pieds des pyramides abaissées respectivement des points M, M′ M″, sur cet axe de référence:

$$\lambda = \frac{R.MP - R.M'P'}{R.M''P'' - R.MP},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{MP - M'P'}{M''P'' = MP} = \frac{MG}{M''D} = \frac{M'M}{MM''}, \text{ c. q. f. d.}$$

Les conséquences géométriques de la formule $x = \dfrac{x' + \lambda x''}{1+\lambda}$ s'étendent donc complètement aux coordonnées trilinéaires, puisque la signification du paramètre λ reste la même dans ce nouveau système.

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Le rapport anharmonique de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, situés en ligne droite, est, comme on sait, le quotient du rapport des distances de deux de ces points au troisième par le

rapport des distances des deux premiers points au quatrième. En employant la notation connue (M_1, M_1, M_3, M_4), le rapport désigné par cette notation est $\frac{M_3 M_1}{M_3 M_2} : \frac{M_4 M_1}{M_4 M_2}$.

Or, nous venons de voir qu'on a

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} \text{ et } \frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2};$$

donc

$$\frac{M_3M_1}{M_3M_2} : \frac{M_4M_1}{M_4M_2} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2},$$

formule tout à fait pareille à celle que nous avons déjà trouvée dans les coordonnées tangentielles.

Quand ce rapport est égal à -1, les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 forment une division harmonique, dans laquelle les points M_1 et M_2, d'une part, M_3 et M_4, d'autre part, sont les points conjugués. *(A suivre.)*

QUESTION 369

Solution par M. Lelieuvre, élève au Lycée de Rouen.

On considère une ellipse rapportée à ses axes : soit M *un point de l'ellipse ; par le point* M, *le point* M′ *diamétralement opposé et les extrémités* AA′ *du grand axe on fait passer une hyperbole équilatère* H ; *puis on prend un cercle passant par* M, A *et* A′ ; *cela posé, l'hyperbole et le cercle ont un quatrième point commun* P : *on mène* MP, *et on demande, le point* M *parcourant l'ellipse, de déterminer la trajectoire orthogonale des droites* MP. *C'est une ellipse ; cette ellipse n'est jamais un cercle et n'est pas non plus homothétique à l'ellipse donnée. On suppose* $a > b$. (G. L.)

Prenons pour déterminer le point M l'anomalie excentrique φ de ce point. Ses coordonnées sont alors

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

L'équation de l'hyperbole équilatère passant par A, A′, M et M′ et ayant par suite son centre en O est de la forme

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + F = 0.$$

Elle passe par les extrémités du grand axe.

Donc on a $\quad a^2 + F = 0, \quad F = -a^2.$

De plus elle passe par le point M ; donc on a

$$a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi + 2Bab \sin \varphi \cos \varphi - a^2 = 0$$

$$2B = \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi}.$$

L'équation est donc

$$x^2 - y^2 + xy \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi} - a^2 = 0.$$

L'équation d'un cercle passant par A et A′ est de la forme :

$$x^2 + (y - d)^2 = a^2 + d^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2dy - a^2 = 0.$$

Ce cercle passe par le point M. Donc on a

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - 2bd \sin \varphi - a^2 = 0$$

$$2d = -\frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b}.$$

L'équation du cercle est donc

$$x^2 + y^2 + \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b} y - a^2 = 0.$$

Pour avoir le système des sécantes communes, retranchons les deux équations membre à membre :

$$2y^2 + \frac{(a^2 - b^2) \sin \varphi}{b} y - xy \frac{(a^2 + b^2) \sin \varphi}{ab \cos \varphi} = 0$$

qui donne $y = 0$ pour AA′, et pour la droite MP :

$$y - x \frac{a^2 + b^2}{2ab} \operatorname{tg} \varphi + \frac{a^2 - b^2}{2b} \sin \varphi = 0.$$

Or, considérons une ellipse ayant même direction d'axes que l'ellipse donnée ; soient A et B les longueurs de ces axes. Si on prend un point sur cette ellipse dont l'anomalie soit l'angle φ, la normale à l'ellipse en ce point est

$$y - \frac{A}{B} x \operatorname{tg} \varphi + \frac{A^2 - B^2}{B} \sin \varphi = 0,$$

équation identique à celle de MP. Donc toutes les droites MR sont normales à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant AA′ et BB′ et sont donnés par les équations

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \quad \frac{A^2 - B^2}{B} = \frac{a^2 - b^2}{2b}.$$

D'ailleurs chaque droite MP est normale à cette ellipse

en un point tel que son anomalie soit la même que celle du point M correspondant de l'ellipse donnée. Il est facile d'avoir A et B; car la première équation donne

$$\frac{A^2 - B^2}{B^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}.$$

On a aussi $$\frac{A^2 - B^2}{B} = \frac{a^2 - b^2}{2b};$$

donc $$B = \frac{2a^2b}{a^2 - b^2},$$

par suite $$A = \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}.$$

On a aussi $$A^2 - B^2 = a^2.$$

Donc les foyers de la trajectoire sont aux points A et A'.

Cette trajectoire n'est jamais un cercle, car si l'on avait $A = B$, il s'ensuivrait :

$$a^2 + b^2 = 2ab, \quad (a - b)^2 = 0, \quad a = b.$$

Or, on suppose $a > b$.

De plus, elle n'est jamais homothétique à l'ellipse donnée, car on aurait alors

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

d'où $a^2 = b^2$. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Le Pont, à Cherbourg.

QUESTION 8

Solution par M. CARTIER, élève au Lycée d'Angoulême.

On considère une ellipse rapportée à ses axes, et le cercle Δ qui, passant par les foyers, est concentrique à cette ellipse. Par un point M, *pris sur le cercle, on mène à l'ellipse deux tangentes qui coupent le cercle aux points* A *et* B, *différents de* M. *Démontrer que* AB *est parallèle au grand axe de l'ellipse.* (G. L.)

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle du cercle. $x^2 + y^2 - c^2 = 0.$ (Δ

Soit (α,β) un point M de ce cercle ; on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2. \quad (1)$$

L'équation du couple de tangentes menées de ce point à l'ellipse est

$$(d^2 - a^2)(y - \beta)^2 - 2\alpha\beta(x - \alpha)(y - \beta) + (\beta^2 - b^2)(x - \alpha)^2 = 0. \quad (2)$$

Soit $y = m$ l'équation d'une droite AB.

L'équation du couple de droites qui joignent M aux points A et B où elle coupe Δ est

$$(m - \beta)^2(x - \alpha)^2 + 2\alpha(m - \beta)(x - \alpha)(y - \beta) + (\alpha^2 + m^2 - c^2)(y - \beta)^2 = 0. \quad (3)$$

On peut identifier (2) et (3). En effet, on a en même temps pour une valeur convenable de m

$$\frac{(m-\beta)^2}{\beta^2 - b^2} = \frac{\alpha^2 - c^2 + m^2}{\alpha^2 - a^2} = -\frac{m-\beta}{\beta}$$

ou, en remplaçant α^2 par sa valeur tirée de (1),

$$\frac{(m-\beta)^2}{\beta^2 - b^2} = -\frac{m^2 - \beta^2}{\beta^2 + b^2} = -\frac{m-\beta}{\beta}$$

ou

$$\frac{m-\beta}{\beta^2 - b^2} = -\frac{m+\beta}{\beta^2 + b^2} = -\frac{1}{\beta}.$$

Il suffit de prendre $m = \dfrac{b^2}{\beta}$.

La proposition se déduit facilement de là.

On peut remarquer que $\dfrac{b^2}{\beta}$ est l'ordonnée à l'origine de la tangente à l'ellipse menée par le point d'ordonnée β, c'est-à-dire situé sur la parallèle au grand axe menée par M.

Seconde solution par M. Godefroy, élève au Lycée de Lyon

On a d'après un théorème connu

angle AMF = angle BMF′.

Joignons AF′ ; d'après la mesure des angles on a aussi

AF′F = AMF et BAF′ = BMF′.

Mais AMF = BMF′, donc aussi AF′F = BAF′.

égalité qui prouve que les deux droites AB et FF′ sont parallèles.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Mettetal, à Besançon; M. S., à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

20. — On considère une surface fixe du second degré, et une série de surfaces homothétiques du second degré circonscrites à la première. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à ces surfaces.

21. — Trouver le lieu des points de contact d'une série de surfaces homofocales du second degré avec des plans passant par une droite donnée ou par un point donné.

22. — On considère une surface du second degré et une courbe gauche du troisième degré passant au centre de la surface, et ayant pour directions asymptotiques les axes de cette surface. Faire voir que les normales à la surface aux six points où elle est coupée par la courbe gauche appartiennent à un même hyperboloïde. *(G. Kœnigs.)*

23. — On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et un diamètre quelconque PP′. Par les extrémités P, P′ de ce diamètre et par les foyers de l'ellipse donnée, on fait passer une hyperbole équilatère H, qui rencontre E en deux points diamétralement opposés, Q, Q′. Ceci posé, aux points P, Q, on mène les tangentes à E; ces droites se rencontrent en un point I: 1° trouver le lieu de ce point quand PP′ tourne autour du centre de E. Ce lieu est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

2° Au point I, on abaisse des perpendiculaires sur les asymptotes de H: trouver le lieu de ces projections. Ce lieu est la podaire du centre de l'ellipse E.

3° On demande de vérifier ces deux résultats par des con-

sidérations géométriques en établissant d'abord le théorème élémentaire suivant : on considère un triangle ABC, et sur la base BC deux points D et D′ également éloignés du milieu de BC. Soit D″ la symétrique de D par rapport au point A. La droite D′D″ rencontre AC en un point M; la droite qui va de D′ au milieu de MC est parallèle à AB. *(G. L.)*

24. — On considère deux droites rectangulaires ox et oy, et un cercle C tangent à l'axe ox au point P. Soit P′ la symétrique de P par rapport à l'origine. Par ce point P′, on mène une transversale L, qui rencontre C en deux points A et B. On joint alors le point P au point A et à cette droite on élève en ce point P une perpendiculaire qui rencontre L en un point I. Trouver le lieu du point I quand L tourne autour de P′. — Ce lieu est une cissoïde oblique ayant pour point de rebroussement le point P. On propose enfin de démontrer ce résultat par la géométrie. *(G. L.)*

25. — On considère sur une ellipse E un diamètre A′A″ et deux points quelconques A, B. Les droites AA′ et BA″ se coupent en un point P; AA″ et BA′ en un point Q; le pôle de AB est évidemment situé, ainsi que le prouve le théorème de Pascal, sur PQ; mais on propose de démontrer qu'il est placé au milieu même de PQ. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

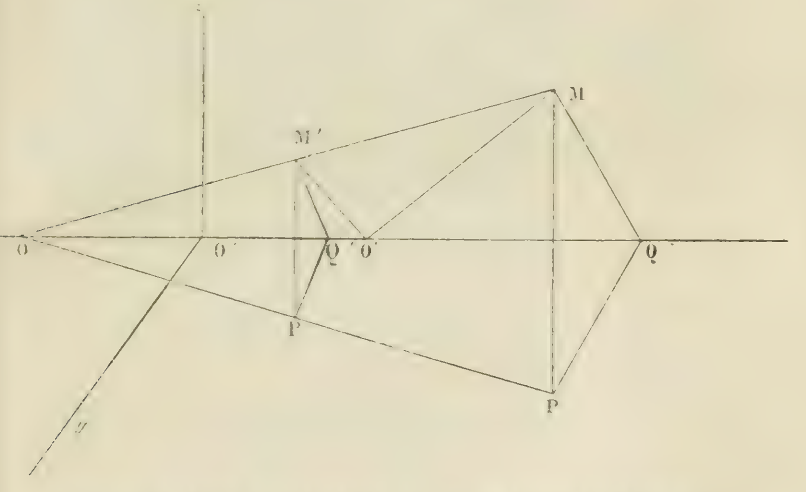
PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13734-2

TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 49, 77, 97, 121)

29. — *Définition de la transformation réciproque dans l'espace.* — Nous nous proposons maintenant d'étendre à l'espace la transformation réciproque.



Imaginons deux points fixes O, O', O étant le pôle principal, O' le pôle secondaire de la transformation. On joint le point O à un point quelconque M de l'espace, et dans le plan MOO' on élève à la droite O'M une perpendiculaire qui rencontre OM en M'. Ce point M' sera dans ce système le transformé ou le correspondant de M.

30. — *Formules relatives à la transformation réciproque dans l'espace.* — Prenons pour axe de x la ligne des pôles, pour origine le milieu O'' de OO', pour plan de yz celui qui, en ce point O'', est perpendiculaire à OO'; enfin pour axes de y et de z deux droites rectangulaires de ce plan. Dési-

gnons, dans ce système, par x, y, z, les coordonnées du point M; par X, Y, Z, celles du point transformé M′.

Projetons M et M′ sur xoy et soient P, P′ ces projections qui sont en ligne droite avec O; projetons encore P et P′ sur ox en Q et Q′; on forme ainsi des triangles semblables deux à deux qui donnent les relations

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{MQ}{M'Q'},$$

ou, en prenant $OO' = 2d$,

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ}{M'Q'}. \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles semblables O′MQ, O′M′Q′ donnent aussi $MQ.M'Q' = O'Q.O'Q'$

ou encore $MQ.M'Q' = (d-x)(X-d).$

Les relations (1) peuvent donc s'écrire

$$\frac{d+x}{d+X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{MQ\,.\,M'Q'}{M'Q'^2} = \frac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$$

On a donc $$\frac{d+x}{d+X} = \frac{(d-x)(X-d)}{Y^2+Z^2}$$

qui donne $$\frac{x}{d} = \frac{X^2 - Y^2 - Z^2 - d^2}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}.$$

On trouve ensuite

$$\frac{y}{d} = \frac{2Y(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2},$$

$$\frac{z}{d} = \frac{2Z(X-d)}{X^2+Y^2+Z^2-d^2}.$$

Il y a d'ailleurs *réciprocité* entre les lettres x, y, z et X, Y, Z; et l'on trouve

$$\frac{X}{d} = \frac{x^2-y^2-z^2-d^2}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Y}{d} = \frac{2y(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2},$$

$$\frac{Z}{d} = \frac{2z(x-d)}{x^2+y^2+z^2-d^2}.$$

Il résulte de ces formules que si l'on veut transformer, dans ce système, une surface de degré m, $f(x, y, z) = 0$, l'équation transformée sera de degré $2m$, du moins en géné-

ral, car nous signalerons tout à l'heure des causes qui font abaisser le degré de la transformée.

31. *Transformation du plan.* — Au plan P, dont l'équation est

$$A\frac{x}{d} + B\frac{y}{d} + C\frac{z}{d} = h$$

correspond la quadrique P',

$$(A - h)X^2 - (A + h)Y^2 - (A + h)Z^2 + 2CZX + 2BXY$$
$$- 2d(BY + CZ) + d^2(h - A) = 0.$$

Cette équation est intéressante à discuter.

L'équation en S appliquée à cette surface est

$$S^3 + (A + 3h)S^2 + [(A + h)(3h - A) - B^2 - C^2]S$$
$$+ (A + h)(h^2 - A^2 - B^2 - C^2) = 0$$

et, si l'on pose $A^2 + B^2 + C^2 = K^2$,

les trois racines sont

$$S_1 = -(A + h),$$
$$S_2 = -h + K,$$
$$S_3 = -(h + K).$$

Le hessien de la surface est d'ailleurs

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ B & -(A + h) & 0 & -B \\ C & 0 & -(A + h) & -C \\ 0 & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Pour calculer rapidement ce déterminant ajoutons d'abord la quatrième colonne à la première, on aura :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} A - h & B & C & 0 \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

Ajoutons maintenant la quatrième ligne à la première, il vient :

$$\frac{H}{d^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h - A \\ 0 & -(A + h) & 0 & -B \\ 0 & 0 & -(A + h) & -C \\ h - A & -B & -C & h - A \end{vmatrix}$$

ou $$\frac{H}{d^2} = (A - h)\begin{vmatrix} 0 & -(A + h) & 0 \\ 0 & 0 & -(A + h) \\ h - A & -B & -C \end{vmatrix}$$

on a, finalement :

$$H = -d^2(A+h)^2(A-h^2).$$

L'équation de la surface rapportée à ses axes, quand on suppose K^2 différent h^2, est donc

$$-(A+h)X'^2 + (K-h)Y'^2 - (K+h)Z'^2 = \frac{d^2(A+h)(A-h)^2}{K^2-h^2}$$

32. — Nous reviendrons tout à l'heure sur le cas singulier, celui où l'on suppose $h^2 = K^2$; dans le cas général, l'équation précédente ne peut représenter que des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes à deux nappes. C'est ce que nous allons montrer. On peut toujours supposer $h > 0$, et comme K désigne essentiellement la racine réelle positive de l'expression $(A^2 + B^2 + C^2)$, nous pouvons dire que K est aussi une quantité positive. Deux cas seulement sont donc à distinguer, suivant que l'on suppose $h - K > 0$ ou $h - K < 0$.

La discussion, sur laquelle il est inutile d'insister davantage, peut se résumer dans le tableau suivant :

$h - K > 0$	$A + h > 0$	*Ellipsoïde réel.*
	$A + h < 0$	(Inégalités incompatibles.)
$h - K < 0$	$A + h > 0$	*Hyperboloïde à deux nappes.*
	$A + h < 0$	*(Id.)*

Nous ferons seulement remarquer pourquoi, dans ce tableau, nous avons marqué les inégalités

$$h - K > 0 \qquad (1)$$

$$A + h < 0 \qquad (2)$$

comme *incompatibles*. Il ne faut pas oublier que les lettres A, h, K, d, ont une signification géométrique qui ne permet pas d'établir entre elles des inégalités quelconques. La distance ρ de l'origine au plan P est donnée par la formule

$$\rho = \frac{hd}{K}. \qquad (3)$$

D'autre part, le plan P rencontre l'axe des x à une distance ρ' de l'origine, telle que, $\rho' = \dfrac{hd}{-A}$.

Dans cette formule ρ' désigne la distance absolue quand on suppose $A < 0$. Ceci posé on a évidemment $\rho' > \rho$ ou

$$\frac{hd}{-A} > \frac{hd}{K} ;$$

on a donc $A + K > o$ en chassant les dénominateurs positifs. Or les deux inégalités (1) et (2) donnent par combinaison

$$A + K < o$$

et pour ce motif sont incompatibles. Il faut d'ailleurs remarquer que l'inégalité (2) entraîne nécessairement la condition $A < o$ que nous avons admise.

Si l'on veut maintenant observer que la formule (3) dans l'hypothèse $h - K > o$ donne $\rho > d$, et, au contraire, $\rho < d$ si l'on suppose $h - K < o$, nous pourrons dire :

Théorème. — *Dans la transformation réciproque à un plan* P *correspond une quadrique* P′ *qui est un ellipsoïde, si le plan* P *est extérieur à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre : et un hyperboloïde à deux nappes quand le plan* P *coupe cette sphère.* *(A suivre.)*

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Pàr M. **Kœhler**.

(*Suite*, voir page 105.)

III. — *Signification géométrique des fonctions* I *et* J.

Nous allons chercher l'expression du rapport anharmonique de quatre points déterminés par les deux équations :

$$mx^2 + pxy + qy^2 = o$$

et

$$m'x^2 + p'xy + q'y^2 = o.$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées *binaires* des deux points représentés par la première équation ; (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des deux autres points. Une des valeurs du rapport anharmonique peut s'écrire, soit

$$\rho = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} : \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2},$$

soit

$$\rho = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2},$$

suivant que l'on compte les distances à partir de l'origine des x ou de l'origine des y. Mais on peut écrire

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{x_3y_1 - x_1y_1}{x_4y_1 - x_1y_1}$$
$$= \frac{y_3x_1 - x_1y_1}{y_4x_1 - x_1y_1} = \frac{x_3y_1 - y_3x_1}{x_4y_1 - y_4x_1}$$

et de même

$$\frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{y_4 - y_2} = \frac{x_3y_2 - x_2y_3}{x_4y_2 - y_4x_2}.$$

Donc on a

$$\rho = \frac{(x_3y_1 - y_3x_1)(x_4y_2 - y_4x_2)}{(x_4y_1 - y_4x_1)(x_3y_2 - y_3x_2)} = \frac{\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_2}{y_2}\right)}{\left(\frac{x_4}{y_4} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x_3}{y_3} - \frac{x_2}{y_2}\right)} \quad (4)$$

Si maintenant on pose

$$R = \sqrt{p^2 - 4mq}, \quad R' = \sqrt{p'^2 - 4m'q'}:$$
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{-p + R}{2m}, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{-p - R}{2m},$$
$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{-p' + R'}{2m'}, \quad \frac{x_4}{y_4} = \frac{-p' - R'}{2m'},$$

on trouve la formule

$$\rho = \frac{2qm' + 2q'm - pp' + RR'}{2qm' + 2q'm - pp' - RR'}. \quad (5)$$

Nous rappellerons que le rapport anharmonique de quatre points a six valeurs distinctes en général, savoir:

$$\rho, \ \frac{1}{\rho}, \ 1 - \rho, \ \frac{1}{1 - \rho}, \ \frac{\rho - 1}{\rho}, \ \frac{\rho}{\rho - 1},$$

ρ désignant le résultat obtenu en groupant les quatre points d'une manière quelconque. Lorsque les points sont harmoniques, les six valeurs se réduisent à trois, savoir -1, 2 et $\frac{1}{2}$.

Un autre cas particulier est celui où l'on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; alors les six valeurs se réduisent à deux, qui sont les racines de l'équation précédente, c'est-à-dire les racines cubiques imaginaires de l'unité; les quatre points sont alors en situation *équi-anharmonique*.

Supposons maintenant que J soit nul ; l'équation (3) a une racine nulle et la valeur correspondante de λ est $\lambda = c$. L'équation (1) devient :

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 - y^2[x^2(4b^2 - 4ac) + 4xy(bc - ad) + y^2(c^2 - ae)] = 0.$$

Le polynôme entre crochets, devant être carré parfait, s'écrira $\quad 4(b^2 - ac)\left[x - \frac{ad - bc}{2(b^2 - ac)}\, y\right]^2$,

d'où résulte le mode de décomposition suivant :

$$\left[ax^2 + 2xy\left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) + y^2\left(c - \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + 2xy\left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) + y^2\left(c + \frac{ad - bc}{\sqrt{b^2 - ac}}\right)\right]$$

En calculant le rapport anharmonique des quatre points représentés par les deux trinômes du second degré, d'après la formule (5), on voit que ρ se réduit à $\dfrac{+\,RR'}{-\,RR'} = -1$, parce que $2qm' + 2q'm - pp'$ est identiquement nul.

Donc : *quand on a* J $= 0$, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation harmonique, et on est en droit de conclure que* J *est un invariant.*

Supposons maintenant qu'on ait I $= 0$. En divisant par a et en désignant les quatre racines $\dfrac{x_1}{y_1}$, etc... par $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, l'équation I $= 0$, pourra s'écrire :

$$12\beta\gamma\delta\varepsilon - 3\Sigma\beta \,.\, \Sigma\beta\gamma\delta + (\Sigma\beta\gamma)^2 = 0.$$

Mais on a $\quad \Sigma\beta . \Sigma\beta\gamma\delta = \Sigma\beta^2\gamma\delta + 4\beta\gamma\delta\varepsilon$

$$(\Sigma\beta\gamma)^2 = \Sigma\beta^2\gamma^2 + 2\Sigma\beta^2\gamma\delta + 6\beta\gamma\delta\varepsilon\,;$$

l'équation devient donc

$$\Sigma\beta^2\gamma^2 - \Sigma\beta^2\gamma\delta - 6\beta\gamma\delta\varepsilon = 0$$

ou bien en développant :

$$(\beta\gamma + \delta\varepsilon^2) + (\beta\delta + \gamma\varepsilon)^2 + (\beta\varepsilon + \gamma\delta)^2 - (\beta\delta + \gamma\varepsilon)(\beta\varepsilon + \gamma\delta)$$
$$- (\beta\varepsilon + \gamma\delta)(\beta\gamma + \delta\varepsilon) - (\beta\gamma + \delta\varepsilon)(\beta\delta + \gamma\varepsilon) = 0$$

ou enfin, abréviativement :

$$M^2 + N^2 + P^2 - NP - PM - MN = 0. \qquad (6)$$

Mais la valeur (4) du rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\varepsilon - \gamma\delta}{\beta\gamma + \delta\varepsilon - \beta\delta - \gamma\varepsilon} = \frac{M - P}{M - N}.$$

Maintenant l'égalité (6) devient en ajoutant et retranchant des termes

$$(M - P)^2 + (M - N)^2 - M^2 + MP + MN - NP = 0$$

ou $$(M - P)^2 + (M - N)^2 - (M - N)(M - P) = 0$$

ou enfin

$$\left(\frac{M - P}{M - N}\right)^2 + 1 - \frac{M - P}{M - N} = \rho^2 - \rho + 1 = 0.$$

Donc, *quand on a* $I = 0$, *les quatre points représentés par la forme du quatrième degré sont en situation équi-anharmonique: on en conclut que* I *est aussi un invariant.*

Il reste à chercher par quels facteurs I et J sont multipliés lorsqu'on fait la substitution linéaire $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$. Pour cela nous remarquerons que le discriminant $I^3 - 27J^2$ est le produit des carrés des différences des racines, c'est-à-dire de six facteurs de la forme $(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2$ (*).

Lorsqu'on fait la substitution indiquée, on reconnaît que chaque facteur devient $(X_1 Y_2 - Y_1 X_2)^2 (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2$; le discriminant se trouve donc multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^{12}$. Il en résulte que I est multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^4$ et J par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^6$.

On peut s'en assurer par un calcul direct en formant les coefficients de la nouvelle expression de f, puis les nouveaux invariants.

IV. — Détermination du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation f = 0.

Nous allons calculer en fonction de I et de J l'expression du rapport anharmonique des quatre points représentés par l'équation $f = 0$, sans faire aucune hypothèse particulière.

Posons pour un instant

$$A = 4b^2 - 6ac + 2a\lambda, \quad B = 2\lambda b - 2ad;$$

on aura

$$f = (ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - y^2\,[Ax^2 + 2Bxy + y^2(\lambda^2 - ae)].$$

Puisque λ est déterminé de telle sorte que le second trinôme soit un carré, on peut écrire:

(*) Voir, pour la démonstration de ce fait, les *Leçons d'Algèbre supérieure de Salmon*, traduction française, p. 78.

$$f = (ax^2 + 2bxy + \lambda y^2)^2 - Ay^2\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2$$

$$= \left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 - \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$
$$\left[ax^2 + 2bxy + \lambda y^2 + \frac{Axy + By^2}{\sqrt{A}}\right]$$

$$= \left[ax^2 + xy(2b - \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + xy(2b + \sqrt{A}) + y^2\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] \quad (7)$$

D'après la formule (5), le rapport anharmonique est

$$\rho = \frac{4a\lambda - 4b^2 + A + R}{4a\lambda - 4b^2 + A - R}$$

R désignant la racine carrée de l'expression

$$\left[(2b - \sqrt{A})^2 - 4a\lambda + \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]\left[(2b + \sqrt{A})^2 - 4a\lambda - \frac{4aB}{\sqrt{A}}\right]$$

Comme on a

$$4a\lambda - 4b^2 + A = 6a(\lambda - c) = 6a\mu,$$

la formule précédente devient

$$6\mu(\rho - 1) = R(\rho + 1),$$

ou bien, en prenant pour inconnue auxiliaire

$$\sigma = \frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$
$$36\mu^2\sigma^2 = R^2.$$

Le polynôme R^2 s'exprime très simplement en fonction de I et J; on a

$$R^2 = (4b^2 + A - 4a\lambda)^2 - 16\left(b\sqrt{A} - \frac{aB}{\sqrt{A}}\right)^2$$

$$= (8b^2 - 6ac - 2a\lambda)^2 - \frac{16(6abc - 2a^2d - 4b^3)^2}{4b^2 - 6ac + 2a\lambda}$$

ou, en remplaçant λ par $\mu + c$,

$$R^2 = \frac{1}{2b^2 - 2ac + a\mu}\left[(8b^2 - 8ac - 2a\mu)^2(2b^2 - 2ac + a\mu) - 32(3abc - 2b^3 - a^2d)\right]$$

$$= \frac{4}{2b^2 - 2ac + a\mu}\left[a^3\mu^3 - 6a^2\mu^2(b^2 - ac) + 8a^2(3b^2c^2 - 4ac^3 + 6abcd - a^2d^2 - 4b^2d)\right]$$

$$= \frac{4a^2}{2b^2 - 2ac + a\mu}[a\mu^3 - 6\mu^2(b^2 - ac) + 8aJ$$
$$+ 8I(b^2 - ac)]$$

La substitution de cette valeur dans la relation $3\sigma\mu^2\rho^2 = R^2$ donne l'équation

$$\mu^4(9a\sigma^2 - a^2) + 6\mu^2(b^2 - ac)(3\sigma^2 + a^2)$$
$$- 8a^2(I(b^2 - ac) + aJ) = 0. \qquad (8)$$

Il ne reste plus qu'à éliminer μ entre les deux équations du troisième degré (8) et (3) $\mu^3 - \mu I + 2J = 0$, pour avoir la résolution cherchée entre le rapport anharmonique et les invariants.

Les calculs sont assez prolixes ; il n'est guère possible d'éviter le développement complet du résultant des équations (3) et (8). Ce résultant, pour deux équations incomplètes de la forme $Ax^3 + Bx^2 + D = 0$ et $A'x^3 + C'x + D' = 0$ est $A^3D'^3 - D^3A'^3 - B^3A'D'^2 - A^2DC'^2 - A^2BC'D'^2 - B^2DA'C'^2$ $+ 2AD^2A'^2C' + 3AD^2A'^2D' - 3A^2DA'D'^2 - ABDA'B'D'$.

En ordonnant suivant les puissances de σ, on trouve que tous les termes du résultant contiennent en facteur

$$a^4J + a^2I(b^2 - ac) - 4(b^2 - ac)^3;$$

après la suppression de ce facteur, il reste

$$5832J^2\sigma^6 + \sigma^4(5832J^2 - 648I^4) + \sigma^2(1944J^2 + 144I^3)$$
$$+ 216J^2 - 8I^3 = 0$$

ou $216J^2(27\sigma^6 + 27\sigma^4 + 9\sigma^2 + 1) - 8I^3(81\sigma^4 - 18\sigma^2 + 1) = 0$

c'est-à-dire $\dfrac{I^3}{J^2} = 27\,\dfrac{(3\sigma^2 + 1)^3}{(9\sigma^2 - 1)^2} = 108\,\dfrac{(\rho^2 - \rho + 1)^2}{(\rho + 1)^2(2\rho^2 - 5\rho + 2)^2}$

$$= 108\,\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho + 1)^2(2\rho - 1)^2(\rho - 2)^2}$$

Telle est la relation cherchée.

Elle fait retrouver des résultats déjà obtenus ; si l'invariant I est nul, on a $\rho^2 - \rho + 1 = 0$; si J est nul, on a soit $\rho + 1 = 0$, soit $2\rho - 1 = 0$, et l'une quelconque des valeurs -1, $\dfrac{1}{2}$ et 2 pour ρ, caractérise la situation harmonique.

Enfin, on voit aussi que $\dfrac{I^3}{J^2}$ est un *invariant absolu*, c'est-à-dire une fonction qui se reproduit sans l'adjonction d'aucun

facteur, lorsqu'on fait une transformation linéaire, car le rapport anharmonique ne change pas.

On voit d'ailleurs que I^3 et J^2 sont multipliés chacun par la douzième puissance du déterminant $\alpha\delta - \beta\alpha'$. (*A suivre.*)

CONSTRUCTION DES ASYMPTOTES
DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE
PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS

1. — On sait que l'hyperbole équilatère qui est circonscrite à un triangle passe par le centre des hauteurs de ce triangle : on pourra donc déterminer un cinquième point de l'hyperbole : par cinq points on ne peut faire passer qu'une seule conique et l'on voit ainsi que le problème ne comporte qu'une solution.

On peut d'ailleurs trouver le centre d'une conique déterminée par cinq points; il suffit, comme on le sait, de déterminer les extrémités de deux cordes parallèles au moyen du théorème de Pascal. La droite qui joint les milieux de ces deux cordes est un diamètre : le centre peut donc être construit au moyen de deux diamètres, ainsi déterminés.

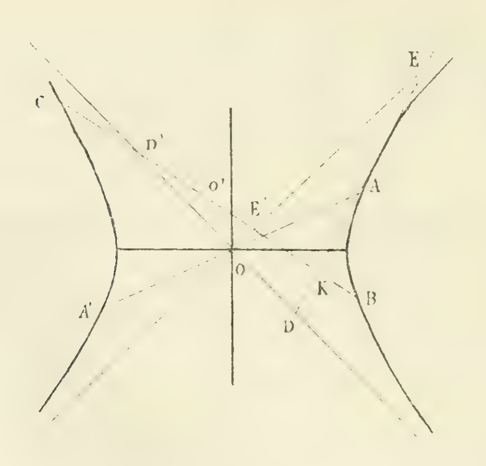
2. — D'après cette remarque nous supposons que l'hyperbole équilatère H est définie par deux points A, B et le centre O de la courbe et nous nous proposons de trouver ses asymptotes. Voici une solution simple de ce problème.

Soit A' le symétrique de A par rapport à O; par les trois points A, A', B faisons passer un cercle Δ : soit O' le centre et C l'extrémité du diamètre qui passe par B. On sait que : *si sur la corde d'une hyperbole équilatère comme diamètre on décrit un cercle, celui-ci coupe l'hyperbole en deux autres points qui sont les extrémités d'un diamètre de cette courbe.*

Il résulte de ce théorème que le point C est un point de l'hyperbole.

Le triangle rectangle BAC étant inscrit à l'hyperbole, on sait par une autre propriété, également bien connue, que *la*

tangente a H au point A *est perpendiculaire à l'hypotenuse* BC. Ayant, d'après cette remarque, abaissé du point A une perpendiculaire AK sur CB, les asymptotes cherchées sont deux droites rectangulaires ayant leur sommet en O et interceptant sur AK un segment dont le milieu est le point A. Il suffit donc pour les obtenir, et comme l'indique la figure, de décrire du point A comme centre avec AO pour rayon un cercle qui rencontre AK aux points D et E : OD et OE sont les asymptotes.



3. — On peut remarquer que si l'on prolonge les asymptotes OD et OE jusqu'à ce qu'elles rencontrent le diamètre BC aux points D' et E', les triangles OO'E', OO'D' sont isoscèles et l'on a OO' = O'E' = O'D'. On peut alors déterminer les asymptotes de l'hyperbole en décrivant du point O' comme centre avec O'O pour rayon un cercle qui coupe BC en deux points, et en joignant ces points au centre donné O on obtient les deux asymptotes.

L'une et l'autre des deux constructions précédentes sont plus simples que celle qu'on indique ordinairement. Celle-ci

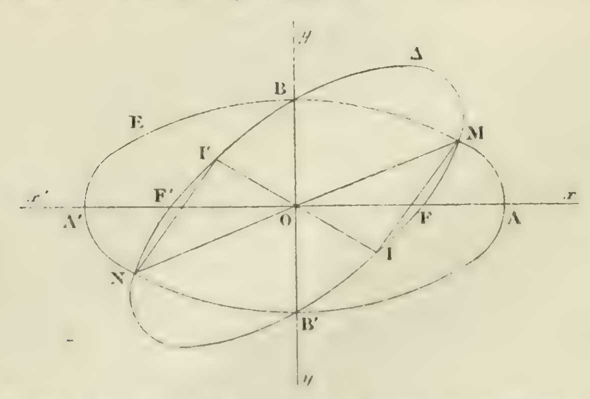
consiste à tracer les bissectrices des angles formés par les droites BC, AA′; on mène ensuite par O des parallèles à ces bissectrices et on a les axes en position. De ces axes on déduit ensuite les asymptotes: mais dans la pratique il est visible que cette construction est moins rapide que celle que nous venons d'exposer, et qui donne immédiatement les asymptotes au moyen du tracé d'un seul arc de cercle.

QUESTION 16

Solution par M. E. Devin, élève de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

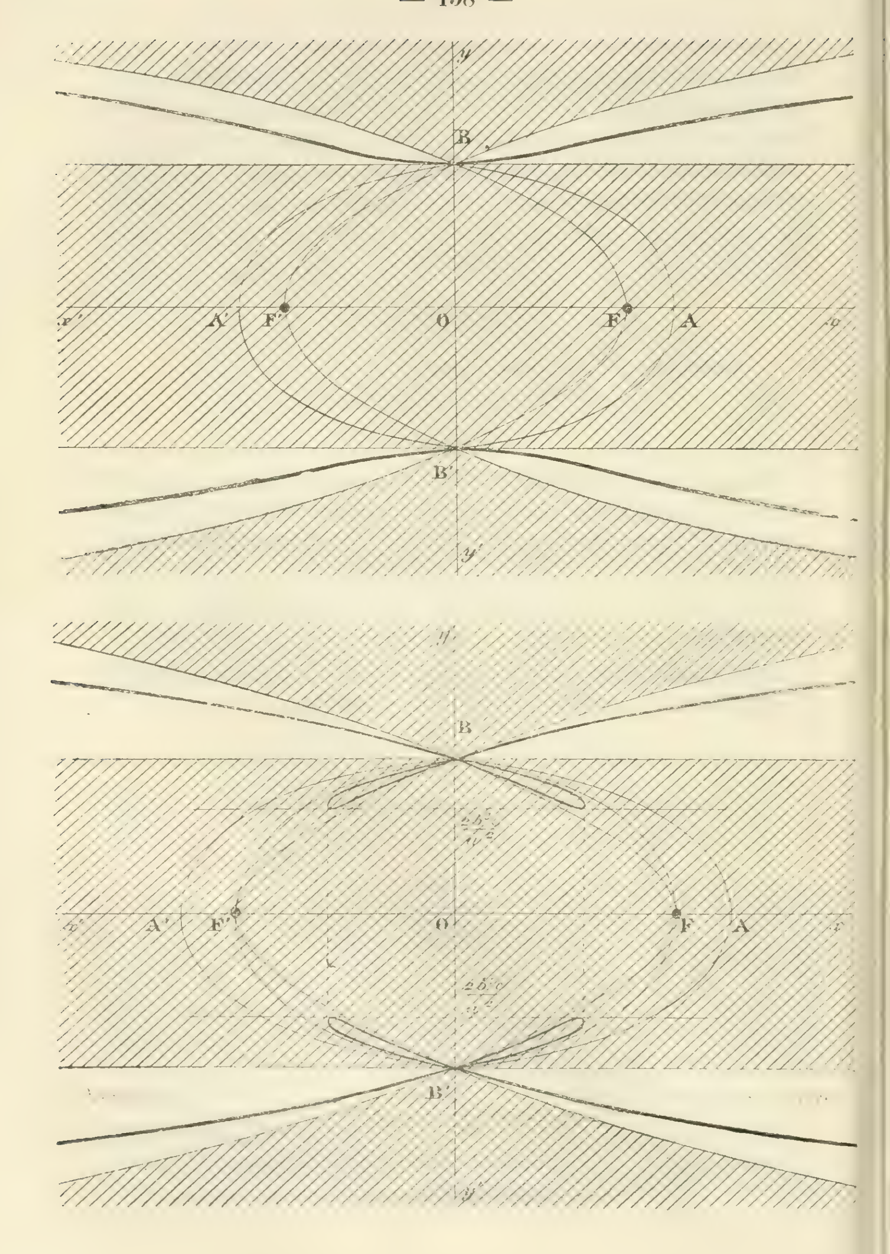
On considère une ellipse E *rapportée à ses axes et une conique* Δ *passant par les foyers et les extrémités* B, B′ *du petit axe de* E. *Cette conique* Δ *rencontre* E *en deux points* M, N *différents de* B *et de* B′ : *en ces points on mène à* E *des normales qui rencontrent* Δ *en des points* I, I′ *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

L'équation générale des coniques passant par les points F, F′, B, B′ est $b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$ (1)



L'ellipse donnée et la conique Δ se coupent en quatre points situés sur les deux droites dont l'équation est

$$b^4x^2 + a^2\lambda xy = 0.$$


y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'
y
B
x'
A'
F'
O
F
A
x
B'
y'

combinaison homogène de l'équation (1) et de celle de l'ellipse $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

L'équation du diamètre MN commun aux deux courbes est donc
$$b^4x + a^2\lambda y = 0$$
et son coefficient angulaire, m
$$-\frac{b^4}{a^2\lambda} = m.$$

Soit m' celui de la tangente en M; on a
$$mm' = -\frac{b^2}{a^2};$$
ainsi
$$m'\frac{b^4}{a^2\lambda} = \frac{b^2}{a^2}$$
ou
$$m' = \frac{\lambda}{b^2}.$$

Soit m'' le coefficient angulaire de la normale au point M on a
$$m'm'' = -1$$
d'où
$$m'' = -\frac{b^2}{\lambda}.$$

Ceci posé, les points M et N étant les extrémités d'un diamètre de l'ellipse donnée, les deux normales MI et NI' sont parallèles et, d'après l'équation générale des normales à l'ellipse, en fonction du coefficient angulaire, qui est
$$y = mx \pm \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$
nous aurons pour l'ensemble de ces deux normales, dont le coefficient angulaire est m'', l'équation
$$\left(y + \frac{b^2}{\lambda}x\right)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = \frac{c^4b^4}{\lambda^2}$$
ou, en multipliant les deux membres par λ^2,
$$(\lambda y + b^2x)^2\left(a^2 + \frac{b^6}{\lambda^2}\right) = c^4b^4$$
ou encore
$$(\lambda y + b^2x)^2(\lambda^2a^2 + b^6) = c^4b^4\lambda^2. \qquad (2)$$

Nous allons maintenant, pour éviter d'introduire l'ellipse donnée dans l'équation du lieu, chercher à former l'équation de la droite II' : et, cette équation obtenue, il nous suffira, pour obtenir le lieu demandé, d'éliminer λ entre l'équation de la droite II' et celle de la conique mobile.

La droite MN étant un diamètre de la conique, et les droites MI et NI′ étant parallèles entre elles, les points I et I′ sont les extrémités d'un même diamètre de cette conique.

L'équation de II′ est donc de la forme

$$y + \alpha x = 0.$$

D'ailleurs l'équation de MN est

$$b^4 x + a^2 \lambda y = 0.$$

L'ensemble de ces deux droites est donc représenté par l'équation homogène

$$(b^4 x + a^2 \lambda y)(y + \alpha x) = 0. \qquad (3)$$

Il faut déterminer α.

Pour cela, nous allons former, avec l'équation de la conique mobile et celle qui représente les deux droites MI et NI′, une combinaison homogène, qui, elle aussi, représentera l'ensemble des deux droites II′ et MN ; en identifiant cette équation avec l'équation (3) nous pourrons déterminer α.

L'ensemble des deux normales peut s'écrire

$$\lambda^2(a^2\lambda^2 + b^6)y^2 + b^4(a^2\lambda^2 + b^6)x^2 + 2\lambda b^2(a^2\lambda^2 + b^6)xy - b^4c^4\lambda^2 = 0. \qquad (4)$$

La conique mobile étant

$$c^2y^2 + b^2x^2 + \lambda xy - b^2c^2 = 0,$$

multiplions cette dernière équation par $\lambda^2 b^2 c^2$ et retranchons de (4) le résultat, il vient

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^4[a^2\lambda^2 + b^6 - c^2\lambda^2]x^2 + \lambda b^2[2a^2\lambda^2 + 2b^6 - \lambda^2 c^2]xy = 0$$

ou

$$\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]y^2 + b^6[\lambda^2 + b^4]x^2 + \lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 + 2b^6]xy = 0.$$

Identifiant cette équation avec

$$a^2\lambda y^2 + \alpha b^4 x^2 + (b^4 + \alpha\lambda a^2)xy = 0$$

on a

$$\frac{\lambda^2[a^2\lambda^2 + b^6 - b^2c^4]}{a^2\lambda} = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\alpha} = \frac{\lambda b^2[a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 - 2b^6]}{b^4 + \alpha\lambda a^2}$$

de la première de ces égalités je tire

$$\alpha = \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 + c^2)]}.$$

L'équation de la droite II′ est donc

$$y + \frac{b^2(\lambda^2 + b^4)}{\lambda[\lambda^2 + b^2(b^2 - c^2)]}x = 0.$$

Eliminons maintenant λ entre cette équation et

$$b^2x^2 + \lambda xy + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$$

on a

$$\frac{b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2}{x}\left[\frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2} - b^2(c^2 - b^2)\right]$$
$$+ b^2x\left[b^4 + \frac{(b^2c^2 - b^2x^2 - c^2y^2)^2}{x^2y^2}\right] = 0$$

ou encore

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^3 - b^2x^2(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)^2$$
$$- b^2x^2y^2(c^2 - b^2)(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2) - b^6x^4y^2 = 0$$

et, après calcul,

$$[b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2][c^2(y^4 - 2b^2y^2 + b^4) - b^4x^2]$$
$$= b^4x^2y^2(b^2 - y^2).$$

Remarquant que la seconde parenthèse est une différence de deux carrés, on a

$$(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2 - c^2)[c^2(y^2b^2)^2 - b^4x^2] = b^4x^2y^2(b - y^2)$$

ou $(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)[c(y^2 - b^2)x - b^2][c(y^2 - b^2) + b^2x]$

$$= b^4x^2y^2(b^2 - y^2), \qquad (5)$$

Cette équation se présente alors sous la forme de quatre facteurs et permet ainsi de séparer le plan en régions.

Les courbes qui séparent le plan en régions sont :

1° $$b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0$$

ou $$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

C'est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de l'ellipse donnée. et dont les sommets sont les foyers de celle-ci et les sommets B et B' de cette même ellipse.

2° La parabole $cy^2 - b^2x - b^2c = 0$.

C'est la parabole qui a pour sommet le foyer F de l'ellipse, pour axe l'axe ox, et qui passe par les points B et B' ; elle est bien déterminée.

3° La parabole $cy^2 + b^2x - b^2c = 0$.

C'est la parabole qui a pour axe l'axe ox, pour sommet le point F', foyer de gauche de l'ellipse donnée, et qui passe par les points B et B' ; elle est aussi bien déterminée.

4° Les deux droites $y = b$,
$y = -b$,

ce sont les parallèles à ox. qui passent par les points B et B'.

Reportons-nous à l'équation (5).

Si $(b^2 - y^2) > 0$, le second membre est positif; le facteur $c(y^2 - b^2) - b^2x$, en supposant x positif, est positif; il faut que $(b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2)[c(y^2 - b^2) + b^2x]$ soit négatif.

Il peut donc y avoir des points de la courbe dans l'espace compris entre la parabole

$$c(y^2 - b^2) + b^2x = 0$$

et l'ellipse $$b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0.$$

Alors la courbe ne pénètre pas dans toutes les parties ombrées de la figure.

Occupons-nous maintenant de la discussion de l'équation en la considérant comme bicarrée en x.

L'équation développée s'écrit

$$b^2a^2x^2y^4 - 3b^4c^2x^2y^2 + 2b^6c^2x^2 - b^6x^4 + c^4y^6 - 3b^2c^4y^4 + 3b^4c^4y^2 - b^6c^4 = 0$$

ou, en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$b^6x^4 - b^2a^2y^4x^2 + 3b^4c^2y^2x^2 - 2b^6c^2x^2 - c^4y^6 + 3b^2c^4y^4 - 3b^4c^4y^2 + b^6c^4 = 0$$

ou

$$b^6x^4 - b^2x^2(a^2y^4 - 3b^2c^2y^2 + 2b^4c^2) - c^4y^2(y^4 - 3b^2y^2 - 2b^4) - c^4b^4(y^2 - b^2) = 0. \qquad (6)$$

Si dans cette équation on fait $x = 0$, on a

$$(y^2 - b^2)^3 = 0.$$

qui prouve que les points B et B′ sont des points triples de la courbe.

Si d'autre part on fait $y = 0$ dans l'équation (5), on a

$$(x^2 - c^2)^2 = 0,$$

qui prouve que les points F et F′ sont des points doubles; mais ce sont des points doubles isolés, car les tangentes en ces points sont imaginaires.

Tangentes horizontales. — Cherchons les points de la courbe où la tangente est horizontale. Pour cela, il faut former la dérivée par rapport à x et l'égaler à zéro.

On a $f' = 4b^3x^2 - 2b^2c^2x(y^4 - 3b^2y^2 + b^4) = 0$.

d'où d'abord la solution $x = 0$ qui indique qu'aux points B et B′ les tangentes à la courbe sont parallèles à ox.

Ayant supprimé cette solution et divisé par b^2c^2 on a

$$2b^4x^2 - c^2(y^2 - 2b^2)(y^2 - b^2) = 0,$$

qui est satisfaite pour une valeur de y comprise entre les deux droites $y = \pm b$.

La courbe ne renferme dans son équation que des puissance paires de x et de y; elle est donc symétrique par rapport aux axes de coordonnées, et l'origine est au centre.

L'équation (6) bicarrée en x^4 est

$$b^6x^4 - x^2(a^2b^2y^4 + 2b^6c^2 - 3a^2b^4y^2) - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0$$

ou $b^6x^4 - b^2(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2)x^2 - c^4(y^2 - b^2)^3 = 0.$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut avoir

$$b^4(y^2 - b^2)^2(a^2y^2 - 2b^2c^2)^2 + 4b^6c^4(y^2 - b^2)^3 \geq 0$$

ou $$b^4(y^2 - b^2)^2[a^4y^4 - 4a^2b^2c^2y^2 + 4b^2c^4y^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2[a^4y^2 - 4b^4c^2] \geq 0$$

ou $$b^4y^2(y^2 - b^2)^2(a^2y - 2b^2c)(a^2y + 2b^2c) \geq 0.$$

Pour que cette quantité soit positive, il faut et il suffit que l'on ait $\quad a^4y^2 - 4b^4c^2 \geq 0.$

Il n'y a donc pas de points de la courbe entre les deux parallèles à ox $\quad y = \pm \dfrac{2b^2c}{a^2}.$

Ces deux parallèles, construites sur la figure, sont comprises entre les deux droites $y = \pm b$.

Car la condition $\quad \dfrac{2b^2c}{a^2} \leq b$

revient à celle-ci $(b - c)^2 \geq 0$ qui est évidente.

D'ailleurs le signe de la somme des racines de l'équation bicarrée en x dépend de la qualité

$$(y^2 - b^2)(a^2y^2 - 2b^2c^2).$$

Si $y^2 - b^2$ est < 0, pour que la somme soit positive, il faut que l'on ait $\quad y^2 - \dfrac{2b^2c^2}{a^2} < 0$

ou $$y^2 < \frac{2b^2c^2}{a^2}.$$

Comparant cette quantité à b^2, posant par exemple

$$\frac{2b^2c^2}{a^2} \leq b^2,$$

on a $$2c^2 \leq a^2$$

ou $$2c^2 \leq b^2 + c^2$$

ou enfin $$c^2 \leq b^2.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer les trois cas suivants :

$$1^o \quad c^2 - b^2 > 0.$$
$$2^o \quad c^2 - b^2 = 0.$$
$$3^o \quad c^2 - b^2 < 0.$$

Premier Cas : $c^2 > b^2$.

Si $(c^2 - b^2)$ est > 0 il existe, pour toutes les valeurs de y comprises entre les parallèles $y = \pm b$, quatre valeurs réelles de x ; et, quand y^2 est $> b^2$ deux des valeurs de x seulement sont réelles ; les deux autres sont imaginaires. Les tangentes horizontales étant les deux droites

$$y = \pm \frac{2b^2c}{a^2},$$

il n'y pas de points de la courbe entre ces deux parallèles.

Tangentes aux points B *et* B'. — Pour avoir les tangentes en ces points, nous allons transporter les axes au point B, par exemple.

Pour cela il faut dans l'équation du lieu faire

$$x = X$$
$$y = Y + b ;$$

celle-ci devient

$$b^6X^4 - b^2 [(Y + b)^2 - b^2] [a^2 (Y + b)^2 - 2b^2c^2] X^2$$
$$- c^4 [(Y + b)^3 - b^2]^3 = 0$$

ou $$b^6X^4 - b^2 [Y^2 + 2bY] [a^2Y^2 - 2a^2bY + a^2b^2 - 2b^2c^2]$$
$$- c^4 [Y^2 + 2bY]^3 = 0$$

L'ensemble des termes de degré le moins élevé est

$$b^2YX^2(c^2 - b^2) - 4c^4Y^4 = 0,$$

ce qui donne d'abord la droite $Y = 0$, solution déjà trouvée ; et les deux autres tangentes sont

$$Y^2 = (c^2 - b^2) \frac{b^2}{4c^4} x^2.$$

On voit encore par là que : si $c^2 > b^2$ les tangentes en ces points sont réelles ; si $c^2 < b^2$ elles sont imaginaires. La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 1.

Deuxième Cas : $c^2 = b^2$.

Dans ce cas, les tangentes aux points B et B' sont données par l'équation $Y^3 = 0$ ou, en revenant aux anciens axes de coordonnées, $(y - b)^3 = 0$.

Ceci prouve que les parallèles à Ox menées par les points B et B′ sont des tangentes triples de la courbe.

Quand $y^2 - b^2$ est négatif, les valeurs de x sont imaginaires toutes les quatre ; et deux des valeurs de x seulement sont réelles quand $y^2 - b^2 > 0$.

La courbe a donc dans ce cas la forme que lui donne la figure 2.

TROISIÈME CAS : $c^2 < b^2$.

Quand on a $c^2 < b^2$, les tangentes aux points B et B′ autres que les droites $y = \pm b$, sont imaginaires ; car elles sont données par l'équation

$$Y^2 = (c^2 - b^2)\frac{b^2}{4c}x^2.$$

qui prouve que les parallèles menées par B et B′ à Ox sont des tangentes imaginaires de la courbe.

D'ailleurs, d'après la discussion, faite précédemment, de l'équation du quatrième degré en x, les quatre valeurs de x correspondant aux valeurs de y comprises entre les parallèles à Ox menées par les points B et B′ sont imaginaires ; et, en dehors de ces deux parallèles il y a seulement deux valeurs réelles de x. Les boucles de la figure 1 disparaissent et la courbe a encore la forme de la figure 2; mais les tangentes parallèles à Ox aux points B et B′ ne sont plus des tangentes triples de la courbe, comme dans le cas précédent.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Mettental, à Besançon.

QUESTIONS

POSÉES AUX EXAMENS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1882 (1er degré).

---

1. — *Trouver, sans employer l'équation en S, la direction des axes de la surface* $x^2 - 2yz = 1$.

L'équation étant

$f(x_1 y_1 z) = \varphi(x_1 y_1 z) + 2C x + 2C' y + 2C'' z + \mu = 0$.

les directions principales sont les génératrices communes aux deux cônes $\dfrac{\varphi'_x}{x} = \dfrac{\varphi'_y}{y} = \dfrac{\varphi'_z}{z}$

2. — *Discuter les diverses surfaces représentées par l'équation:* $z = x^2 + y^2 - 2\lambda xy + x - y + 1$
quand on suppose que λ *est variable. — Quelles sont les valeurs de* λ *pour lesquelles cette surface représente un paraboloïde elliptique?*

3. *On donne deux axes rectangulaires* ox, oy : *soit* A *un point dont les coordonnées sont* 1 *et* 2; *soit* A' *son symétrique par rapport à* o. *trouver l'équation d'une hyperbole équilatère ayant les points* AA' *pour sommets réels.*

4. — *Former le développement de* $\frac{1}{(x^2 - 1) f(x)}$. $f(x) = 0$ *ayant pour racines* $\alpha, \beta \ldots \gamma$.

5. — *Trouver, sans employer la règle de l'Hôpital, la limite de* y, $y = \frac{a^x}{x}$ *quand* x *tend vers l'infini.*

On supposera d'abord que x tend vers l'infini par des valeurs entières; soit $a = 1 + \alpha$: (α étant positif) la formule du binôme peut s'appliquer au développement de $(1 + \alpha)^x$ et il en résulte notamment

$$(1 + \alpha)^x > 1 + \alpha x + \frac{x(x-1)}{2}\alpha^2;$$

par suite $$y > \frac{1}{x} + \alpha + \frac{x-1}{2}\alpha.$$

Quand x croît au delà de toute limite, le second membre de l'inégalité précédente croît pour des raisons évidentes. au delà de toute limite. Ainsi y croît lui-même au delà de toute limite.

On examine ensuite le cas où x tend vers l'infini par des valeurs quelconques et l'on ramène ce cas au précédent en observant que tout nombre x, non entier, est toujours compris entre deux nombres entiers consécutifs. Enfin on aura à considérer le cas où x tend vers $-y$ et celui où b est plus petit que 1. On ramène sans difficulté ces différents cas au précédent.

6. — *On donne un plan par ses traces, rendre ce plan de front par une seule rotation. Nouvelle projection verticale d'un point du plan.*

7. — *Trouver l'angle de deux plans qui passent par un point* m, m', *et par deux droites* D, D' *situées dans le même plan horizontal. Résoudre la question en imaginant la construction qui exige aussi peu de lignes qu'il est possible.*

8. — *Exprimer qu'un cône est de révolution en faisant voir que ses génératrices font un angle constant avec une droite fixe passant par le sommet du cône.*

9. — *Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un des facteurs soit nul.*

La proposition est admise comme évidente pour des facteurs réels. Examinons d'abord le cas de deux facteurs imaginaires.

Soit $$U = (a + bi)(a' + b'i),$$
c'est-à-dire $$U = aa' - bb' + (ab' + ba')i;$$
si l'on suppose $U = 0$ on a donc
$$\begin{aligned} aa' - bb' &= 0 \\ ab' + ba' &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$
si a' et b' ne sont pas nuls à la fois, ces équations linéaires et homogènes en a' et b' admettent une solution différente de zéro ; le déterminant $$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$$
doit être nul, ainsi $$a^2 + b^2 = 0,$$
d'où $$a = 0 \quad b = 0.$$

Réciproquement, si $a = 0$, les équations (1) sont vérifiées et l'on a $U = 0$.

Il reste à généraliser cette proposition et à l'étendre à un produit de p facteurs imaginaires ; p étant un nombre entier quelconque. Ceci se fait sans difficulté en multipliant *successivement* les facteurs du produit.
$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \ldots (a_p + b_p i)$$
jusqu'à ce qu'on trouve un résultat nul. A cet instant on applique la remarque faite tout à l'heure, pour deux facteurs.

10. — *Condition pour que les deux faisceaux*
$$Ax^2 + + 2Bxy + Cy^2 = 0$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$$
soient harmoniques.

En coupant par la droite $y = 1$ en deux équations du second degré dont les racines $\alpha\beta$. pour la première ; $\alpha'\beta'$. pour l'autre, satisfont à la relation

$$2\left(\alpha\beta + \alpha'\beta'\right) = \left(\alpha + \alpha'\right)\left(\beta + \beta'\right).$$

on trouve ainsi les conditions

$$2BB' = AC' + CA'.$$

ERRATUM

A la fin de la page 128 et pour la suivante corriger et remplacer la fin de l'article par ce qui suit :

or les deux premières relations donnent comme valeurs proportionnelles de α, β, γ, les expressions

$$l\left(-lA + mB + nC\right)$$
$$m\left(lA - mB + nC\right)$$
$$n\left(lA + mB - nC_1\right)$$

que je représente par

$$l.L$$
$$m.M$$
$$n.N$$

donc le lieu du centre a pour équation

$$\sqrt{A_1.L} + \sqrt{B_1.M} + \sqrt{C_1.M} = 0,$$

ce qui prouve : que le lieu est une conique tangente aux trois droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés du triangle primitif ; nous laissons au lecteur le soin de fixer en détail la situation et la forme du lieu géométrique ; notre seul but était d'indiquer un procédé qui peut servir dans beaucoup de questions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 15542-2

CONDITIONS DE RÉALITÉ

DE TOUTES LES RACINES D'UNE ÉQUATION

Par M. **Walecki**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

1. — Je me propose de déduire ces conditions du théorème de Rolle, sans faire usage de l'énoncé du théorème de Sturm.

Soit $f(x)$ le premier membre d'une équation algébrique, $f'(x)$ sa dérivée, Q le quotient et $-\varphi(x)$ le reste de leur division.

Théorème. — *Si* f(x) *a toutes ses racines simples et réelles, et son premier terme positif, il en est de même pour* φ(x) ; *et les racines de* φ *séparent celles de* f'.

Soient α, β ... λ, les $m - 1$ racines, par ordre croissant, de f' ; en vertu du théorème de Rolle, elles séparent celles de f et les deux suites identiques

$$f(\alpha),\ f(\beta)\ \ldots\ f(\lambda) \qquad (1)$$

$$-\varphi(\alpha),\ -\varphi(\beta)\ \ldots\ -\varphi(\lambda) \qquad (2)$$

ne présentent que des variations. Cette propriété de la dernière suite montre que φ est de degré $m - 2$ et a toutes ses racines réelles. De plus, les racines de f' séparent et limitent les racines de φ.

Pour reconnaître le signe du premier terme de φ, je remarque que $f(\lambda)$ est négatif, car entre λ et $+\infty$ il y a une seule racine de f, donc $\varphi(\lambda)$ est positif; comme λ est limite supérieure des racines de φ, le premier terme de φ est positif, *c.q.f.d.*

La démonstration qui précède suppose seulement que f et f' sont de degrés consécutifs, et que les racines de f' séparent celles de f.

Ceci posé, je remarque que le premier terme de f' est positif, j'opère sur f' et φ comme sur f et f' et je forme une suite complète de polynômes

$$f \quad f' \quad R_{m-2} \quad R_{m-3}\ \ldots\ R_0$$

de degrés marqués par leurs indices.

Chacun de ces polynômes a ses racines réelles, séparées

par celles du suivant. La démonstration précédente montre que tous les premiers termes sont positifs. En l'écrivant on a $m - 1$, conditions qui sont nécessaires pour la réalité des racines de f.

2. — Je dis maintenant que ces conditions sont suffisantes. Je les suppose réalisées.

Soient $f(x)$, $f'(x)$ et $\varphi(x)$ trois consécutifs quelconques de ces polynômes, je suppose qu'on ait démontré que les racines de f' sont réelles, simples et séparées par celles de φ; je dis que les racines de f sont toutes réelles et séparées par celles de f'.

En effet, par les mêmes notations que précédemment, la suite (2) ne présente que des variations, donc aussi la suite (1); et f a au moins $m - 2$ racines réelles. D'ailleurs $\varphi(\lambda)$ est positif, puisque λ est limite supérieure des racines de φ, donc $f(\lambda)$ est négatif, et *comme son premier terme est positif*, f a une autre racine au delà de λ, et par suite aussi une inférieure à α. f a donc toutes ses racines réelles et séparées par celles de f'.

D'ailleurs sur l'égalité $R_2 = R_1Q_1 - R_0$, on voit immédiatement que R_2 a ses racines réelles, séparées par celle de R_1; donc le théorème est vrai pour R_3, R_4 et ainsi de suite jusqu'à $f(x)$ qui a donc toutes ses racines réelles, *c. q. f. d.*

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ(*)

Par M. **G. de Longchamps**.

1. — Soit,

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (1)$$

l'équation proposée ; désignons par x_1, x_2, x_3, x_4, ses quatre racines. Sur une droite indéfinie D, et à partir d'une origine O,

---

(*) Hermite, *Journal de Boschardt*, t. 52.

Darboux, *Journal des mathématiques pures et appliquées*, t. 18, p. 220.

Mathieu, mémoire sur la résolution des équations, *Annali di mathematica pura ed applicata*, t. IV, 1862.

C'est par erreur que cette indication bibliographique a été donnée, dans le numéro de juillet (*Math. elém.*), à propos des équations quadratiques ; elle se rapporte à l'équation du quatrième degré.

portons ces valeurs dans le sens indiqué par leurs signes : on obtiendra quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Si sur $A_1 A_2$ comme diamètre on décrit un cercle $\Delta_{1.2}$, on obtiendra ainsi, en combinant les points deux à deux, six cercles ; et si l'on désigne par $O_{12.34}$ le point où l'axe radical des deux cercles $\Delta_{12.}$ Δ_{34} coupe la droite D, on obtiendra ainsi trois points $O_{12.34}$, $O_{13.24}$, $O_{14.23}$; la connaissance de ces points dépend d'une équation du troisième degré que nous allons former et qui est une résolvante de l'équation donnée.

2. — Cherchons quelle relation doit exister entre les coefficients de l'équation (1) pour que les racines puissent se séparer en deux groupes : x_1, x_2 d'une part ; x_3, x_4 d'autre part, ces nombres satisfaisant à la même équation homographique en involution. Supposons que l'on ait les relations

$$x_1x_2 - \lambda(x_1 + x_2) + \mu = 0$$
$$x_3x_4 - \lambda(x_3 + x_4) + \mu = 0$$

et cherchons la relation qui en résulte pour les coefficients de l'équation donnée.

Ces relations peuvent s'écrire

$$(x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) = \lambda^2 - \mu$$
$$(x_3 - \lambda)(x_4 - \lambda) = \lambda^2 - \mu,$$

si l'on pose $$x - \lambda = X.$$

L'équation $f(X + \lambda) = 0$ a donc quatre racines telles que le produit de deux d'entre elles, convenablement choisies, est égal au produit des deux autres. Or on a, par un développement connu,

$$f(X + \lambda) = f(\lambda) + Xf'(\lambda) + \frac{X^2}{1.2}f''(\lambda) + \frac{X^3}{1.2.3}f'''(\lambda) + \frac{X^4}{1.2.3.4}f''''(\lambda) ;$$

d'ailleurs, $$f'(\lambda) = 4A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 2C\lambda + D$$

$$\frac{1}{2}f''(\lambda) = 6A\lambda^2 + 3B\lambda + C$$

$$\frac{1}{6}f'''(\lambda) = 4A\lambda + B$$

$$\frac{1}{24}f''''(\lambda) = A$$

On sait aussi, et l'on vérifie facilement que si l'équation

$$A'X^4 + B'X^3 + C'X^2 + D'X + E' = 0$$

a quatre racines X_1, X_2, X_3, X_4, telles que $X_1 X_2 = X_3 X_4$, on a, entre les coefficients, la relation

$$A'D'^2 = B'^2E'.$$

La relation cherchée est donc

$$A(4A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 2C\lambda + D)^2$$
$$= (4A\lambda + B)^2(A\lambda_4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E).$$

Développons les calculs : on peut observer que les termes en λ^6, λ^5 et λ^4 disparaissent, et l'on obtient finalement le résultat suivant :

(A) $$H\lambda^3 + I\lambda^2 + J\lambda + K = 0$$

en posant

(B) $$\begin{cases} H = 8A^2D - 4ABC + B^3 \\ I = 16A^2E + 2ABD + B^2C - 4AC^2 \\ J = 8ABE + B^2D - 4ACD \\ K = B^2E - AD^2. \end{cases}$$

Si l'on peut déterminer λ par cette équation du troisième degré, alors l'équation en X devient quadratique et se décompose, comme l'on sait, en deux équations du second degré. Enfin, on aura les racines cherchées par la relation

$$x = X + \lambda.$$

3. — On peut faire ici plusieurs remarques. On voit d'abord comment les considérations géométriques du § 1 conduisent naturellement à l'équation (A) et, au fond, le problème d'algèbre que nous avons résolu en la formant, se trouve naturellement indiqué quand on cherche à déterminer les trois centres d'involution qui correspondent à quatre points arbitrairement pris sur une droite.

L'équation (1) sera quadratique toutes les fois qu'on pourra trouver une racine de l'équation (A). Deux cas particuliers se présentent immédiatement : 1° celui qui correspond à l'hypothèse $K = 0$ et pour lequel on a une racine nulle dans (A); 2° le cas de $H = 0$ qui donne pour λ une racine infinie. Dans le premier cas on a $x_1 x_2 = x_3 x_4$; dans l'autre $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Nous avons (*) examiné ces deux

(*) Voir le journal de *Math. Élém.*, p. 156 et 169.

cas remarquables et montré qu'en effet, dans l'une et l'autre de ces hypothèses, l'équation du quatrième degré pouvait se résoudre par les équations du second degré seulement.

4. — Parmi les méthodes connues pour résoudre les équations du quatrième degré, celles de Ferrari et de Lagrange doivent leur succès (*) « *à cette seule circonstance que l'on peut former des fonctions de quatre variables qui n'ont que trois valeurs* ». La méthode que nous venons d'exposer rentre dans cette idée générale. En effet, l'inconnue auxiliaire λ que nous avons introduite, la racine de la résolvante, jouit de la propriété de satisfaire à la relation

$$(x_1 - \lambda)(x_2 - \lambda) = (x_3 - \lambda)(x_4 - \lambda)$$

ou

$$\lambda = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Or avec quatre lettres x_1, x_2, x_3, x_4, on ne peut former que trois valeurs analogues à λ ; donc *à priori* l'équation en λ doit être du troisième degré seulement.

Cette manière d'envisager la résolution algébrique des équations, et qui est celle qui a dirigé les travaux de Lagrange et d'Abel lorsque le premier a cherché la résolution algébrique des équations et l'autre lorsqu'il a établi, le premier, l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations d'un degré supérieur à quatre, cette manière, disons-nous, met en lumière ce fait que nous voulons signaler ici, savoir *qu'il existe une infinité de résolvantes du troisième degré pour l'équation du quatrième degré*. Si nous désignons, en effet, par y une fonction des lettres x_1, x_2, x_3, x_4, tellement choisie que, en posant

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

le symbole d'opération désigné par f ne donne pour y que trois valeurs quand on permute les indices 1, 2, 3, 4, de toutes les façons possibles; il est d'abord acquis que l'équation en y doit être du troisième degré seulement. De plus c'est une résolvante : il faut entendre par là que si l'on peut déterminer une seule racine de cette équation, la résolution de l'équation proposée peut être effectuée par la résolution d'équations de degré moindre. Ce fait est démontré dans

(*) Serret, *Algèbre sup.*, t. II, p. 479.

tous les cours de mathématiques spéciales quand on traite de *l'abaissement des équations*. A toute forme algébrique f, définie comme nous venons de le faire, correspond donc une résolvante.

5. — Dans la méthode de Ferrari on pose

$$y = x_1x_2 + x_3x_4;$$

dans celle de Lagrange,

$$z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4;$$

dans celle que nous venons d'exposer,

$$\lambda = \frac{x_1x_2 - x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Mais il est bien évident que le symbole f peut être choisi d'une infinité de façons différentes. Si l'on pose, par exemple,

$$Y = \alpha y + \beta z + \gamma\lambda$$

et si l'on fait subir aux indices la permutation circulaire, les fonctions y, z, λ ne prennent que trois valeurs ; ainsi Y prendra seulement trois valeurs et la connaissance de Y dépend d'une équation du troisième degré.

6. — La liaison qui existe entre le paramètre introduit et l'idée géométrique qui a inspiré cette méthode peut encore se mettre en évidence ainsi qu'il suit. Imaginons que la droite D du § 1 soit prise pour axe des x, soit O l'origine des coordonnées que nous supposons d'ailleurs rectangulaires. Le cercle $\Delta_{1.2}$ a pour équation

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

ou $$x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0.$$

De même, le cercle $\Delta_{3.4}$ a pour équation

$$x^2 + y^2 - x(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 0.$$

L'axe radical de ces deux cercles est donc

$$x(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$$

d'où $$x = \lambda.$$

Ainsi l'équation en λ que nous avons formée, la résolvante de l'équation (1) a pour racines les distances de l'origine aux trois axes radicaux des cercles Δ, combinés deux à deux.

7. — En supposant que l'équation considérée ait été débar-

rassée de son second terme, et mise sous la forme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

la résolvante, d'après les formules (A) et (B), est

$$8q\lambda^3 + 4(4r - p^2)\lambda^2 - 4pq\lambda - q^2 = 0. \qquad (1)$$

Celle que donne la méthode de Ferrari est

$$y^3 - py^2 - 4ry + 4pr - q^2 = 0. \qquad (2)$$

Enfin la méthode de Lagrange conduit à la résolvante

$$z^3 + 8pz^2 + 16(p^2 + 4r)z - 64q^2 = 0. \qquad (3)$$

Ces trois équations sont, à peu de chose près, et au point de vue des calculs que nécessiterait l'une ou l'autre de ces équations, d'une simplicité égale. Nous voulons seulement faire remarquer ici que ces trois équations peuvent, par un simple changement d'inconnue, être ramenées l'une à l'autre. Il y a, avons-nous dit tout à l'heure, une infinité de résolvantes; mais ces résolvantes en nombre infini rentrent-elles toujours et nécessairement les unes dans les autres? Peut-on toujours par une transformation rationnelle et homographique passer d'une résolvante à une autre? Par suite ces méthodes diverses de Ferrari, de Lagrange, celle que nous exposons, sont-elles vraiment distinctes et indépendantes? Sont-elles au contraire tellement liées les unes aux autres que, bien que partant de points qui diffèrent, à l'infini, d'après la loi qui unit l'inconnue auxiliaire aux quatre racines de l'équation donnée, elles aboutissent toutes à des équations pouvant se déduire les unes des autres? Ce sont là des points qui, à notre connaissance, n'ont pas encore été soulevés et que nous ne voulons pas examiner en ce moment. Mais il est facile de reconnaître que les équations (1), (2), (3) ont une dépendance telle que l'on peut passer de l'une à l'autre et comme nous allons le montrer.

Considérons d'abord l'équation (1); on peut l'écrire

$$4\lambda^2(2q\lambda + 4r) = (2p\lambda + q)^2$$

et en posant

$$\frac{2p\lambda + q}{2\lambda} = \theta$$

on trouve, par cette transformation homographique (*):

(*) Une transformation algébrique entre deux inconnues u, v, est dite homographique lorsque ces inconnues satisfont à la relation homographique

$$\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0.$$

$$\theta^3 - p\theta^2 - 4r\theta + 4pr - q^2 = 0$$

c'est-à-dire, précisément, l'équation (2).

Prenons de nouveau l'équation (1) et transformons-la en posant $\lambda\mu = 2q$.

On trouve, pour l'équation en μ,

$$\mu^3 + 8p\mu^2 + 16\mu(p^2 - 4r) - 64q^2 = 0\,;$$

c'est bien la résolvante donnée par la méthode de Lagrange.

8. — Nous ferons remarquer en terminant cette note que la méthode que nous venons d'exposer, présente une propriété que nous allons développer et qui rend cette méthode d'une application commode.

Désignons par a, b, c, les trois racines de l'équation (1), on a donc
$$a = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}.$$

Mais on suppose $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,

par suite
$$a = \frac{x_1 x_2 + x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{2(x_1 + x_2)}$$

ou encore
$$2a = \frac{(x_3 + x_1)(x_3 + x_2)}{x_1 + x_2}.$$

On trouve de même
$$2b = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 + x_3)}{x_1 + x_3}$$
$$2c = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)}{x_2 + x_3}.$$

De ces équations on tire
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{bc}$$
$$\frac{x_1 + x_3}{2} = \sqrt{ac}$$
$$\frac{x_2 + x_3}{2} = \sqrt{ab}$$

et finalement
$$x_1 = \sqrt{bc} + \sqrt{ac} - \sqrt{ab}$$
$$x_2 = \sqrt{bc} + \sqrt{ab} - \sqrt{ac}$$
$$x_3 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc}$$

et
$$x_4 = -\sqrt{ab} - \sqrt{ac} - \sqrt{bc}.$$

Exemple. — Soit proposé de résoudre l'équation

$$x^4 + 42x^2 - 160x + 441 = 0.$$

Notre résolvante est

$$\lambda^3 - 21\lambda + 20 = 0.$$

On a donc, $a = 1 \quad b = 4 \quad c = -5$

et, par nos formules,

$$x_1 = 2 + \sqrt{-5}$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{-5}$$
$$x_3 = -2 + 3\sqrt{-5}$$
$$x_4 = -2 - 3\sqrt{-5}$$

On peut vérifier qu'en effet on a bien

$$x^4 + 42x^2 - 160x + 441 = (x^2 - 4x + 9)(x^2 + 4x + 49).$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1882

Mathématiques spéciales.

Par un point quelconque P *pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en* O, *on mène trois normales qui la rencontrent aux points* A, B, C ; *les longueurs* PA, PB, PC, PO *étant représentées respectivement par* a, b, c, l, *on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont* $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, *et d'indiquer les signes des racines d'après la position du point* P *dans les diverses régions du plan.*

1. — *Recherche de l'équation du troisième degré.*

Posons $z = l^2 - a^2$

et désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point P ; par x, y celles du point A. On a

$$z = x_0^2 + y_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$$

ou $$z = 2x_0x + 2y_0y - x^2 - y^2. \qquad (1)$$

D'autre part, les coordonnées x, y satisfont à l'équation de la parabole, $$y^2 - 2px = 0 \qquad (2)$$

et à celle du cercle qui passe par les pieds des trois normales. On sait que cette équation est

$$x^2 + y^2 - x(x_0 + p) - \frac{yy_0}{2} = 0. \qquad (3)$$

L'équation en z s'obtiendra en éliminant x et y entre (1), (2) et (3); nous pourrons d'ailleurs considérer aussi l'hyperbole équilatère aux pieds des normales, courbe qui a pour équation

$$p(y_0 - y) + y(x_0 - x) = 0. \qquad (4)$$

Les équations (1) et (3) donnent d'abord

$$x(x_0 - p) + \frac{3}{a} yy_0 - z = 0$$

et, par combinaison avec (2),

$$y^2(x_0 - p) + 3py_0y - 2pz = 0. \qquad (A)$$

D'autre part les équations (2) et (4) donnent

$$y^3 - 2p(x_0 - p)y - 2p^2y_0 = 0$$

et, par combinaison avec (A),

$$3y_0y^2 + 2\left\{(x_0 - p)^2 - z\right\}y + 2py_0(x_0 - p) = 0. \qquad (B)$$

Il nous reste à éliminer y entre (A) et (B) et cette élimination se fait immédiatement, par une règle connue, règle qui donne ici

$$2p\left[(x_0 - p)^2y_0 + 3y_0z\right]^2 = \left[2(x_0 - p)^3 - 9py_0^2 - 2(x_0 - p)z\right]$$
$$\left[6py_0(x_0 - p) + 2(x_0 - p)z - 2z^2\right].$$

ou, après avoir supprimé le terme $18py_0^2z^2$, dans les deux membres; après avoir alors divisé l'équation entière par $(x_0 - p)$, et réduit celle-ci en l'ordonnant, on a finalement

$$z^3 - 2(x_0 - p)^2z^2 + (x_0 - p)\left\{(x_0 - p)^3 - 9py_0^2\right\}z$$
$$+ \frac{py_0^2}{4}\left\{4(x_0 - p)^3 - 27py_0^2\right\} = 0. \qquad (C)$$

C'est l'équation demandée.

2. —*Discussion de l'équation, au point de vue de la réalité des racines.*

Quand on donne x_0y_0 l'équation (C) fait connaître les nombres $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$; cherchons dans quelles régions du plan il faut placer le point P pour que les racines de (C) soient réelles, coïncidentes ou imaginaires.

On pressent bien que la parabole cubique, enveloppe des normales, doit être nécessairement l'une des courbes de séparation; mais nous voulons le vérifier par la discussion directe de l'équation trouvée; nous voulons aussi nous assurer qu'il n'y a pas d'autre courbe de séparation, pour la réalité des racines.

Pour abréger les calculs, nous poserons

$$\alpha = \frac{2}{3}\ (x_0 - p) \qquad \beta = py_0^2.$$

L'équation est alors

$$z^3 - \frac{9\alpha^2}{2}\ z^2 + \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{27\alpha^3}{8} - 9\beta\right)z + \frac{\beta}{4}\left(\frac{27\alpha^3}{2} - 27\beta\right) = 0.$$

Changeons d'inconnue et faisons disparaître le terme du second degré en posant

$$z = t + \frac{3\alpha^2}{2}.$$

Il vient, après réduction,

$$t^3 - \frac{27}{16}\ \alpha(\alpha^3 + 8\beta)\ t + \frac{27}{32}\ \alpha^6 - \frac{27 \cdot 5}{8}\ \alpha^3\beta - \frac{27\beta^2}{4} = 0,$$

ou, en supposant $\qquad t = \frac{3\theta}{2},$

$$\theta^3 - \alpha(\alpha^3 + 8\beta)\ \frac{3\theta}{4} + \frac{\alpha^6}{4} - 5\alpha^3\beta - 2\beta^2 = 0. \quad (D)$$

La réalité des racines de cette équation dépend du signe de V en posant

$$4^3 \,.\, V = (\alpha^6 - 20\ \alpha^3\beta - 8\beta^2)^2 - \alpha^3(\alpha^3 + 8\beta)^3.$$

Comme V s'annule nécessairement, nous l'avons fait remarquer plus haut, lorsque le point x_0y_0 est situé sur la parabole cubique, courbe dont l'équation est

$$\frac{8(x - p)^3}{27} = py^2$$

ou, dans notre notation $\qquad \alpha^3 = \beta$

nous poserons $\qquad \alpha^3 - \beta = u$

et l'on peut écrire

$$4^3V = (u^2 - 18\beta u - 27\beta^2)^2 - (\beta + u)\ (u + 9\beta)^3.$$

En développant les calculs indiqués et réduisant les termes semblables on obtient $\qquad V = -u^3\beta$

ou $$V = -py_0^2 \left\{ \frac{8(x_0 - p)^3}{27} - py_0^2 \right\}$$

Les trois racines sont réelles si l'on a

$$V < 0$$

ou $$-\frac{8(p - x_0)^3}{27} - py_0^2 > 0.$$

Il y a deux racines imaginaires si l'on suppose $V > 0$, c'est-à-dire $\frac{8(x_0 - p)^3}{27} - py_0^2 < 0$.

Enfin, il y a deux racines égales lorsqu'on a $V = 0$, ce qui peut arriver de deux façons, suivant que le point P est situé sur la parabole cubique, ou sur la droite $y_0 = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de x.

3. — *Discussion de l'équation au point de vue des signes des racines.*

Construisons les trois paraboles cubiques R, R′, R″ qui ont respectivement pour équation.

$$py^2 = \frac{8}{27} (x - p)^3$$

$$py^2 = \frac{4}{27} (x - p)^3$$

$$py^2 = \frac{3}{27} (x - p)^3.$$

Ces courbes ont la forme bien connue et qu'indique la figure; elles ont pour sommet commun le point S dont les coordonnées sont p et o. Ecartons, pour un instant, l'hypothèse où le point donné P est situé sur l'axe $x'x$ de la parabole. Il résulte du théorème de Descartes, lorsqu'on l'applique au cas où l'équation considérée a toutes ses racines réelles, que si P est placé dans la région $R' S R'_1 x$, il y a deux racines positives et une racine négative. Dans la région $(R'SR'_1 . R''SR''_1)$, le point P donnera au contraire deux racines négatives et une positive. Enfin si l'on suppose que P est placé dans la région $x'SR''R''_1$, l'équation n'a plus qu'une racine réelle; cette racine étant de signe contraire à son dernier terme, celui-ci étant négatif, la racine réelle est donc toujours positive.

Enfin dans le cas particulier où $y_0 = 0$, on aperçoit une racine nulle, résultat évident *a priori* et deux autres racines égales et positives $z = (x_0 - p)^2$. On vérifie facilement que si d'un point pris sur l'axe de la parabole on mène à cette courbe les normales qui sont de longueur a, on a bien, en effet,

$$l^2 - a^2 = (x_0 - p)^2.$$

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES

ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E.-J. Boquel.**

(*Suite*, voir p. 134.)

— *Équation de la droite de l'infini.* — Rappelons d'abord sommairement par quelles considérations géométriques on est conduit à considérer tous les points à l'infini dans un plan comme situés en ligne droite.

Au début de la géométrie descriptive, on montre dans tous les cours que *la perspective (ou projection conique) d'une droite sur un plan quelconque est une ligne droite, et que, réciproquement, toute ligne plane dont le plan ne passe pas par le point de vue, et dont la perspective est une droite, est elle-même une ligne droite.*

Cela posé, considérons un plan P et un autre plan quelconque Q non parallèle à P; si d'un point S, extérieur aux plans P et Q, on mène un plan R parallèle à P, ce plan R coupe le plan Q suivant une certaine droite Δ ; si l'on considère le point S comme un point de vue, et le plan Q comme un tableau, toute ligne droite menée de S à un point situé à l'infini dans le plan P est parallèle à ce plan, et par conséquent se trouve contenue dans le plan R; cette ligne perce donc le tableau en un point de Δ : donc tous les points qui sont à l'infini dans le plan P ont leur perspective sur la droite Δ; donc, en vertu de la remarque faite au début, ces points doivent être considérés comme situés sur une même ligne droite.

On voit de plus que la direction de la droite de l'infini doit être regardée comme indéterminée; car le raisonnement qui précède est indépendant de cette direction.

La droite de l'infini devant rencontrer les axes de référence en des points à l'infini, nous partirons de ce fait évident pour en chercher l'équation.

Nous avons vu que les trois coordonnées trilinéaires d'un même point satisfont à la relation

$$\frac{a\alpha}{\lambda} + \frac{b\beta}{\mu} + \frac{c\gamma}{\nu} = 2S$$

ou, ce qui est la même chose, à la relation

$$\frac{\alpha \sin A}{\lambda} + \frac{\beta \sin B}{\mu} + \frac{\gamma \sin C}{\nu} = \frac{S}{R}.$$

On peut donc dire, en général, que les trois coordonnées trilinéaires d'un même point sont unies par une relation de la forme

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = k. \qquad (1)$$

Il suffit pour cela de poser

$$\lambda = \frac{ak}{2mS}, \ \mu = \frac{bk}{2nS}, \ \nu = \frac{ck}{2pS}.$$

Une droite quelconque du plan est représentée par une équation de la forme

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = o. \qquad (2)$$

Si l'on y fait $\alpha = o$, pour avoir le point où cette droite rencontre l'axe de référence BC, il viendra

$$N\beta + P\gamma = o \qquad (3)$$

et la condition (1) devient dans ce cas

$$n\beta + p\gamma = k$$

On en tire

$$\gamma = \frac{k - n\beta}{p},$$

d'où en substituant dans (3)

$$N\beta + P\frac{R - n\beta}{p} = o,$$

ou

$$\beta(Np - nP) + Pk = o.$$

Pour que le point dont il s'agit se transporte à l'infini sur BC, il faut et il suffit qu'on ait

$$Np - nP = o, \qquad \text{d'où} \quad \frac{N}{n} = \frac{P}{p}.$$

On reconnaît de même que, pour que les points de rencontre de la droite (2) avec les deux autres axes de référence soient à l'infini, il faut qu'on ait

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n}, \qquad \text{et} \quad \frac{M}{m} = \frac{P}{p}.$$

On a donc

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{n} = \frac{P}{p} = \rho$$

et l'équation de la droite de l'infini est alors

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0. \qquad (4)$$

Si l'on part de la condition

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{S}{R}$$

où les paramètres de référence sont supposés égaux à l'unité, l'équation de la droite de l'infini prend la forme

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0. \qquad (5)$$

— *Condition de parallélisme de 2 droites.* — Pour utiliser immédiatement ce qui précède, nous ferons observer que les droites parallèles à une droite donnée $M\alpha + N\beta\ P\gamma = 0$ doivent passer par la rencontre de cette droite avec la droite de l'infini. Or, comme en coordonnées cartésiennes l'équation générale des droites passant par l'intersection de deux droites données $D = 0$ et $D' = 0$ est $D + \lambda D' = 0$ (même démonstration que dans le système de Descartes), les droites parallèles à la droite $M\alpha + N\beta + P\gamma = 0$ sont donc comprises dans l'équation $M\alpha + N\beta + P\gamma + \lambda\,(m\alpha + n\beta + p\gamma) = 0$. ou, ce qui est la même chose,

$$M\alpha + N\beta + P\gamma + \lambda k = 0,$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Pour qu'une droite $M'\alpha + N'\beta + P'\gamma = 0$ soit parallèle à une droite donnée, il faut que son équation puisse être comprise dans l'équation générale ci-dessus.

On a donc les conditions

$$\frac{M'}{M + \lambda m} = \frac{N'}{N + \lambda n} = \frac{P'}{P + \lambda p},$$

et l'élimination de λ entre ces deux relations donnera la condition de parallélisme que l'on cherche.

L'emploi direct des coordonnées trilinéaires est beaucoup moins avantageux dans l'étude des propriétés métriques que dans celle des propriétés descriptives des figures ; c'est pourquoi nous n'insisterons pas sur l'établissement des formules relatives aux relations de longueurs ; lorsqu'on a besoin de quelqu'une de ces formules, on peut toujours, d'ailleurs, l'obtenir immédiatement en partant de la formule correspondante en coordonnées cartésiennes, que l'on trans-

forme dans le système des coordonnées trilinéaires au moyen des relations que nous avons démontrées. Prenons un exemple, afin de bien éclaircir le procédé.

— *Distance d'un point à une droite.* — Soient la droite $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, et le point $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. L'équation de la droite en coordonnées cartésiennes rectangulaires s'obtiendra en remplaçant α, β, γ par les valeurs

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}} (Ax + By + C)$$

$$\beta = \frac{\mu}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} (A'x + B'y + C')$$

$$\gamma = \frac{\nu}{\sqrt{A''^2 + B''^2}} (A''x + B''y + C'').$$

Elle sera donc, en désignant pour abréger par K, K', K'' les coefficients des fonctions linéaires dans les seconds nombres,

$$mK(Ax + By + C) + nK'(A'x + B'y + C') + pK''(A''x + B''y + C'') = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées cartésiennes du point $(\alpha_0\, \beta_0\, \gamma_0)$; la distance de ce point à la droite est exprimée par la formule :

$$\delta = \frac{mK(Ax_0 + By_0 + C) + nK'(A'x_0 + B'y_0 + C') + pK''(A''x_0 + B''y_0 + C'')}{\pm\sqrt{(AmK + A'nK' + A''pK'')^2 + (BmK + B'nK' + B''pK'')^2}}$$

Mais, en vertu des formules générales de transformation, on a

$$\alpha_0 = K\,(Ax_0 + By_0 + C),\ \beta_0 = K'\,(A'x_0 + B'y_0 + C')$$
$$\gamma_0 = K''\,(A''x_0 + B''y_0 + C''),$$

et par conséquent

$$\delta = \frac{m\alpha_0 + n\beta_0 + p\gamma_0}{\pm\sqrt{(AmK + A'nK' + A''pK'')^2 + (BmK + B'nK' + B''pK'')^2}}$$

Dans le système particulier où les paramètres de référence sont $\lambda = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\mu = \sqrt{A'^2 + B'^2}$, $\nu = \sqrt{A''^2 + B''^2}$, on a $K = K' = K'' = 1$, et la formule se réduit à

$$\delta = \frac{m\alpha_0 + n\beta_0 + p\gamma_0}{\sqrt{(Am + A'n + A''p)^2 + (Bm + B'n + B''p)^2}}.$$

On pourra déduire de cette manière, toutes les fois que cela sera utile, les formules en coordonnées trilinéaires des formules correspondantes en coordonnées cartésiennes.

— *Corollaire : Transformation des coordonnées trilinéaires.* — Si l'on veut passer d'un système de coordonnées trilinéaires à un autre système de coordonnées trilinéaires, il est clair qu'on devra connaître les équations dans le premier système des côtés du nouveau triangle de référence A'B'C'.

Soient donc $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$, $a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = 0$ les équations respectives des côtés B'C', A'C' et A'B'; les distances d'un point quelconque du plan $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ à ces trois droites étant déterminées par la formule 2 établie plus haut, et leurs signes étant fixés par une discussion préalable, si λ' μ' ν' sont les nouveaux paramètres de référence, les formules de transformation seront

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha'_1 = \dfrac{\lambda'}{q}(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) \\ \beta'_1 = \dfrac{\mu'}{q'}(a'\alpha_1 + b'\beta_1 + c'\gamma_1) \\ \gamma'_1 = \dfrac{\nu'}{q''}(a''\alpha_1 + b''\beta_1 + c''\gamma_1) \end{array}\right.$$

où q, q', q'' désignent les radicaux respectifs qui entrent dans les distances d'un point aux trois côtés du nouveau triangle de référence. (*A suivre.*)

QUESTIONS D'EXAMEN

Premier degré (1882).

11. — *Construire la courbe*

$$y = \sqrt[3]{1 + x^5} - \sqrt[5]{1 + x^3}.$$

Cette fonction y est toujours finie et bien déterminée. On cherchera l'intersection de la courbe avec l'axe des x; on trouvera : 1° trois racines infinies; 2° trois racines nulles; 3° trois racines égales à — 1.

L'équation $(1 + x^3)^5 = (1 + x^5)^3$

débarrassée de ces racines donne l'équation réciproque du sixième degré

$$5x^6 - 15x^5 + 27x^4 - 31x^3 + 27x^2 - 15x + 5 = 0$$

et en posant $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{z}$,

$$z^3 - 12z^2 + 15z - 5 = 0.$$

En transformant cette équation de façon à faire disparaître les termes du second degré, en posant

$$z = t + 4$$

on trouve $t^4 - 33t - 73 = 0$

qui a deux racines imaginaires. Quant à la racine réelle, comme elle est plus grande que $\frac{1}{2}$, elle ne donne pour x que des valeurs imaginaires. On voit enfin que pour de très grandes valeurs de x, positives ou négatives, y est positif. La courbe a donc la forme qu'indique la figure ci-jointe.

12. — *Construire la courbe*

$$\rho = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

Reconnaître que c'est une strophoïde.

13. — *On donne un cercle et un rayon fixe* OB ; OA *étant un rayon mobile, trouver le lieu décrit par le centre des hauteurs du triangle* AOB.

Ce lieu est une strophoïde ayant pour sommet le point A et pour asymptote la tangente au point A′ diamétralement opposé à A. On reconnaît géométriquement ce résultat en observant que la droite qui va du point A au centre des hauteurs, forme avec la perpendiculaire abaissée de O sur AB et la perpendiculaire Oy à OA un triangle isoscèle.

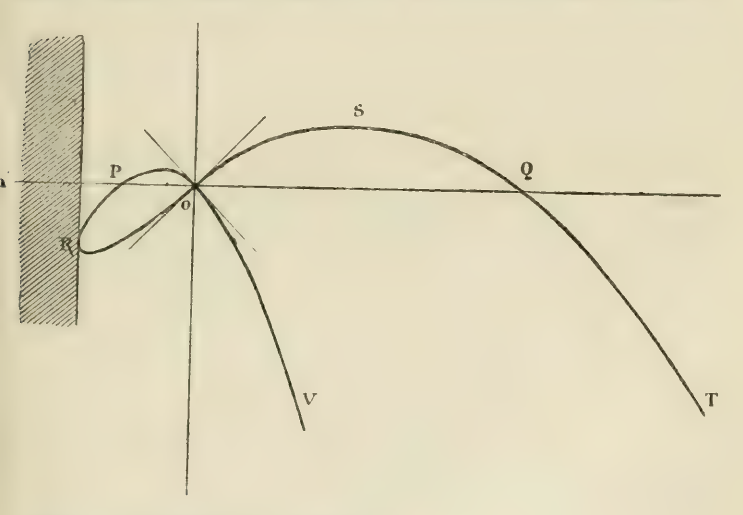
14. — *Construire la courbe*

$$y = -\frac{x^2}{2} \pm x\sqrt{x + 1}.$$

Si l'on prend explicitement le radical avec le signe +, on aura une fonction y bien déterminée, réelle pour toutes les valeurs de x supérieures à — 1 ; on obtient une première branche de courbe ROSQT, qui, au point $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}$

est tangente à la droite $x = -1$, qui passe par l'origine tangentiellement à la première bissectrice et présente en ce point une inflexion. Cette branche coupe l'axe des x à une distance de l'origine $OQ = 2 + 2\sqrt{2}$, puis se dirige à l'infini, avec une forme parabolique dont la concavité est tournée vers l'axe des y.

La seconde branche coupe l'axe Ox' au point P, tel que $OP = 2 - 2\sqrt{2}$, passe à l'origine tangentiellement à la seconde bissectrice ; la courbe a la forme qu'indique la figure.



15. — *Construire la courbe*

$$y = x + \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x}.$$

déterminer ses asymptotes et sa forme générale.

16. — Démonstration géométrique de la méthode de Newton. — *Montrer que si l'équation a toutes ses racines réelles, et si α désigne une limite inférieure des racines positives de l'équation, on peut appliquer, avec certitude, la méthode de Newton au nombre α.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée; nous supposons qu'elle soit de degré m et qu'elle ait pour racines les nombre a_1, $a_2, \ldots a_m$; si l'on désigne par $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ les $(m-1)$

racines de $f'(x) = 0$, racines qui sont réelles et comprises dans les $(m-1)$ intervalles des nombres $a_1, a_2 \ldots a_m$, supposés rangés dans l'ordre croissant ; et par $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ les $(m-2)$ racines de $f''(x) = 0$, racines qui sont réelles et comprises dans les intervalles des nombres croissants $b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$; on voit que l'on peut écrire

$$\alpha < a_1 < b_1 < c_1.$$

Il résulte de cette remarque que α est nécessairement une limite inférieure des racines positives de l'équation proposée.

Ceci posé, soit

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

cette équation ; on a

$$\frac{f(x)}{f''(x)} = \frac{x^2 + A_1 x + A_2 + \dfrac{A_3}{x} + \ldots + \dfrac{A_m}{2^{m-2}}}{m(m-1) + \dfrac{(m-1)(m-2)A_1}{x} + \ldots + \dfrac{2A^{m-2}}{x_{m-2}}}$$

Pour de très grandes valeurs négatives de x, on voit que le signe de $\frac{f}{f''}$ est positif : mais f et f'' conservent le même signe depuis $-\infty$ jusqu'à α ; donc pour $x = \alpha$ le rapport $\frac{f}{f''}$ est positif et la méthode de Newton s'applique avec certitude à la valeur approchée α.

On peut observer que si l'équation $f(x) = 0$ n'a pas toutes ses racines réelles, mais si la limite α est fournie par l'une des méthodes du cours, α est alors une limite inférieure des racines positives de f et de ses dérivées successives, et l'on peut étendre la remarque en question à cette limite α.

17. — *On donne deux plans* P, P' *passant par l'origine et dans ces plans deux droites* Δ, Δ', *faisant un angle constant* V ; *au plan de ces deux droites on mène une normale : trouver le lieu décrit par cette droite.*

Soient
$$ax + by + cz = 0 \qquad (P)$$
$$a'x + b'y + c'z = 0 \qquad (P')$$

les deux plans donnés. Désignons par $x'y'z'$ les coordonnées

d'un point du lieu cherché; le plan

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

coupe les plans P et P' suivant des droites dont les équations

sont $$\frac{x}{bz' - cy'} = \frac{y}{cx' - az'} = \frac{z}{ay' - bx'} \qquad (\Delta)$$

et $$\frac{x}{b'z' - c'y'} = \frac{y}{c'x' - a'z'} = \frac{z}{a'y' - b'x'} ; \qquad (\Delta')$$

il ne reste plus qu'à exprimer que ces droites forment l'angle V. La condition connue donne un cône du quatrième degré, qui se réduit au second quand $V = 90°$.

18. — *Limite de* y

$$y = \frac{e^x - 1}{x}$$

pour $x = 0$.

On posera $e^x - 1 = \frac{1}{m}$; quand x tend vers 0, on sait que m tend vers l'infini ; on a d'ailleurs, et d'après ce changement de notation,

$$y = \frac{1}{mL\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{L\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}$$

et, pour $m = \infty$, on trouve $y = \frac{1}{L.e} = 1$.

19. — *Décomposer une fraction rationnelle en fractions rationnelles simples.*

Ayant posé $$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

on suppose que a soit une racine réelle ou imaginaire de multiplicité α, on montre que l'on peut avoir, f et F étant bien entendu des polynômes entiers premiers entre eux, identiquement

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ est la partie entière, quand elle est différente de zéro, de la fraction proposée, et l'on suppose que

$$F(x) = (x-a)^\alpha F_1(x).$$

A est d'ailleurs un nombre de la forme $(A' + A''i)$.

On a en effet, identiquement, et quel que soit A,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)};$$

On dispose de A de façon que

$$f(a) = AF_1(a).$$

A n'est ni nul, ni infini, mais de la forme $A' + A''i$; on peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître $\varphi(x)$ pour calculer le coefficient A.

20. — *Exprimer au moyen d'un déterminant que les deux droites*

$$P = ax + by + cz = 0$$
$$Q = a'x + b'y + c'z = 0$$

se coupent sur la conique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Considérons l'équation

$$\varphi = f(x, y, z) + 2\alpha P + 2\beta Q = 0;$$

elle peut être considérée comme une fonction homogène du second degré en x, y, z, α, β. Le théorème d'Euler donne

$$2\varphi = x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z + \alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta.$$

Écrivons que les dérivées partielles $\varphi'_x, \varphi'_y \dots \varphi'_\beta$ sont nulles : on aura donc

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + a\alpha + a'\beta &= 0 \\ B''x + A'y + Bz + b\alpha + b'\beta &= 0 \\ B'x + By + A''z + c\alpha + c'\beta &= 0 \\ ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations linéaires et homogènes en x, y, z, α, β, admettront une solution différente de zéro, si l'on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & a & a' \\ B'' & A' & B & b & b' \\ B' & B & A'' & c & c' \\ a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si nous supposons cette condition réalisée, l'identité d'Euler prouve que le point considéré xyz donne $\varphi = 0$; et comme l'on a $\varphi'_\alpha = 0, \quad \varphi'_\beta = 0$

c'est-à-dire $P = 0$, $Q = 0$,

on a donc aussi $f(x, y, z) = 0$. Ainsi le point xyz est situé à la fois sur les deux droites et sur la conique données. La réciproque est vraie : la condition cherchée est donc $\Delta = 0$.

Si l'on traite cette question par la méthode la plus naturelle, celle qui consiste à écrire que les coordonnées x, y, z données par les relations

$$\frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'},$$

satisfont à l'équation $f(x, y, z) = 0$, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &A\,(bc' - cb')^2 + A'\,(ca' - ac')^2 + A''\,(ab' - ba')^2 \\ &+ 2B\,(ca' - ac')\,(ab' - ba') \\ &+ 2B'\,(ac' - ca')\,(bc' - cb') \\ &+ 2B''(ba' - ab')\,(ca' - ac') = 0. \end{aligned}$$

C'est le déterminant Δ, développé. On peut remarquer, *à priori*, c'est-à-dire sans aucun calcul que ce déterminant est une fonction linéaire et homogène par rapport aux lettres A, A', A'', B, B', B''.

21. — *On considère une hyperbole* H *ayant pour asymptotes les droites* Δ, Δ' ; *soit* M *un point de* H, *par le point* M *on peut mener deux cercles tangents à* Δ *et à* Δ' ; *démontrer que la distance des centres de ces cercles est une quantité constante, quand le point* M *parcourt* H.

L'équation de l'un des cercles est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(x - x_1)^2 = 0,$$

$x - x_1 = 0$ étant l'équation de la droite des contacts; si l'on exprime qu'il passe par le point M, x_0, y_0 étant les coordonnées de ce point on a

$$(x_0 - x_1)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

Soit $x - x_2 = 0$ l'équation de la corde des contacts de l'autre cercle, on aura de même

$$(x_0 - x_2)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

On en déduit $$x_0 - x_1 = \frac{ab}{c}$$

$$x_2 - x_0 = \frac{ab}{c}$$

ou $$x_2 - x_1 = \frac{ab}{c}.$$

La distance des cordes de contact étant constante, la propriété énoncée est vraie.

QUESTIONS PROPOSÉES

26. — Soit $f(x, y, z) = 0$ un paraboloïde; donner l'équation qui détermine les paramètres des paraboles principales.

27. — En désignant par V l'angle, aigu ou obtus, des asymptotes de l'hyperbole, angle dans lequel se trouve la courbe, démontrer que

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC} \cdot \sin \theta}{A + C - 2B \cos \theta},$$

ε étant égal à ± 1, et son signe étant le même que celui du discriminant.

28. — Construire la courbe

$$Lx \cdot Ly = K.$$ *(Laisant).*

29. — Dans le plan d'une parabole fixe glisse une parabole mobile égale, de telle sorte que le sommet de chacune d'elles soit sur l'autre. Démontrer qu'un point quelconque du plan de la parabole mobile décrit une podaire de développée de parabole. *(Ed. Lucas.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 17371-2.

TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

Par M. G. de Longchamps.

(*Suite*, voir p. 49, 77, 97, 121, 145.)

33. Examinons maintenant le cas particulier où le plan P qu'on transforme est tangent à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre. On suppose donc $h = K$; le discriminant est nul et les racines de l'équation en S sont

$$S_1 = -(A + h),$$
$$S_2 = o,$$
$$S_3 = -2h.$$

Le hessien est alors

$$H = -d^2(B^2 + C^2)^2.$$

Il ne peut être nul que si l'on suppose, à la fois, $B = o$, $C = o$: mais, à un pareil plan correspond le pôle principal. Ainsi nous pouvons supposer H différent de zéro et nous allons faire voir qu'au plan P correspond alors un paraboloïde elliptique.

En effet, le hessien n'étant pas nul, la surface est certainement l'un des deux paraboloïdes ; je dis que S_1 et S_3 sont de même signe. Car nous avons expliqué (n° 32) qu'on ne pouvait pas supposer $A + K < o$ et comme l'on a $h = K$, on a donc nécessairement $A + h > o$: donc S_1 et S_3 sont de même signe. Concluons :

Théorème. — *Dans la transformation réciproque, à un plan tangent à la sphère décrite sur la ligne des pôles comme diamètre correspond un paraboloïde elliptique.*

34. Nous ferons connaître ici les deux causes qui peuvent produire l'abaissement de l'ordre de la surface transformée; cet abaissement résulte des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Lorsque la surface C, de degré* m, *passe par le pôle principal, la surface transformée n'est plus de degré* 2m, *comme dans le cas général, mais seulement du degré* (2m — 1).

Théorème II. — *Lorsque la ligne des pôles est une corde normale de* f, *le pôle secondaire étant le pied de cette normale, s'il arrive que ce point soit un ombilic de la surface, le degré de la surface transformée est, par ce fait, abaissé de deux unités.*

Ces deux propriétés sont la conséquence immédiate des formules de transformation (n° 30).

Il résulte de ces deux remarques qu'en transformant une quadrique Q par la méthode que nous exposons, on peut obtenir, suivant le choix que l'on fait du pôle principal et du pôle secondaire :

1° *Un plan* ; la ligne des pôles est une corde normale de la quadrique Q, et le pôle secondaire est un ombilic.

2° *Une quadrique* ; le pôle secondaire est encore un ombilic de Q, mais le pôle principal n'est plus, comme dans le cas précédent, placé à l'extrémité de la corde.

3° *Une surface cubique* ; le pôle principal est situé sur Q.

4° *Une surface quartique* ; les deux pôles ne présentent aucune des singularités des trois cas précédents.

35. — Nous signalerons, en terminant cette étude très incomplète d'une transformation qui nous paraît l'une des plus simples que l'on puisse imaginer dans ce groupe de transformations du genre Magnus, la surface cubique qui correspond à l'ellipsoïde.

D'après la remarque que nous avons faite en examinant le troisième cas du paragraphe précédent, il suffit pour obtenir cette surface cubique de faire passer l'ellipsoïde considéré par le pôle principal. Considérons donc l'ellipsoïde rapporté à ses axes, et prenons pour pôle principal l'une des extrémités de l'axe majeur, pour pôle secondaire l'autre extrémité de cet axe.

A l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

correspond la surface cubique

$$a^2 (X - a) \left(\frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) = (X + a) (Y^2 + Z^2).$$

Cette équation, étant de la forme $F\left(X, \frac{Y}{Z}\right) = 0$,

est l'équation d'un conoïde; ce conoïde est compris tout entier entre les deux plans $x + a = 0$, $x - a = 0$; il admet un double système de génératrices rectilignes parallèles au plan de yz, et en étudiant les sections faites dans la surface par le plan $z = h$, on obtient une cubique

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{\dfrac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} - \dfrac{x}{a}}{\dfrac{x}{a} - \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$$

et quand on fait varier h, la déformation de cette cubique donne une idée assez exacte de la forme de ce conoïde.

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES

Par M. **Édouard Lucas**.

Théorème I. — *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes le nombre de points impairs est toujours zéro ou un nombre pair* (*).

Euler, dans son mémoire connu sous le nom de *Problème des Ponts de Kœnigsberg*, mémoire qui a paru en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*, a complètement démontré ce théorème. On peut encore donner à la démonstration la forme suivante.

Désignons par A, B, C, D, . . . les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne ; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui

(*) On dit, dans cette géométrie des réseaux, qu'un point est pair lorsque de ce point partent des demi-droites en nombre pair. Il est impair dans le cas contraire. Par exemple, si l'on imagine une droite AB terminée aux points A et B, A et B sont des points impairs, et si l'on considère un point O sur AB, O est un point pair. G. L.

aboutissent en P et en Q diminue d'une unité, et change de parité. Par conséquent, si P et Q sont des points impairs, ils deviennent pairs par cette suppression ; si P et Q sont pairs, ils deviennent impairs ; enfin si P et Q sont de parité différente, ils demeurent de parité différente. Donc, la parité du nombre des points impairs ne change pas par cette suppression. Par suite, en supprimant successivement tous les chemins qui unissent deux stations voisines, jusqu'à ce qu'il n'en reste aucun, le nombre des points impairs est nul ; ce nombre était donc zéro ou un nombre pair, avant la suppression.

Théorème II. — *Tout réseau géométrique qui contient* 2n *points impairs peut être décrit par un nombre minimum de* n *traits sans répétition. Tout réseau géométrique qui ne contient que des points pairs peut être décrit par un seul trait, sans répétition.*

On suppose que le réseau est continu, c'est-à-dire que l'on peut aller d'un point quelconque du réseau à un autre, par un chemin continu. D'ailleurs, dans le cas de plusieurs réseaux séparés, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les théorèmes précédents. Cela posé, si l'on part d'un point impair A, et si l'on chemine au hasard, sans repasser sur la même voie, on sera forcé de s'arrêter à un certain moment ; en observant que dans cette marche on ne change point la parité des stations que l'on traverse, on en conclura que le point d'arrêt est un point impair B. En supprimant le parcours AB on obtient ainsi une figure qui ne possède plus que $(2n - 2)$ points impairs.

Après n parcours analogues, il ne restera donc qu'un réseau dont les stations sont d'ordre pair.

Maintenant, si l'on part d'un point quelconque M du réseau restrein , et si l'on chemine au hasard, on ne se trouvera arrêté qu'en revenant au point de départ M, après avoir décrit une courbe fermée. Après avoir décrit un certain nombre de boucles semblables, on aura parcouru tout le réseau. Mais, puisque le réseau est continu, les boucles peuvent venir se souder soit les unes sur les autres, puis sur les n chemins qui ont été décrits primitivement. Par suite le réseau peut être décrit en n traits continus au plus.

Note. — Les deux théorèmes précédents sont extraits d'un livre de M. Édouard Lucas (*), livre qui, sous le titre de *Récréations mathématiques*, renferme tant d'aperçus ingénieux et profonds. Aucune lecture, sous une forme plus agréable et plus facile, ne nous paraît plus propre à développer dans l'esprit l'idée de certaines combinaisons mathématiques, et nous avons plaisir à signaler cet ouvrage à nos lecteurs.

G. L.

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler**.

(*Suite*, voir page 149.)

V. — *Covariants principaux de la forme binaire de degré* n.

Considérons sur une droite n points $A_1, A_2, \ldots A_n$, déterminés par l'équation $f = ax^n + nbx^{n-1}y + \ldots = 0$, et soit P' un point fixe (le pôle) dont les coordonnées sont (x', y'), P un point quelconque de la même droite, de coordonnées (ξ, η). Cherchons l'équation qui détermine les n valeurs du rapport $\lambda_i = \frac{PA_i}{P'A_i}$;

on a $$\lambda_i = \frac{\xi - x_i}{x_i - x'} = \frac{\eta - y_i}{y_i - y'} = \frac{\xi y_i - \eta x_i}{\xi y' - \eta x'}$$

et par suite $$\frac{y_i}{x_i} = \frac{\eta + \lambda_i y'}{\xi + \lambda_i x'}.$$

L'équation demandée s'obtiendra en remplaçant dans l'équation $ax^n + nbx^{n-1}y + \ldots = 0$ les variables x et y par $\xi + \lambda x'$, $\eta + \lambda y'$. En développant par la formule de Taylor et mettant x, y à la place de ξ, η qui désignent maintenant des

---

(*) *Récréations mathématiques*, par Édouard Lucas. — Gauthier-Villars, 1882.

coordonnées *courantes*, il vient

$$f(x, y) + \lambda\,[x'f'_x + y'f'_y] + \frac{\lambda^2}{1.2}[x'^2f''_{x^2} + 2x'y'f''_{xy}$$
$$+ y'^2f_y) + \ldots\ldots + \lambda^n f(x', y') = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de $\lambda, \lambda^2 \ldots \lambda^{n-1}$, on obtient $n - 1$ équations représentant les $n - 1$ *groupes polaires* du pôle (x', y') par rapport aux n points du système $f = 0$.

Le premier groupe, composé de $n - 1$ points, est donné par $xf'_x + y'f'_x = 0$. Les points P de ce groupe sont tels que la somme des produits $n - 1$ à $n - 1$ des n rapports $\frac{PA_i}{P'A_i}$ est nulle. Le $n - 1$ᵉʳ groupe $x\, f'_{x'} + y\, f'_{y'} = 0$ se réduit à un seul point, centre des moyennes harmoniques de P′ par rapport à $A_1, A_2 \ldots A_n$; on a $\frac{n}{P'P} = \frac{1}{P'A_1} + \frac{1}{P'A_2} + \ldots + \frac{1}{P'A_n}$.

Il est facile de voir que le premier groupe est tel que chacun de ses points a pour centre des moyennes harmoniques relatif au système $A_1, A_2, \ldots A_n$, le point P′. Cette propriété, dont la démonstration est facile, pourrait servir de définition au premier groupe polaire.

Les formes qui, égalées à zéro, donnent les points des différents groupes polaires, sont des covariants de la forme f; on vérifie sans difficulté ce fait par le calcul.

Soient $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$ les formules de transformation ; on a

$$x + \lambda x' = \alpha X + \beta Y + \lambda\,(\alpha X' + \beta Y')$$
$$= \alpha(X + \lambda X') + \beta(Y + \lambda Y')$$

et de même $y + \lambda y' = \alpha'(X + \lambda X') + \beta'(Y + \lambda Y')$.

Donc $f(x + \lambda x', y + \lambda y') =$

$$f[\alpha(X + \lambda X') + \beta(Y + \lambda Y'), \alpha'(X + \lambda X') + \beta'(Y + \lambda Y')]$$

ou $f(x'y) + \lambda[x'f'_x + y'f'_y) + \ldots = F(X,Y)$

$$+ \lambda[X'F'_X + Y'F'_Y] + \ldots\;,$$

$F(X,Y)$ désignant ce que devient $f(x,y)$ par la substitution,

c'est-à-dire $f(\alpha X + \beta Y, \alpha' X + \beta' Y)$. Maintenant les deux développements devant être égaux pour toutes les valeurs de λ, les coefficients des puissances de λ seront égaux, et l'on aura $x'f'_x + y'f'_y = X'F'_X + Y'F'_Y$, etc...

La considération du premier groupe polaire donne lieu à d'autres formes liées à la forme donnée par des relations remarquables. Si d'abord on cherche les pôles dont les premiers groupes polaires ont un point double, et les points doubles de ces groupes, on est conduit à exprimer que l'équation $x'f'_x + y'f'_y = 0$ a une racine double, c'est-à-dire à écrire $x'f''_{x^2} + y'f''_{xy} = 0$, $x'f''_{xy} + y'f''_{y^2} = 0$.

L'élimination de x', y' entre ces équations donne une équation de degré $2n - 4$: $H = f''_{x^2} f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 = 0$. $H = 0$ représente les points doubles des premiers groupes polaires ; c'est le *hessien* de f.

Si au contraire on élimine x, y entre les mêmes équations, on aura les pôles correspondants aux points doubles ; l'équation en x', y', $P = 0$ est aussi de degré $2n - 4$.

On peut aussi se proposer de rechercher les pôles dont les groupes polaires relatifs au système primitif et au hessien ont un point commun, et de trouver ces points communs.

On obtient ceux-ci en éliminant x', y' entre les équations $x'f'_x + y'f'_y = 0$ et $x'H'_x + y'H'_y = 0$, ce qui donne $f'_x H'_y - f'_y H'_x = T = 0$, équation de degré $3n - 6$.

Les pôles correspondants résultent de l'élimination de x, y entre les mêmes équations ; on obtient ainsi une autre équation $\Theta = 0$ de degré $3n - 6$.

De ce que les formes P, H, Θ et T représentent des groupes de points liés au système donné ($f = 0$) par des relations géométriques indépendantes du choix des points fondamentaux, on est en droit de conclure que ce sont des covariants de f. Ainsi, en faisant une transformation linéaire qui change $f(x, y)$ en $F(X, Y)$, le hessien de F sera le produit du hessien de f par un certain facteur dépendant seulement des coefficients α, β, α', β' des formules de transformation. C'est ce qu'il est facile de vérifier. On a $f(x, y) = F(X, Y)$ avec $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \alpha' X + \beta' Y$; on en conclut

$$F'_X(X, Y) = \alpha f'_x + \alpha' f'_y, \quad F'_Y(X, Y) = \beta f'_x + \beta' f'_y .$$

puis $$F''_{X^2}(X, Y) = \alpha[\alpha f''_{x^2} + \alpha' f''_{xy}] + \alpha'[\alpha f''_{xy} + \alpha' f''_{y^2}]$$
$$= \alpha^2 f''_{x^2} + 2\alpha\alpha' f''_{xy} + \alpha'^2 f''_{y^2},$$
$$F''_{Y^2}(X, Y) = \beta^2 f''_{x^2} + 2\beta\beta' f''_{xy} + \beta'^2 f''_{y^2},$$
$$F''_{XY}(X, Y) = \alpha\beta f''_{x^2} + (\alpha\beta' + \beta\alpha') f''_{xy} + \alpha'\beta' f''_{y^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de H(X, Y), c'est-à-dire dans $F''_{X^2}F''_{Y^2} - (F''_{XY})^2$, on trouve

$$H(X, Y) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2[f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 H(x, y).$$

On trouverait de même $T(X, Y) = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^3 T(x, y)$.

Le même procédé ne s'appliquerait plus aussi facilement aux formes P et Θ, au moins pour le cas où l'exposant n a une valeur quelconque. Mais nous verrons que pour la forme du quatrième degré on a $\Theta = T$ et $P = -Jf + IH$, de sorte que, après la transformation, P se trouve multiplié par $(\alpha\beta' - \beta\alpha')^6$.

VI. — Réduction de la forme du quatrième degré à la forme canonique.

Il existe entre la forme du quatrième degré et ses covariants des relations simples : il est avantageux pour les étudier de ramener la forme f à sa *forme canonique*, c'est-à-dire à l'expression la plus simple qu'elle puisse avoir, sans rien perdre de sa généralité.

Soient A, B, C, D les quatre points représentés par l'équation $f = 0$; comme ils peuvent être groupés par couples de trois manières différentes, ils donnent lieu à trois involutions quadratiques dont les couples fondamentaux sont

$$(AB)(CD), \quad (AC)(BD), \quad (AD)(BC).$$

Soient O, O' les foyers ou points doubles de la première involution, c'est-à-dire les points qui divisent à la fois harmoniquement les segments AB et CD, on aura

$$\frac{OA}{O'A} : \frac{OB}{O'B} = -1 \text{ et aussi } \frac{OC}{O'C} : \frac{OD}{O'D} = -1.$$

Donc, si l'on choisit O et O' pour nouveaux points fondamentaux des coordonnées binaires, les quatre racines de la nouvelle

équation homogène du quatrième degré $\frac{OA}{O'A}, \frac{OB}{O'B}, \frac{OC}{O'C}, \frac{OD}{O'D}$ seront deux à deux égales et de signes contraires; donc cette nouvelle équation sera bicarrée. Ainsi se trouve établie la possibilité de réduire la forme donnée f à la forme canonique $AX^4 + 6CX^2Y^2 + EY^4$, et cela de trois manières différentes. D'ailleurs on peut reconnaître qu'il n'est pas possible en général de la réduire à une expression ayant moins de trois termes; supposons la réduction effectuée, on aura identiquement

$$ax^4 + 4bx^3y + \ldots = AX^4 + 6CX^2Y^2 + EY^4.$$

Mais on peut toujours introduire les coefficients A, E dans les expressions mêmes des nouvelles variables en posant $X\sqrt[4]{A} = X'$ et $Y\sqrt[4]{E} = Y'$; on peut donc écrire

$$X'^4 + 6C'X'^2Y'^2 + Y'^4 = a(\alpha X' + \beta Y')^4$$
$$+ 4b(\alpha X' + \beta Y')^3(\alpha' X' + \beta' Y') + \ldots$$

En identifiant, on aura cinq équations de condition pour déterminer α, β, α', β' et C'. L'expression réduite aura en général trois termes; elle ne pourra en avoir moins de trois que dans des cas particuliers.

Cherchons maintenant à déterminer les nouveaux points fondamentaux. Soit λ une des racines de l'équation (2); la forme f se décompose ainsi (formule [7]) :

$$f = \left[ax^2 + xy\left(2b - \sqrt{A}\right) + y^2\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$
$$\left[ax^2 + xy\left(2b + \sqrt{A}\right) + y^2\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right] = P.Q$$

et on a l'involution $P + \gamma Q = 0$, γ étant un paramètre variable. Pour avoir les points doubles de cette involution, il faut éliminer γ entre les deux équations

$$P'_x + \gamma Q'_x = 0, \quad P'_y + \gamma Q'_y = 0,$$

ce qui donne

$$\left[2ax + y\left(2b - \sqrt{A}\right)\right]\left[x\left(2b + \sqrt{A}\right) + 2y\left(\lambda + \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$
$$= \left[2ax + y\left(2b + \sqrt{A}\right)\right]\left[\left(x\, 2b - \sqrt{A}\right) + 2y\left(\lambda - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)\right]$$

$$\text{ou } 4a\sqrt{A}\,x^2 + 8a\frac{B}{\sqrt{A}}\,xy + 4y^2\left(\frac{2bB}{\sqrt{A}} - \lambda\sqrt{A}\right) = 0.$$

En remplaçant λ par $\mu + c$, et mettant à la place des polynômes A et B leurs valeurs, savoir

$$A = 4b^2 - 6ac + 2a\lambda = 4b^2 - 4ac + 2a\mu,$$
$$B = 2\lambda b - 2ad = 2b\mu + 2bc - 2ad,$$

on trouve définitivement

$$x^2(2ac - 2b^2 - a\mu) + 2xy(ad - bc - b\mu) + y^2(2c^2 - 2bd + c\mu - \mu^2) = 0. \qquad (9)$$

Cette équation donne le couple de points fondamentaux qui répondent à une des racines de la résolvante. Pour achever les calculs de réduction on décomposera cette équation en deux facteurs sous la forme

$$(\xi x + \eta y)(\xi' x + \eta' y) = 0$$

et l'on posera $X = \xi x + \eta y$, $Y = \xi' x + \eta' y$;

d'où $$x = \frac{X\eta' - Y\eta}{\xi\eta' - \xi'\eta}, \quad y = \frac{-X\xi' + Y\xi}{\xi\eta' - \xi'\eta}.$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans la forme donnée, les termes en X^3Y et en XY^3 disparaîtront d'eux-mêmes, et on aura la forme canonique. *(A suivre.)*

QUESTION 388

Solution par M. Gino-Loria, à Mantoue.

Les axes d'une ellipse sont dirigés suivant deux droites rectangulaires données Ox, Oy. *Soit* M *le point de cette ellipse où le cercle osculateur a la même surface que l'ellipse; soit* μ *le centre de ce cercle; 1° la distance du centre de ce cercle osculateur au centre de l'ellipse est égale à la demi-différence des axes; 2° si la somme des axes de l'ellipse reste constante, le lieu de* M *est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse sur les deux droites* Ox, Oy; *et le lieu de* μ *est la rosace à quatre branches, lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur une droite de longueur constante qui glisse sur les bissectrices des angles des axes.* (E. Lemoine.)

En appelant $2a$, $2b$ les axes de l'ellipse, r le rayon de ce cercle osculateur en M, on aura

$$\sqrt{ab} = r$$

ou

$$\sqrt{ab} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Mais de l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Donc l'équation précédente devient

$$\sqrt{ab} = \frac{\left\{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}} = \frac{\left\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$$

$$a^9b^3 = \left\{a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right\}^3$$

$$a^3b = a^4 - (a^2 - b^2)x^2.$$

D'où on tire $$x^2 = \frac{a^3(a - b)}{(a + b)(a - b)}$$

ou

$$x^2 = \frac{a^3}{a + b} \qquad (1)$$

A cette valeur de x correspond

$$y^2 = \frac{b^3}{a + b}, \qquad (2)$$

Les équations (1) (2) donnent les coordonnées de M Cherchons celles de μ. En les appelant X et Y nous aurons

$$X = x - \frac{dy}{dx}\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= x - \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\frac{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2 - x^2}}{\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^3)^3}}}$$

ou, toute réduction faite,

$$X = x^3 \frac{a^2 - b^2}{a^4}.$$

De même
$$Y = y^3 \frac{a^2 - b^2}{b^4}.$$

Donc en employant les équations (1) (2) on aura les coordonnées de μ données par les équations

$$X = \sqrt{\frac{a}{a+b}}\,(a-b); \tag{3}$$

$$Y = \sqrt{\frac{b}{a+b}}\,(a-b). \tag{4}$$

1° On en tire

$$O\mu^2 = X^2 + Y^2 = \frac{a}{a+b}(a-b)^2 + \frac{b}{a+b}(a-b)^2 = (a-b)^2$$

donc

$$O\mu = a - b.$$

2° En faisant l'hypothèse

$$a + b = c, \tag{5}$$

le lieu de M s'obtient en éliminant a, b entre les équations (1) (2) (5). Or les équations (1) (2) donnent

$$cx^2 = a^3;\ cy^2 = b^3$$

donc
$$a = c^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}};\ b = c^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

et l'équation (5) se transforme en conséquence en

$$c^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c$$

ou bien
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

qui représente en effet l'enveloppe de la droite de longueur constante c qui glisse sur les axes.

3° Le lieu de μ peut être trouvé en éliminant a, b entre les équations (3) (4) (5). Or (3) (4) donnent

$$a - b = \sqrt{X^2 + Y^2}, \tag{6}$$

$$\frac{X^2}{Y^2} = \frac{a}{b}. \tag{7}$$

Des équations (5) et (6) on tire

$$a = \frac{c + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2};\ b = \frac{c - \sqrt{X^2 + Y^2}}{2};$$

donc (7) devient

$$\frac{c+\sqrt{X^2+Y^2}}{c-\sqrt{X^2+Y^2}}=\frac{X^2}{Y^2}$$

ou, en chassant les dénominateurs et les radicaux,

$$(X^2+Y^2)^3=c^2(X^2-Y^2)^2,$$

Changeons les axes en prenant pour nouveaux axes les bissectrices des angles des anciens axes, les formules de transformation sont

$$X=x+y;\quad Y=x-y;$$

donc $X^2+Y^2=2(x^2+y^2);\quad X^2-Y^2=4xy$

et l'équation précédente devient

$$8(x^2+y^2)^3=16\,c^2x^2y^2$$

ou $(x^2+y^2)^3-2\,c^2x^2y^2=0$

qui représente en effet une rosace à quatre branches.

QUESTION 15

Solution par M. E. Devin, élève de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.

Trouver le lieu des points M *tels que, parmi les normales issues de ce point à la parabole* $y^2-2px=0$, *il y en ait deux qui forment avec la droite* $y=x\,\text{tg}\,\varphi$ *un triangle isoscèle. Ce lieu est une parabole ; construire cette courbe quand on suppose* $\varphi=\frac{\pi}{8}$ *et montrer que le sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée.* (G. L.)

Soit M un point du lieu, MA et MB les normales issues de ce point M, qui font avec Oz un triangle isoscèle; les tangentes en A et B à la parabole donnée se coupent en un certain point M′, tel que les droites M′A et M′B′ forment avec Oz un triangle isoscèle, et à chaque point tel que M correspond un point tel que M′.

Si donc on détermine le lieu du point M′, on pourra en déduire le lieu du point M.

Pour avoir le lieu du point M′, nous exprimerons que le pied E de la perpendiculaire abaissée de M sur Oz est le

milieu du segment CD déterminé sur Oz par les deux tangentes issues de M′.

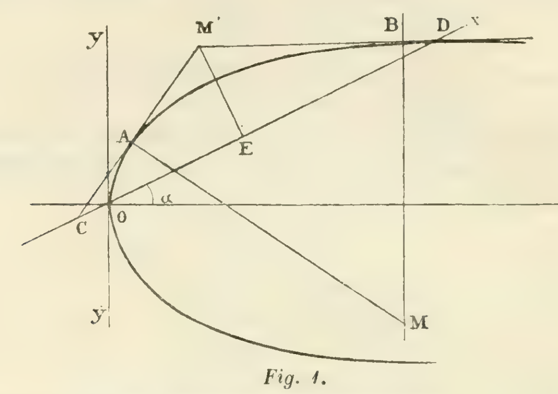


Fig. 1.

Soient α et β les coordonnées du point M′;

L'ensemble des deux tangentes M′A et M′B issues de ce point à la parabole donnée est représenté par l'équation

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = [\beta y - p(x + \alpha)]^2.$$

L'équation aux abscisses des points de rencontre C et D de ces tangentes avec Oz est

$$(x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) = [\beta x \operatorname{tg} \varphi - px - p\alpha]^2,$$

équation du second degré en x, dont la demi-somme des racines est $\dfrac{\beta^2 - p\alpha - \alpha\beta \operatorname{tg} \varphi}{2\beta \operatorname{tg} \varphi - 2\alpha \operatorname{tg}^2 \varphi - p}$.

La perpendiculaire M′E abaissée de M′ sur Oz ayant pour équation $$y - \beta = (\alpha - x)\operatorname{cotg}\varphi,$$
l'abcisse du point D est donnée par l'équation

$$x(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi) = \alpha \operatorname{cotg} \varphi + \beta,$$

d'où $$x = \frac{\alpha + \beta \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Exprimant que le point E est le milieu de CD on a:

$$\frac{\beta^2 - p\alpha - \alpha\beta \operatorname{tg} \varphi}{2\beta \operatorname{tg}\varphi - 2\alpha \operatorname{tg}^2 \varphi - p} = \frac{\alpha + \beta \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ou $$(\beta - \alpha \operatorname{tg} \varphi)[\beta - \beta \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\alpha \operatorname{tg} \varphi + p \operatorname{tg} \varphi] = 0.$$

On a d'abord la solution singulière

$$\beta = \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

puis $$\beta - \beta \operatorname{tg}^2 \varphi - 2\alpha \operatorname{tg} \varphi + p \operatorname{tg} \varphi = 0$$

ou $$\beta = \left(\alpha - \frac{p}{2} \right) \operatorname{tg} 2\varphi \qquad (1)$$

qui est la véritable solution.

Soient maintenant α' et β' les coordonnées du point M dont on cherche le lieu. Elles sont liées aux coordonnées α et β du point M' par les formules

$$\beta' = - \frac{2\alpha\beta}{p} \qquad (2)$$

et $$\alpha' = p - \alpha + \frac{2\beta^2}{p}. \qquad (3)$$

On aura donc l'équation du lieu du point M' en éliminant α et β entre les équations (1) (2) et (3). Transportant dans (2) et (3) la valeur de β tirée de (1), elles deviennent des équations du second degré en α.

$$4\alpha^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi - 2p\alpha\,(1 + 2 \operatorname{tg}^2 2\varphi) + p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2p\alpha = 0$$
$$2\alpha^2 \operatorname{tg} 2\varphi - p\alpha \operatorname{tg} 2\varphi + p\beta' = 0$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne pour l'équation du lieu, en considérant α' et β' comme des coordonnées courantes :

$$[4py \operatorname{tg}^2 2\varphi - 2 \operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2px)]^2$$
$$= [-4p \operatorname{tg}^3 2\varphi + 4p \operatorname{tg} 2\varphi)(1 + 2ly^3 2\varphi)][p \operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi +$$
$$2p^2 - 2px) - 2p^2 y\,(1 + 2 \operatorname{tg}^2 2\varphi)]$$

ou, en simplifiant,

$$[2y \operatorname{tg} 2\varphi - (p \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p - 2x)]^2 =$$
$$2 \operatorname{tg} 2\varphi[\operatorname{tg} 2\varphi\,(p^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi + 2p^2 - 2px) - 2p^2 y\,(1 + 2 \operatorname{tg}^2 2\varphi)]$$

équation qui est de la forme

$$P^2 = KQ,$$

P et Q étant des fonctions du premier degré, et K étant une constante. Sous cette forme on reconnaît l'équation d'une parabole dont $P = 0$ est un diamètre et $Q = 0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Examinons le cas où $\varphi = \frac{\pi}{8}$.

Alors $$\operatorname{tg} 2\varphi = 1$$

et l'équation précédente devient

$$(2y + 2x - 3p)^2 + 2p\,(6y + 2x - 3p) = 0.$$

C'est une parabole dont la direction des diamètres est parallèle à la seconde bissectrice des axes.

Les points de rencontre avec l'axe sont donnés par l'équation $(2x - 3p)^2 + 2p(2x - 3p) = 0$
ou $(2x - 3p)(2x - p = 0$,
ce qui donne les deux points

$$x = \frac{3p}{2}$$

et

$$x = \frac{p}{2}.$$

La première solution donne un point C, et la tangente en ce point est la droite $6y + 2x - 3p = 0$.

La seconde solution donne le point F, foyer de la parabole proposée.

Cherchons la tangente en ce point.

Ayant transporté les axes au point F par les formules

$$x = X + \frac{p}{2}$$

$$y = Y$$

l'équation devient $(Y + X)^2 + p(Y - X) = 0$,

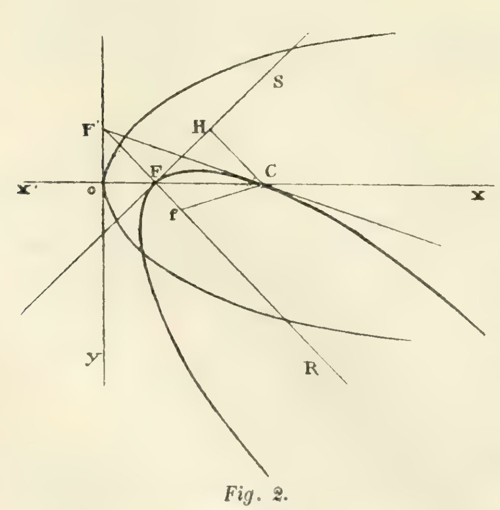


Fig. 2.

ce qui prouve que la tangente au point F, qui est donnée par l'équation $Y - X = 0$, est perpendiculaire sur la direction des diamètres. C'est donc la tangente au sommet de la parabole trouvée et le point F, foyer de la parabole proposée, est le sommet de la parabole lieu de M. Son axe est la parallèle à la seconde bissectrice menée par le point F (*fig. 2*).

Cette parabole peut d'ailleurs être construite comme nous allons l'indiquer. Ayant mené par F des parallèles aux bissectrices des axes, ces droites sont l'une, FR, l'axe, l'autre, FS, la tangente au sommet de la parabole cherchée ; F est son sommet. Si l'on prend sur Ox, à partir de O, une longueur OC égale à $\frac{3}{2}$ OF, le point C ainsi obtenu est un point de la parabole ; et, si on rabat F en F' sur Oy, CF' est la tangente en C. Du point C on abaisse la perpendiculaire CH sur FS et on fait en C l'angle $F'Cf = HCF$. Le point de rencontre f de Cf avec FR est le foyer de la parabole, qui est ainsi bien déterminée.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Pelouzet, à Bar-le-Duc; riffon, commis du bureau de l'intendance militaire, à Montpellier.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

On donne deux cercles se coupant aux points A et B; une conique quelconque passant par ces points, et tangente aux deux cercles, rencontre l'hyperbole équilatère qui a pour sommets en deux autres points C et D :

1. Démontrer que la droite CD passe par l'un des centres de similitude des deux cercles ;

2. Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences de centres E et F ;

3. Soit une conique satisfaisant à la question, ayant son centre sur une des circonférences E ou F : démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent la circonférence en deux points fixes, situés sur l'axe radical des deux cercles donnés.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est vertical, et d'un tore dont l'axe est horizontal.

L'axe du cylindre se projette horizontalement en un point c, situé à 65 millimètres en avant de la ligne de terre xy ; le rayon du cercle de base est 38 millimètres.

Le centre du tore se projette horizontalement en un point o, situé à 58 millimètres de la ligne de terre et verticalement en un point o', situé à 78 millimètres de la ligne de terre. La ligne de rappel oo' est à droite du point c, à une distance de 54 millimètres.

La projection horizontale de l'axe du tore rencontre la ligne de terre xy en un point situé à 54 millimètres à droite du point de rencontre de xy avec oo'.

Le rayon du cercle générateur du tore est de 22 millimètres, et la distance de son centre à l'axe de 51 millimètres.

On demande :

De représenter ce qui reste du tore entaillé par le cylindre ; de tracer les parties vues et les parties cachées des contours apparents.

De développer sur la droite de l'épure la portion de surface cylindrique qui limite le corps.

D'indiquer à l'encre rouge ou bleue les constructions nécessaires pour déterminer *un* point de l'intersection, et la *tangente* en ce point ; *un* point du développement de la courbe d'intersection tracée sur la surface d'un cylindre et la *tangente* en ce point ; *un* point du contour apparent vertical du tore, et la *tangente* en ce point.

Les tangentes seront tracées à l'encre rouge ou bleue.

On prendra la ligne de terre xy parallèle aux grands côtés de la feuille, à 130 millimètres du bord inférieur.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

Soit un point fixe donné P, ayant pour coordonnées a et b par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy; et soient A et B les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B. Du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM et PM'.

1. Déterminer l'équation de la droite MM' qui joint les pieds des normales variables, et démontrer que cette droite passe par un point fixe.

2. Déterminer l'équation de la courbe C, lieu des points M et M'. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = 2b$, au moyen de coordonnées polaires ayant le point o pour pôle.

Physique.

1. On a un miroir sphérique formé par un ménisque en verre dont on a étamé ou argenté l'une des faces. Les rayons réfléchis par cette face doivent traverser deux fois la face antérieure qui est nue, d'abord en entrant, puis en sortant. Quel doit être le rapport du rayon de courbure de ces deux surfaces du ménisque pour que ce système fasse l'effet d'un miroir plan? On examinera les différents cas qui peuvent se présenter. On donnera l'expression du rapport cherché dans le cas général, en désignant par n l'indice du verre; on supposera ensuite $n = \frac{3}{2}$.

Comme d'habitude on ne considère que les rayons centraux et on néglige l'épaisseur du verre.

2. Pour déterminer la valeur du kilogramme, on a mesuré exactement le volume d'un cylindre et l'on a cherché la

perte de poids qu'il éprouve quand on le plonge dans l'eau. Soit V le volume du cylindre en décimètres cubes et à zéro, et soit P sa perte de poids dans l'eau, mesurée nécessairement en unités arbitraires, puisque les poids métriques n'étaient pas encore connus. On demande d'établir l'équation exacte de la pesée, et d'en déduire la détermination du kilogramme.

ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE SESSION 1882

Géométrie analytique.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M′ des tangentes menées du point P à l'ellipse, et par les points Q et Q′ où cette ellipse est rencontrée par la droite $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu = 0$. — Disposer du paramètre μ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère, passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, et on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur la droite QQ′;

2° Le lieu décrit par le point de rencontre des cordes MM′ et QQ′.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l, et déterminer ces points. — Chercher pour quelles valeurs de l ce lieu se réduit à deux droites, et déterminer ces droites.

Physique et chimie.

1. On a deux baromètres fixes, A et B, formés de deux tubes cylindriques fermés à la partie supérieure par des surfaces planes.

Dans une première expérience, à la température de o°, la pression étant mesurée dans les deux baromètres par une colonne de mercure H, et la longueur de la chambre barométrique de A étant l, on introduit dans cet espace vide une quantité d'air qui fait baisser le mercure de h dans le tube, le niveau étant supposé constant dans la cuvette.

La température et la pression changent alors ; la pression lue au baromètre B est devenue H′ ; la colonne de mercure de A a une hauteur $H' - h'$. A quelle température a été faite cette deuxième expérience ? — On négligera la dilatation des tubes, du mercure et de la règle qui a servi à effectuer les mesures.

Coefficient de dilatation de l'air : $\alpha = 0.003665$.

Exemple numérique : $H = 76$ cent. $H' = 64$ cent.
$l = 14$ cent. $h' = 4$ cent. 129.
$h = 6$ cent.

2. Indiquer sommairement la préparation de l'acide sulfureux, et donner les formules qui la représentent.

3. Combien faut-il de litres d'air (à 0° 760 millimètres) pour brûler 20. 75 de soufre ?

Equivalents en poids : S = 16 ; O = 8

Poids du litre d'oxygène à 0° et 760mm : 1 gr. 43

ÉPURE

Hyperboloïde à une nappe, entaillé par quatre sphères. — L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical, à $0^m,105$ du plan vertical et au milieu de la feuille ; la cote de son centre est $0^m.087$; les rayons de son collier (r, r') et de sa trace horizontale (θ) ont respectivement $0^m.008$ et $0^m.095$ de longueur.

Les sphères, dont les centres sont dans le plan du collier (r, r'), touchent le plan horizontal aux extrémités (a_1, a'_1) (a_2, a'_2) (a_3, a'_3) (a_4, a'_4) des deux diamètres du cercle (θ) respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande de construire les projections des intersections de l'hyperboloïde avec les sphères.

Dans la mise à l'encre, on représentera les parties de la *surface* de l'hyperboloïde qui, placées à l'extérieur des sphères, sont comprises entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal P', à la cote $0^m,171$. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'une des lignes d'intersection et la tangente en ce point.

ENSEIGNEMENT CLASSIQUE

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1882

Mathématiques spéciales.

On donne une ellipse, et un point P situé dans son plan.

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse, tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passe par le point P;

2° Trouver, pour chaque position du point P, combien de ces cercles osculateurs sont réels;

3° Démontrer que les points de contact de ces cercles osculateurs et de l'ellipse sont sur un même cercle;

4° Trouver l'enveloppe E des cercles C quand le point P décrit l'ellipse donnée;

5° La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe, et dont les centres sont sur une conique.

Chercher de combien de manières différentes la courbe E est susceptible de ce mode de génération.

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère O et un cercle fixe C sur cette sphère; et on considère tous les cônes qui passent par le cercle C et qui coupent la sphère suivant un cercle C' de grandeur constante.

1° Trouver le lieu géométrique des sommets de tous ces cônes.

2° Parmi ces cônes, on prend ceux qui ont leur sommet hors de la sphère, et qui sont tels que le cercle de sortie C′ ne rencontre pas le cercle fixe C, et l'on considère sur chacun d'eux les génératrices situées dans le plan principal perpendiculaire au plan du cercle C. Déterminer les angles que font ces génératrices avec le plan du cercle C, sachant que le volume du tronc de cône compris entre les cercles C et C′ est équivalent au volume d'une sphère de rayon connu a.

Étudier les variations de ce volume quand le sommet du cône se déplace dans l'espace.

Pourrait-on, en modifiant convenablement l'énoncé, appliquer les formules trouvées au cas où le sommet du cône est à l'intérieur de la sphère, la condition relative aux cercles C et C′ restant la même ?

Composition de licence.

Connaissant le mouvement relatif d'un point par rapport à un système de comparaison, ainsi que le mouvement absolu de ce système, déterminer l'accélération absolue du point.

Application. — Un trièdre trirectangle $Oxyz$ tourne, avec une vitesse constante ω, autour de l'une de ses arêtes Oz, qui est verticale. Un plan P, passant par l'arête Oy et faisant avec le plan xOy un angle constant dont la tangente est $\sqrt{\frac{3}{2}}$, est entraîné avec le trièdre.

Déterminer, par rapport au trièdre, le mouvement de deux points matériels pesants A et B, assujettis à se mouvoir le premier sur Ox, le second dans le plan P. Ces deux points ont chacun une masse égale à l'unité, et ils exercent l'un sur l'autre une attraction égale au produit de leur distance par $2\omega^2$.

Quelles doivent être les circonstances initiales pour que la trajectoire relative du point B soit une parabole ? On négligera l'influence des résistances passives, et l'on ne tiendra pas compte de la rotation de la terre.

QUESTIONS PROPOSÉES

30. — On considère l'équation du quatrième degré

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de cette équation.

1. On propose de démontrer que l'on pose

$$z = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{(x^1 + x_2)(x_3 + x_4)},$$

l'équation transformée est

$$Pz^3 + Qz^2 + Rz + S = o,$$

en posant

$$P = BCD - B^2E - D^2A,$$
$$Q = 2BCD + 4ACE - 3B^2E - 3D^2A - C^3,$$
$$R = BCD + 8ACE - 3B^2E - 3D^2A,$$
$$S = 4ACE - B^2E - D^2A.$$

2. Expliquer le résultat qu'on obtient quand on suppose $C = o$.

3. Démontrer que si l'on considère le réseau quartique

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 = o,$$

ces quatre droites forment un faisceau harmonique si l'on a

$$2C^3 = 9BCD + 72ACE - 27B^2A - 27D^2A.$$

(G. L.)

31. — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy; sur Ox, deux points fixes, P, Q; par ces points P, Q, on fait passer une infinité de cercles C, et l'on imagine les hyperboles H qui ont pour asymptotes Ox, Oy et sont tangentes à C. Trouver le lieu des points de contact des courbes H et C.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 18840-2.

ÉTUDE

SUR L'ÉQUATION ET SUR LA FORME BINAIRE DU QUATRIÈME DEGRÉ

Par M. **Kœhler.**

(*Suite et fin*, voir pages 149 et 197.)

Puisque les quatre points représentés par $f = o$ donnent lieu à trois involutions, il y a trois manières d'opérer la réduction à la forme canonique.

Supposons d'abord les quatre points A, B, C, D réels et rangés de gauche à droite dans l'ordre alphabétique; les deux involutions (AB) (CD) et (AD) (BC) auront leurs foyers réels, l'involution (AC) (BD) dont les segments empiètent l'un sur l'autre aura ses foyers imaginaires. Donc il y aura deux transformations réelles et une imaginaire.

Si les quatre points sont imaginaires, il y aura évidemment une seule transformation réelle, celle qui répond à l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués.

Même observation si deux des points sont réels et les deux autres imaginaires ; l'involution déterminée par le couple réel et le couple imaginaire aura seule ses foyers réels.

Il est facile de voir ce qui arrive quand il y a une ou deux racines doubles; nous n'insisterons pas sur ses cas particuliers.

Remarquons seulement que, dans le cas de la racine triple, la réduction à la forme bicarrée n'est plus possible. Mais alors en appelant X le facteur triple, Y le facteur simple et en prenant pour nouveaux points fondamentaux les deux points déterminés par les équations $X = o$, $Y = o$, la forme devient simplement X^3Y.

Revenons maintenant à l'équation (9) qui donne les nouveaux points fondamentaux; en éliminant μ entre cette

équation et la résolvante $\mu^3 - I\mu = 2J = 0$, on aura évidemment une équation du sixième degré en x et en y qui donnera à la fois les couples de points doubles des trois involutions. Nous allons voir que la forme du sixième degré ainsi obtenue n'est autre chose que le covariant T dont il a été question plus haut.

Si l'on cherche le hessien de la forme réduite, comme les secondes dérivées ne renferment que des termes en x^2 et y^2, on voit que ce hessien se présentera aussi sous la forme canonique bicarrée. Donc les nouveaux points fondamentaux O et O′ jouissent par rapport aux quatre points A′, B′, C′, D′ donnés par $H = 0$ des mêmes propriétés que par rapport aux points $f = 0$; ils sont aussi conjugués harmoniques par rapport à deux des couples que l'on peut former avec ces points A′, B′, C′, D′.

Mais on a $$\frac{2}{OO'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD}$$

et par suite $$\frac{4}{OO'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD}.$$

De même $$\frac{4}{OO'} = \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} + \frac{1}{OC'} + \frac{1}{OD'}.$$

En d'autres termes O′ est le centre des moyennes harmoniques de O par rapport aux points $f = 0$ et aux points $H = 0$.

Il en résulte que O est un point commun aux premiers groupes polaires de O′, par rapport aux points $f = 0$ et $H = 0$ et réciproquement O′ est un point commun aux premiers groupes polaires de O. Donc enfin les six points dont il a été question tout à l'heure ne sont autre chose que les points donnés par l'équation $T = 0$. On voit en même temps que les covariants T et Θ sont identiques.

— Nous avons rattaché la réduction à la forme canonique à la méthode de Ferrari ; ce n'est pas ainsi que l'on procède habituellement; mais, comme on va le voir, les calculs sont à peu près les mêmes. Soient A, C, E les coefficients de la forme réduite; on peut supposer que la substitution

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \alpha' X + \beta' Y,$$

qui donne la forme canonique, ait un déterminant égal à l'unité ; alors les invariants I et J se reproduisent identiquement et l'on a

$$ACE - C^3 = J, \qquad AE + 3C^2 = I,$$

I et J ayant des valeurs connues.

Ces relations donnent par l'élimination du produit AE l'équation

$$4C^3 - IC + J = 0. \qquad (10)$$

Maintenant le hessien de la transformée étant

$$H = ACX^4 + X^2Y^2(AE - 3C^2) + CEY^4,$$

on constate que $CF - H$ ou, ce qui est la même chose, $Cf(x, y) - H(x, y)$ donne le carré du produit des nouvelles variables X et Y, savoir $X^2Y^2(9C^2 - AE)$.

D'après cela, après avoir trouvé une des racines C de l'équation (10), on forme la différence $Cf(x, y) - H(x, y)$, et on trouve le carré d'un polynôme du second degré dont les facteurs linéaires en x et y sont précisement X et Y.

Mais on voit que l'équation $4C^3 - CI + J = 0$ n'est autre chose que la résolvante $\mu^3 - \mu I + 2J = 0$, dans laquelle on a remplacé μ par $2C$. Les deux méthodes rentrent donc au fond l'une dans l'autre; la seule différence est dans le procédé employé pour calculer les facteurs X et Y.

VII. — Relations entre la forme du quatrième degré et ses covariants.

Prenons la forme réduite

$$f = ax^4 + 6cx^2y^2 + ey^4.$$

Les invariants I et J sont

$$I = ae + 3c^2, \quad J = ace - c^3.$$

On a ensuite

$$H = f'_{x^2}f'_{y^2} - (f'_{xy})^2 = acx^4 + (ae - 3c^2)x^2y^2 + cey^4$$

$$T = f'_xH'_y - f'_yH'_x = 8(ae - 9c^2)xy(ax^4 - ey^4)$$

ou simplement $\quad T = xy(ax^4 - ey^4)$.

L'élimination de x et y entre les équations

$$xf'_{x^2} + y'f'_{xy} = 0 \quad \text{et} \quad x'f'_{xy} + y'f'_{y^2} = 0$$

donne

$$P = 4ac^3x^4 - x^2y^2(6ac^2e + 3c^4 - e^2) + 4c^3ey^4.$$

Enfin l'élimination de x et y entre

$$x'f'_x + y'f'_y = 0 \quad \text{et} \quad x'H'_x + y'H_y = 0$$

donne $$\Theta = T,$$

ce qui devait être d'après le paragraphe précédent.

L'inspection des formules précédentes montre d'abord que, si $C = 0$, c'est-à-dire si la forme donnée peut se réduire à la somme de deux quatrièmes puissances, l'invariant J est nul. Réciproquement, lorsque $J = 0$, l'équation (10)

$$4C^3 - CI + J = 0$$

a une racine nulle.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme du quatrième degré soit réductible à la forme

$$ax^4 + ey^4,$$

c'est que les quatre points qu'elle représente soient en situation harmonique, condition exprimée algébriquement par $$J = 0.$$

Les formes f et H déterminent sur la droite représentative une involution du quatrième ordre, et on peut reconnaître que les quatre points $P = 0$ constituent un des groupes de cette involution, c'est-à-dire que P peut se mettre sous la forme $$\lambda f + \mu H.$$

C'est ce que montre l'inspection des premiers et des derniers coefficients de f, H et P; si l'on a

$$4ac^3 = \lambda a + \mu . ac,$$

on a aussi $$4ec^3 = \lambda e + \mu ce.$$

Donc on peut déterminer λ et μ par les équations d'identification $$\lambda + \mu c = 4c^3,$$

$$6\lambda c + \mu(ae - 3c^2) - a^2e^2 - 3c^4 - 6ac^2e$$

qui donnent $$\mu = ae + 3c^2 = 1,$$

$$\lambda = c - ace = - J.$$

On a donc $$P = IH - Jf.$$

Cette relation, dont la démonstration serait bien difficile en opérant sur la forme non réduite, subsiste lorsqu'on fait une transformation linéaire; comme H est alors multiplié par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2$, carré du déterminant de la substitution, I par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^4$ et J par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^6$, on voit que P est multiplié par $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^6$.

Lorsque l'équation $f = 0$ a une racine double, il en est de même pour $H = 0$. Effectivement le discriminant $I^3 - 27J^2$

devient pour la forme canonique $ae(9c^2 - ae)^2$. Il peut être nul de trois manières. Si a ou c sont nuls, H contient y^2 ou x^2 en facteur, le facteur double de f se retrouve dans H. Si $9c^2 - ae = 0$, f et H prennent la même forme ; on a $f = \frac{1}{a}(ax^2 + 3cy^2)^2$, $H = \frac{c}{a}(ax^2 + 3cy^2)^2$. C'est le cas des deux racines doubles. On peut donc dire que les conditions pour que $f = 0$ ait deux racines doubles, sont que les coefficients de f et de H soient proportionnels. Cela étant vrai aussi pour la forme générale dont le hessien est

$$H = x^4(ac - b^2) + 2x^3y\,(ad - bc) + x^2y^2(ae + 2bd - 3c^2) + 2xy^3(be - cd) + y^4(ce - d^2),$$

les conditions s'écriront

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{bc} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e};$$

elles se réduisent à deux, comme on peut le vérifier.

Quand f admet un facteur triple, la forme canonique est x^3y, comme nous l'avons vu, et le hessien devient x^4 ; il est la quatrième puissance du facteur triple.

Enfin quand f est une quatrième puissance parfaite, on a à la fois soit $a = 0$, $e = 0$, soit $c = 0$, $e = 0$. Les coefficients du hessien s'évanouissent identiquement, et par suite les conditions pour que $f = 0$ ait une racine quadruple peuvent s'écrire, dans le cas général

$$ac - b^2 = ad - bc = ae + 2bd - 3c^2 = be - cd = ce - d^2 = 0;$$

ces conditions se réduisent à trois.

Nous avons trouvé pour le covariant T l'expression

$$xy\,(ax^4 - ey^4) \text{ ou } xy\left(x^2\sqrt{a} - y^2\sqrt{e}\right)\left(x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{e}\right).$$

Les six points représentés par $T = 0$ se partagent donc en trois couples ; le premier $xy = 0$ se compose des deux points fondamentaux qui se rapportent à la forme canonique Ce sont les points doubles de l'involution déterminée par les points racines des trinômes $ax^2 + y^2\left(3\,c + \sqrt{9c^2 - ae}\right)$

et $ax^2 + y^2\left(3c - \sqrt{9c^2 - ae}\right)$, en lesquels se décompose la forme $ax^4 + bcx^2y^2 + ey^4$.

On vérifie sans peine que les points $x^2\sqrt{a} - y^2\sqrt{} = 0$ et $x^2\sqrt{a} + y^2\sqrt{e} = 0$ sont les points doubles des deux autres involutions que l'on peut former avec les points $f = 0$.

C'est une vérification de ce que nous avons démontré plus haut par des considérations géométriques.

NOTE

Principe de Correspondance par M. CHASLES (*)

Lemme I — *Lorsqu'on a sur une droite* L *deux séries de points* X *et* u, *tels qu'à un point* X *correspondent* α *points* u, *et à un point* u, β *points* X, *le nombre des points* X *qui coïncident avec des points correspondants* u *est* $(\alpha + \beta)$.

En effet, en représentant par x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L, on a entre ces distances une relation telle que

$$x^\beta\,(\mathrm{A}u^\alpha + \mathrm{B}u^{\alpha-1} - \ldots) + x^{\beta-1}\,(\mathrm{A}'u^\alpha + \mathrm{B}'u^{\alpha-1} - \ldots) + \ldots = 0$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont déterminés par l'équation

$$\mathrm{A}x^{\alpha+\beta} + (\mathrm{B} + \mathrm{A}')\,x^{\alpha+\beta-1} + \ldots = 0.$$

Il suffit donc de prouver que le coefficient A du premier terme de cette équation n'est pas nul.

Or si le point u est supposé à l'infini, l'équation entre x et u devient

$$x^\beta\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{a} + \ldots\right) + x^{\beta-}\left(\mathrm{A}' + \frac{\mathrm{B}'}{u} + \ldots\right) + \ldots = 0$$

ou $$\mathrm{A}x^\beta + \mathrm{A}'x^{\beta-1} + \ldots = 0.$$

(*) Nous publierons dans notre prochain numéro une reproduction d'un mémoire de M. Chasles, mémoire relatif au nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordre quelconque. Ce mémoire repose sur le principe de correspondance que, pour ce motif, nous avons reproduit ici. G. L.

Il doit toujours y avoir β points x correspondants à u, et par conséquent le terme Ax^β existe nécessairement dans cette équation.

Donc...

Mais il est possible que les $(\alpha + \beta)$ points ne satisfassent pas tous au sens précis de la question, c'est-à-dire qu'il s'y trouve ce qu'on appellerait en analyse des *solutions étrangères*. Il peut s'y trouver aussi des solutions appartenant aux coniques exceptionnelles, et qu'on doit écarter. L'examen à ce sujet ou la vérification est toujours facile dans chaque question.

Lemme II. — *Lorsque deux séries de droites* X *et* U *passent par un même point, si à une droite* X *correspondent* α *droites* U, *et à une droite* U, β *droites* X, *il existera* $(\alpha + \beta)$ *droites* X *qui coïncideront avec des droites correspondantes* U.

Ce lemme est une conséquence immédiate du précédent, car on peut supposer que les droites X et U soient déterminées par deux séries de points x et u situés sur une même droite L.

QUESTION D'EXAMEN

FOYERS DES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME UNICURSALES

1. — *L'équation d'une conique étant définie par les formules*

$$x = \frac{t}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{t^2}{1 - t^2},$$

déterminer les foyers de cette courbe.

On peut résoudre cette question par une première méthode que nous ne ferons qu'indiquer.

Imaginons les formules

$$x = \frac{a + bt + ct^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2} \qquad y = \frac{a' + b't + c't^2}{\alpha + \beta t + \gamma t^2}.$$

On sait que si t varie, le point (x, y) décrit une conique U; soient x', y' les coordonnées d'un foyer F de cette courbe. La définition même du foyer exige que la fonction V :

$$V = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

soit un carré parfait. Or on peut écrire V de la manière suivante :

$$V(\alpha + \beta t + \gamma t^2)^2 = [(a - \alpha x') + (b - \beta x')t + (c - \gamma x')t^2]^2 + [(a' - \alpha y') + (b' - \beta y')t + (c' - \gamma y')t^2]^2.$$

V sera un carré parfait si le second membre de cette égalité, qui est un polynôme du quatrième degré en t de la forme

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E,$$

est lui-même un carré parfait. En exprimant cette condition on trouve entre les coefficients deux relations qui déterminent x' et y'. La résolution de ces équations conduit en général à des équations du quatrième degré, et l'on sait en effet que la *recherche des foyers est un problème du quatrième degré*. Mais ce problème est *quadratique*, c'est-à-dire qu'il peut se résoudre par des équations du second degré seulement. On devra donc, puisque la chose est possible, décomposer les premiers membres des équations trouvées en facteurs du second degré.

Mais la méthode que nous allons indiquer maintenant donne lieu, généralement, à des calculs plus simples.

2 — Nous raisonnerons sur l'exemple particulier que nous nous sommes donné ; mais il va sans dire que le raisonnement que nous allons faire s'applique aux formules les plus générales de cette question.

Cherchons d'abord l'équation générale des tangentes à la conique U : soit

$$y = mx + n$$

une pareille droite, l'équation

$$t^2 = mt + n(1 - t^2)$$

ou

$$t^2(1 + n) - mt - n = 0$$

doit avoir ses racines égales; on a donc

$$m^2 + 4n(n + 1) = 0$$

ou

$$(2n + 1)^2 = 1 - m^2.$$

L'équation cherchée est donc

$$y = mx - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2}. \qquad (1)$$

3. — Ceci posé, par un point $x'y'$ du plan cherchons à mener une tangente à la conique U. Le coefficient angulaire de cette droite est une des racines de l'équation

$$\left(y' - mx' + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - m^2}{4}$$

ou

$$m^2\left(\frac{1}{4} + x'^2\right) - 2mx'\left(y' + \frac{1}{2}\right) + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

On sait d'ailleurs que les coefficients angulaires des tangentes issues du foyer sont $+i$ et $-i$; en d'autres termes l'équation précédente doit se réduire à

$$m^2 + 1 = 0,$$

si l'on suppose que x', y' désignent les coordonnées du foyer cherché. Il faut donc d'abord que le coefficient de m soit nul, ce qui peut arriver en supposant, soit $y' + \frac{1}{2} = 0$, soit $x' = 0$.

L'équation est alors

$$m^2\left(\frac{1}{4} + x'^2\right) + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

La première hypothèse donne

$$m^2(1 + 4x'^2) - 1 = 0$$

et comme

$$m^2 = -1$$

$$2x'^2 + 1 = 0.$$

On a donc les deux foyers imaginaires F_1, F_2,

$$F_1 \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{-2}}{2} \\ y_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad F_2 \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\sqrt{-2}}{2} \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

L'autre hypothèse donne

$$\frac{m^2}{4} + \left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ou

$$\left(y' + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

et l'on a ainsi les deux foyers réels F_3, F_4.

$$F_3 \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = -\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad F_4 \begin{cases} x_4 = 0 \\ y_4 = -\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

4. — Nous voulons maintenant revenir sur la première méthode indiquée dans cette note pour faire une remarque

qui a pour but de rendre cette méthode très rapide et très pratique, quand on la dirige comme nous allons l'indiquer.

Il faut observer que la fonction V qui, comme nous l'avons fait remarquer, est une fonction du quatrième degré en t, se présente sous la forme remarquable d'une somme de deux carrés; abstraction faite, bien entendu, de son dénominateur qui est un carré parfait. Or il est facile de trouver les conditions pour que *la somme des carrés de deux trinômes du second degré soit un carré parfait.*

Supposons que l'on ait identiquement

$$(px^2 + qx + r)^2 + (p'x^2 + q'x + r')^2 = (Px^2 + Qx + R)^2 \quad (A),$$

et considérons l'équation

$$(p + p'i)x^2 + (q + q'i)x + r + r'i = 0; \qquad (B)$$

elle admet deux racines de la forme $\alpha + \beta i$, pour l'une, $\alpha' + \beta' i$ pour l'autre.

L'équation (A) étant une *identité,* ses deux membres prennent la même valeur, réelle ou imaginaire, quand on donne à x une valeur quelconque, réelle ou imaginaire. Il en résulte que

$$P(\alpha + \beta i)^2 + Q(\alpha + \beta i) + R = 0$$

et comme P, Q, R sont des quantités supposées réelles, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2P\alpha\beta + Q\beta &= 0 \\ P(\alpha^2 - \beta^2) + Q\alpha + R &= 0 \end{aligned}\right\} (C)$$

β n'est pas nul, car si β et β' étaient nuls à la fois, l'équation B admettrait deux racines réelles α, α'; et on pourrait en conclure que les deux équations

$$px^2 + qx + r = 0,$$
$$p'x^2 + q'x + r' = 0,$$

auraient les mêmes racines. Dans cette hypothèse on sait que $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$, et le premier membre de l'égalité A est visiblement un carré parfait.

Ainsi β et β' ne sont pas nuls simultanément et nous pouvons supposer β différent de zéro. Les relations (C) deviennent

$$2P\alpha + Q = 0,$$
$$P\alpha^2 + Q\alpha + R = P\beta^2.$$

D'ailleurs P n'est pas nul. On a, en effet,

$$P^2 = p^2 + p'^2$$

et l'on ne peut avoir $P = 0$ si l'on n'a pas, simultanément, $p = 0$ et $p' = 0$; mais alors la fonction proposée ne serait plus que du second degré en x, et l'on retomberait ainsi dans un problème connu.

On a donc $$\alpha = -\frac{Q}{2P}$$
et par suite $$4P^2\beta^2 = 4PR - Q^2.$$
On trouve de même
$$\alpha' = -\frac{Q}{2P} \text{ et } 4P^2\beta'^2 = 4PR - Q^2,$$
par suite $$\beta^2 - \beta'^2 = 0.$$
Si l'on suppose $\beta = \beta'$ les deux racines de (B) sont $\alpha + \beta$ et $\alpha + \beta i$. D'ailleurs l'équation
$$(p - p'i)\, x^2 - (q - q'i)\, x + r - r'i = 0 \qquad (B')$$
aura pour racines celles de (B) quand on y change i en $-i$, et les racines du premier membre de l'égalité A sont $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$. Quant à l'hypothèse $\beta = -\beta'$, elle conduit à la même conclusion. En effet, les deux racines de (B) sont alors $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ et celles de (B′) s'obtenant par le changement de i en $-i$, comme nous venons de le faire remarquer, seront donc $\alpha - \beta i$ et $\alpha + \beta i$.

La somme des racines de l'équation (B) ou (B′) est donc réelle ; le rapport $\dfrac{q + q'i}{p + p'i}$ n'est réel que si l'on suppose $\dfrac{q}{p} = \dfrac{q'}{p'}$; de plus le produit $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$ est aussi réel et l'on trouve de même $\dfrac{r}{p} = \dfrac{r'}{p'}$; on a donc $\dfrac{p}{p'} = \dfrac{q}{q'} = \dfrac{r}{r'}$. C'est le cas particulier, évident *à priori*, déjà signalé plus haut.

Mais alors dans le cas général il faut donc que l'équation (B) n'admette que la racine $(\alpha + \beta i)$; et (B′) la seule racine $(\alpha - \beta i)$. En d'autres termes, (B) et (B′) doivent être des carrés parfaits.

De cette remarque on déduit
$$(q + q'i)^2 = 4\,(p + p'i)(r + r'i)\,;$$
et de celle-ci on déduit les deux conditions

$$q^2 - 4pr = q'^2 - 4p'r' \qquad \text{(C)}$$

et
$$qq' = 2(pr' + rp'). \qquad \text{(D)}$$

Ces formules résolvent le problème proposé dans le cas le plus général qu'il comporte.

5. — Appliquons-les au problème numérique et particulier que nous avons résolu tout à l'heure. Le polynôme en t, qui doit être un carré parfait, est ici

$$[t^2x' + t - x']^2 + [(y' + 1)t^2 - y']^2.$$

Les formules (C) et (D), que nous venons d'établir, donnent ici

$$1 + 4x'^2 = 4y'(y' + 1)$$
$$x'(y' + 1) + x'y' = 0.$$

Cette dernière se décompose en deux:

$$x' = 0 \text{ et } 2y' + 1 = 0.$$

En prenant successivement l'une et l'autre de ces deux équations, on trouve bien les quatre foyers, deux réels, deux imaginaires, obtenus précédemment.

QUESTION 13

Solution par M. E. Devin, élève de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Étant donnés deux points A *et* B *d'une parabole inconnue et la droite* Δ, *axe de cette courbe, on abaisse sur* Δ *les perpendiculaires* AA', BB'; *puis on trace les droites* AB', BA' *qui se coupent en un certain point* C. *Démontrer que si par le point* C *on mène une parallèle à l'axe* Δ, *cette droite rencontre* AB *en un point qui appartient à la tangente au sommet, ce qui permet de déterminer simplement ce sommet.* (G. L.)

Nous prenons pour axes de coordonnées l'axe de la parabole et sa tangente au sommet.

Soient x' et y' les coordonnées du point A, x'' et y'' les coordonnées du point B; l'équation de AB est

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Elle rencontre l'axe Oy en un point I tel que

$$OI = y' - x' \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

ou $$OI = \frac{x'y'' - y'x''}{x' - x''}. \qquad (1)$$

D'ailleurs les points A et B étant sur la parabole on a :

$$y'^2 = 2px' \quad \text{et} \quad y''^2 = 2px''.$$

Remplaçant dans (1) x' et x'' par leur valeur tirée de ces équations, on a $OI = \frac{y'y''}{y' + y''}$.

L'équation de AB′ est

$$y(x' - x'') = y'x - y'x''.$$

Celle de BA′ est

$$y(x' - x'') = -y''x + x'y''.$$

La parallèle à Ox menée par le point C, commun aux deux droites AB′ et BA′, s'obtient en ajoutant membre à membre ces deux équations, après avoir multiplié la première par y'' et la seconde par y', ce qui donne

$$y(y' + y'')(x' - x'') = (x' - x'')y'y'';$$

d'où $$y = \frac{y'y''}{y' + y''} = OI.$$

Donc la droite AB et la parallèle à Δ menée par le point C rencontrent bien la tangente au sommet de la parabole inconnue, au même point I.

Cette remarque permet de déterminer le sommet et la tangente en ce point d'une parabole, quand on connaît deux points et l'axe de cette courbe.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Vazou, au collège Rollin; Griffon, à Montpellier; Chevasson et Dupuis, à Lons-le-Saulnier; Ossilon, à Versailles.

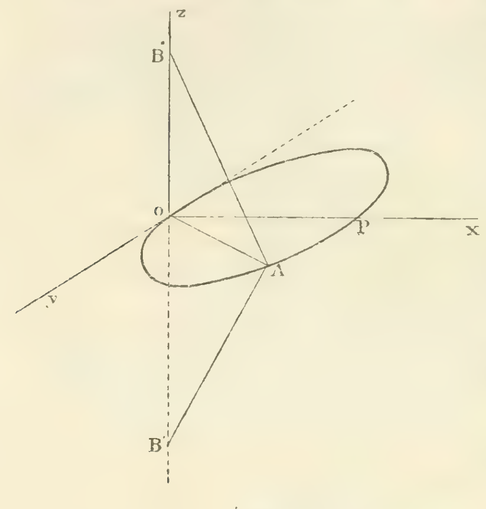
QUESTION 19

Solution par M. Devin, élève au lycée Charlemagne.

On donne un cercle C et une droite D, qui rencontre le cercle en O et est perpendiculaire à son plan. Soit A un point du cercle et soient sur la droite D deux points B et B′ dont la distance au

point O est égale à la distance de ce point O au point A. On mène les droites AB, AB′.

Trouver le lieu de ces droites. C'est une surface du quatrième degré. Étudier les sections faites par des plans parallèles au plan des xy.



1. — Nous prendrons pour axe des z la droite D, pour axe des x le diamètre OP du cercle donné et pour axe des y la tangente à l'extrémité O de ce diamètre.

Dans ce système les équations du cercle donné sont

$$\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

en désignant par R le rayon de ce cercle.

Soient x', y', o les coordonnées du point A, qui est variable sur le cercle (1), et λ la longueur OA:

on a $$OA = OB = OB' = \lambda.$$

Les équations de la droite AB sont

$$\frac{x - x'}{x'} = \frac{y - y'}{y'} = \frac{z}{-d}$$

celles de AB′ sont (2)

$$\frac{x - x'}{x'} = \frac{y - y'}{y'} = \frac{z}{d}$$

D'ailleurs le point A étant sur le cercle (1), on a les relations

$$x'^2 + y'^2 = \lambda^2 \qquad (3)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x'^2 + y'^2 - 2Rx' = 0. \end{array}\right. \qquad (4)$$

L'équation du lieu décrit par les droites AB, AB′ s'obtiendra

en éliminant x', y', λ entre les secondes des équations (2) par exemple, et les conditions (3) et (4).

Comme d'ailleurs les équations (2) ne diffèrent que par le signe de λ, et que dans l'élimination on doit élever d au carré, il est indifférent de prendre les premières ou les secondes des équations (2).

On en déduit $$\lambda(x - x') = zx'; \qquad (5)$$
de (3) et (4) on tire $$\lambda^2 = 2Rx',$$
d'où $$x' = \frac{\lambda^2}{2R}.$$

Remplaçant dans (5) on a:
$$d\left[x - \frac{\lambda^2}{2R}\right] = z\,\frac{\lambda^2}{2R}.$$
ou, en vertu de (4),
$$\left[x - \frac{x'^2 + y'^2}{2R}\right]^2 = z^2\,\frac{x'^2 + y'^2}{4R^2},$$
et comme la condition
$$x'^2 + y'^2 - 2Rx' = 0$$
exige $$z = 0,$$
on a $$x = x'$$
et $$y = y',$$
par suite pour le lieu des droites AB et AB'
$$[x^2 + y^2 - 2Rx]^2 = z^2(x^2 + y^2).$$
ou en désignant par d le diamètre du cercle, on a enfin
$$[x^2 + y^2 - dx]^2 = z^2(x^2 + y^2).$$

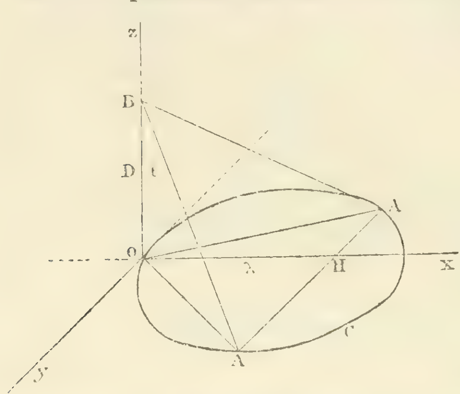
2. — Nous nous proposons maintenant d'étudier la section de la surface par des plans parallèles au plan des xy; pour cela il faut couper par $$z = h$$
et faire varier h.

Faisant $z = h$ dans l'équation de la surface on a
$$[x^2 + y^2 - dx]^2 = h^2(x^2 + y^2),$$
et sous cette forme on reconnaît l'équation générale des conchoïdes du cercle ou limaçon de Pascal.

3. — Les deux génératrices qui partent d'un point B quelconque de D, sont telles que l'on a
$$BA = BA' = BO.$$
Par suite $$OA = OA'$$

et la trace du plan de ces deux génératrices sera parallèle à OY, car, OA et OA′ étant des cordes égales du cercle C et issues du même point O, AA′ est parallèle à la tangente OY.

Soit H le point de rencontre de AA′ avec OX; posant



$OH = \lambda$, $OB = \mu$, l'équation du plan de ces deux droites est

$$\frac{\lambda}{x} + \frac{z}{u} = 1$$

mais λ et μ sont liés par une relation de condition, car on doit avoir

$$OA = OA' = \mu.$$

Par suite dans le triangle rectangle OHA, on a en désignant par x' et y' les coordonnées du point A situé sur les cercles

$$\lambda^2 + y'^2 = \mu^2$$

et aussi
$$\lambda^2 + y'^2 = 2R\lambda$$

ou
$$\lambda^2 + y'^2 = d\lambda\,;$$

d'où je déduis
$$\mu^2 = d\lambda.$$

L'équation du plan considéré en fonction d'un seul paramètre variable sera donc

$$\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1. \qquad (\alpha)$$

Cherchons l'intersection de ce plan avec la surface trouvée

$$(x^2 + y^2 - dx)^2 = z^2\,(x^2 + y^2). \qquad (\beta)$$

Si nous éliminons z entre ces deux équations (α) et (β), nous aurons la projection de cette intersection sur le plan des xy.

Faisons cette élimination.

On a en tirant z de (α)

$$z = \lambda - \frac{dx}{\lambda} = \frac{\lambda^2 - dx}{\lambda}.$$

Remplaçant dans β on a

$$\lambda^2(x^2 + y^2 - dx)^2 = (\lambda^2 - dx)^2(x^2 + y^2)$$

ou en simplifiant

$$\lambda^2(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 - \lambda^2] + d^2x^2[\lambda^2 - (x^2 + y^2)] = 0$$

ou $$[\lambda^2(x^2 + y^2) - d^2x^2][x^2 + y^2 - \lambda^2] = 0.$$

La première solution

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - d^2x^2 = 0$$

représente les projections OA et OA′ de deux droites AB et A′B qui appartiennent en effet au plan et à la surface.

La seconde solution $x^2 + y^2 = \lambda^2$ (γ)

est la projection de la conique d'intersection du plan et de la surface. Cette équation représente un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est égal à λ.

On peut donc considérer ces coniques, mobiles dans l'espace, comme étant les sections faites par le plan mobile (α) dans le cylindre droit représenté par l'équation (γ).

Si donc nous inscrivons dans ce cylindre une sphère tangente au plan (α), le foyer de la conique sera le point de contact de cette sphère et du plan (α). C'est ce point dont nous allons chercher le lieu géométrique. Pour cela l'équation d'une sphère inscrite dans le cylindre (α) est

$$x^2 + y^2 + (z - \mu)^2 = \lambda^2, \qquad (\delta)$$

μ étant la distance de son centre à l'origine (son centre est sur *oz*).

Mais cette sphère est assujettie à être tangente au plan (α).

Soient donc (x', y', z') les coordonnées du point de contact, dont nous cherchons le lieu; le plan tangent en ce point à la sphère δ est

$$xx' + yy' + z(z' - \mu) + \mu^2 - \lambda^2 - \mu z' = 0 \qquad (1)$$

et ce plan doit se confondre avec le plan (α) dont l'équation

est $$\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1$$

ou $$x + \frac{\lambda}{d} z - \frac{\lambda^2}{d} = 0. \qquad (2)$$

Identifions ces deux équations.

Pour cela, ayant écrit la première

$$x + y\frac{y'}{x'} + \frac{z(z' - \mu)}{x'} + \frac{\mu^2 - \mu z' - \lambda^2}{x'} = 0,$$

on a pour l'identification

$$y' = 0$$

$$\frac{z' - \mu}{x'} = \frac{\lambda^2}{d}$$

et
$$\frac{\mu z' + \lambda^2 - \mu^2}{x'} = \frac{\lambda^2}{d}.$$

La première de ces relations prouve d'abord que tous les points du lieu sont dans le plan des zx.

On aura donc l'équation du lieu en éliminant les paramètres λ et μ entre les équations

$$\frac{z - \mu}{x} = \frac{\lambda}{d} \qquad (3)$$

$$\frac{\mu(z - \mu) + \lambda^2}{x} = \frac{\lambda^2}{d} \qquad (4)$$

et l'équation du plan $\frac{dx}{\lambda^2} + \frac{z}{\lambda} = 1.$ (5)

De (3) et (4) on déduit $\mu x + \lambda d = \lambda x$

$$\mu = \frac{\lambda(x - d)}{x}.$$

Remplaçant dans (4) on a

$$\frac{z - \frac{\lambda(x - d)}{x}}{x} = \frac{\lambda}{d}$$

ou
$$\frac{zx - \lambda(x - d)}{x^2} = \frac{\lambda}{d}$$

ou
$$dzx = \lambda(x^2 + dx - d^2).$$

Remplaçant λ par cette valeur dans l'équation (5) on a pour le lieu

$$\frac{dx}{\frac{d^2z^2x^2}{(x^2 + dx - d^2)^2}} + \frac{z}{\frac{dzx}{x^2 + dx - d^2}} = 1$$

ou
$$(x^2 + dx - d^2)^2 + z^2(x^2 + dx - d^2) = dxz^2$$

ou
$$(x^2 + dx - d^2)^2 = d^2z^2 - z^2x^2$$

ou enfin
$$z^2 = \frac{(x^2 + dx - d^2)^2}{d^2 - x^2}.$$

4. — C'est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à l'axe des x. Si l'on écrit son équation sous la

forme $$z^2 = \frac{(x^2 + dx - d^2)^2}{(d - x)(d + x)}$$

on voit que les droites $x = d$ et $x = -d$ sont des asymptotes de la courbe ; d'ailleurs elle n'a pas d'autres asymptotes.

Ces droites séparent aussi le plan en régions; comme on doit avoir $$(d - x)(d + x) < 0,$$
la courbe est donc comprise tout entière entre ces deux droites.

Si l'on cherche les points de rencontre de la courbe avec l'axe des z, on trouve les deux points

$$z = d \quad \text{et} \quad z = -d.$$

L'intersection avec ox est donnée par l'équation

$$[x^2 + 2Rx - 4R^2]^2 = 0$$

qui prouve d'abord que ces points de rencontre, s'ils sont réels, sont des points doubles de la courbe.

Résolvons l'équation du second degré

$$x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0,$$

on a $$x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2},}{1}$$

d'où $$x' = R(\sqrt{5} - 1) \quad \text{et} \quad x'' = -R(\sqrt{5} + 1).$$

A la valeur x' correspond un point double réel A, dont la distance OA à l'origine est égale au double du côté du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle donné.

A la seconde valeur x'' correspond un point double isolé, car les tangentes en ces points sont imaginaires, et de plus, comme on a $\sqrt{5} + 1 > 2$, ce point est en dehors des deux droites $x = d$ et $x = -d$. C'est donc bien un point double isolé.

Pour avoir les tangentes au point double A, nous pouvons transporter les axes en ce point par les formules

$$z = Z$$
$$x = X + R(\sqrt{5} - 1).$$

L'équation étant

$$z^2 = \frac{[x - R(\sqrt{5} - 1)]^2[x + R(\sqrt{5} + 1)]^2}{4R^2 - x^2}$$

on aura $$z^2 = \frac{X^2[X + 2R(\sqrt{5})]^2}{4R^2 - [X + R(\sqrt{5} - 1)]^2}$$

et les coefficients angulaires des tangentes au point double A sont donnés par la limite de $\frac{Z^2}{X^2}$ pour $X = 0$.

Or on a $$\frac{Z^2}{X^2} = \frac{[X + 2R(\sqrt{5})]^2}{4R^2 - [X + R(\sqrt{5} - 1)]^2}$$

et pour $X = 0$ on a

$$\text{limit}\,\frac{Z^2}{X^2} = \frac{4R^2(\sqrt{5})^2}{4R^2 - R^2(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{10}{(\sqrt{5} - 1)}$$

$$= \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

On a ainsi les deux tangentes OT et OT′ à la courbe au point A.

Quant au point double isolé, il est à une distance de l'origine égale au double du côté du décagone régulier étoilé inscrit dans le cercle donné. Il est en R, sur la partie négative de l'axe Ox.

La courbe, qui est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe Ox, a donc la forme que lui donne la figure ci-contre.

5. — Il faut maintenant étudier les parties qui proviennent réellement de foyers de coniques.

Les foyers étant donnés par des sphères inscrites dans un cylindre droit ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = \lambda^2$$

et la plus grande valeur de λ étant $\lambda = d$, les points limites

des parties correspondant à des foyers réels seront donnés en coupant la surface par le cylindre

$$x^2 + y^2 = d^2.$$

On a alors, pour avoir la projection de cette intersection sur le plan des zx, à résoudre les deux équations

$$x^2 + y^2 = d^2$$

et $$(x^2 + y^2 - dx)^2 = z^2(x^2 + y^2).$$

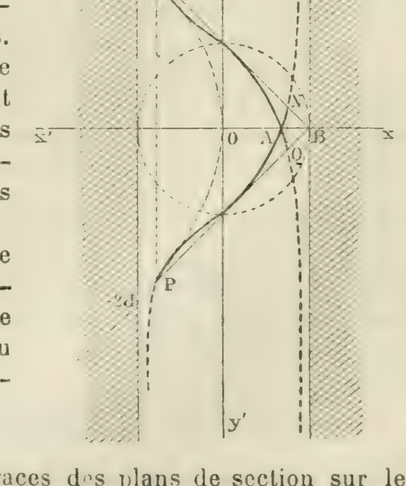
D'où l'on déduit $d^2(d - x) = z^2 d^2$

ou $$z^2 = (d - x)^2,$$

ce qui donne les deux droites

$$z + x = d$$
$$z - x = -d,$$

c'est-à-dire les parallèles aux bissectrices des axes passant par les points D et D′ et les points de rencontre de cesdroites avec la courbe sont les points limites de parties correspondant à des foyers réels.



Par suite, dans la figure ci-contre la partie en trait plein correspond aux foyers réels et la partie en pointillé correspond aux foyers imaginaires.

On peut remarquer que ces deux droites de séparation ne sont autre chose que les tangentes issues du point limite B à la parabole

$$z^2 + 4dx = 0,$$

qui est l'enveloppe des traces des plans de section sur le plan des zx, car l'équation générale des plans de section est $$\lambda^2 - \lambda z - dx = 0,$$
qui représente la trace, sur le plan des zx, des plans en

fonction du paramètre λ. L'enveloppe de ces traces est bien la parabole $$z^2 + 4dx = 0.$$

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Therel, à Versailles; Griffon, à Montpellier.

QUESTION 27

En désignant par V l'angle aigu ou obtus des asymptotes de l'hyperbole, angle dans lequel se trouve la courbe, démontrer que

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC} \sin \theta}{A + C - 2B \cos \theta}$$

ε *étant égal à* ± 1, *et son signe étant le même que celui du discriminant.*

L'équation de l'hyperbole étant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sil'on pose $u = a^2 - b^2$, l'hyperbole est équilatère si $u = 0$, mais nous supposons u différent de zéro et nous nous proposons de décider, d'après l'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

et sans opérer sa réduction, si la courbe est située dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus de ses asymptotes; on pourrait dire *si l'hyperbole est aiguë ou obtuse.*

Le premier cas est réalisé quand $\frac{a^2}{b^2}$ est plus grand que 1, quand u est positif par conséquent; l'autre quand $\frac{a^2}{b^2}$ est plus petit que 1, ce qui correspond à l'hypothèse $u < 0$. Or l'on sait que les axes de la conique (1) sont donnés par l'équation,

$$R^4 - \frac{(A + C - 2B \cos \theta)\Delta}{\delta^2} R^2 - \sin^2 \theta \frac{\Delta^2}{\delta^3} = 0 \quad (2)$$

dans laquelle on a supposé, suivant l'usage;

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Les nombres a^2 et $-b^2$ étant les racines de (2), on a donc

$$a^2 - b^2 = \frac{(A + C - 2B \cos \theta)\Delta}{\delta^2}. \qquad (3)$$

Le signe de $a^2 - b^2$, celui de u en d'autres termes dépend donc uniquement du signe du produit $(A + C - 2B \cos \theta)\Delta$: or la formule connue

$$\operatorname{tg} V = \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC} \, . \sin \theta}{A + C - 2B \cos \theta} = \pm \Delta \frac{\sqrt{B^2 - AC} \sin \theta}{\Delta(A + C - 2B \cos \theta)}$$

prouve que si l'on suppose $V < 90°$, par suite $a^2 - b^2$ positif; comme l'on a d'après la formule (3) $\Delta(A + C - 2B \cos \theta) < 0$, il faudra prendre le même signe que Δ. On voit de même que si V est obtus, il faut encore prendre le signe de Δ. La formule qui donne l'angle des asymptotes, en définissant ainsi celui qui comprend la courbe, est donc

$$\operatorname{tg} V = \varepsilon \frac{\sqrt{B^2 - AC} \sin \theta}{A + C - 2B \cos \theta};$$

ε étant $+1$ ou -1, savoir $+1$ si le discriminant est positif, -1 s'il est négatif.

QUESTIONS PROPOSÉES

32. — On considère des cercles C passant par le sommet d'une parabole P, et tangentes à cette courbe en un point différent du sommet : — 1. Trouver l'équation générale de ces cercles C ; — 2. Trouver le lieu U des centres. Ce lieu est une parabole cubique ayant un point de rebroussement dont les coordonnées sont (p, o) ; on demande de déterminer l'intersection de U et de P. *(G. L.)*

33. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique quatre normales formant un faisceau harmonique. *(V.)*

34. — On considère deux points fixes O et O', et une droite Δ perpendiculaire à OO' au point A ; soit M un point quelconque de Δ ; on mène MO et MO' ; puis à la droite MO' on élève au point O' une perpendiculaire qui rencontre OM

au point M′ ; on pose alors M′O′ = x, MO′ = y, et l'on considère un point I qui a pour coordonnées x et y, par rapport à un angle droit donné yox. Trouver le lieu décrit par ce point quand M se meut sur Δ, et discuter les différentes formes du lieu quand on donne à A toutes les positions possibles sur OO′. Démontrer que la courbe est unicursale. *(G. L.)*

35. — La question étant posée dans les mêmes termes, mais en supposant cette fois que Δ est parallèle à OO′, trouver le lieu du point I ; on distinguera les différentes formes du lieu suivant que le cercle décrit sur OO′ comme diamètre est extérieur, tangent ou sécant à la droite Δ. On propose aussi de reconnaître que la courbe trouvée est une courbe du sixième degré unicursale. *(G. L.)*

NÉCROLOGIE

Nous avons le regret d'apprendre la mort de MM. Liouville, professeur au Collège de France, et Briot, professeur à la Faculté des sciences de Paris. La Rédaction se propose de donner prochainement une notice sur les travaux de ces deux savants, qui ont occupé une si grande place dans l'enseignement des Mathématiques en France.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CH IX. 20, RUE BERGERE. — 21308-2.

DÉTERMINATION IMMEDIATE

PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE (*) DU NOMBRE DE POINTS D'INTERSECTION DE DEUX COURBES D'ORDRE QUELCONQUE QUI SE TROUVENT A DISTANCE FINIE

Par M. **Chasles** (**).

Cette question n'est autre que celle de déterminer, en algèbre, le nombre des solutions de deux équations à deux inconnues; ce qui exige parfois des calculs compliqués. Les considérations géométriques auxquelles se prête le principe de correspondance (qui s'applique de même directement à la question algébrique) évitent ces calculs et conduisent à une expression fort simple du nombre cherché.

Il suffit de démontrer d'abord ce théorème fondamental de la géométrie analytique, que le nombre des points, réels ou imaginaires, communs à deux courbes géométriques quelconques d'ordre p et p', est toujours pp'. C'est à la démonstration immédiate de ce théorème, qui a offert pendant longtemps des difficultés, que se prête le principe de correspondance (de deux manières) ; et même la simple définition des courbes géométriques d'être rencontrées toujours en un même nombre de points, réels ou imaginaires, par une droite quelconque, suffit, sans qu'on ait à se servir des équations des courbes.

Théorème I. — *Deux courbes d'ordre* p *et* p' *ont toujours* pp' *points communs, réels ou imaginaires.*

Prenons des points fixes quelconques, I et O. Une droite IX rencontre la première courbe en p points α; les droites menées de ces points au point O rencontrent la deuxième courbe en pp' points α'; par ceux-ci on mène pp' droites IU.

(*) Voyez la note p. 222.

(**) Extrait des Comptes rendus de l'académie des sciences.

Ces pp' droites correspondent à IX. De même, à une droite IU, qui rencontre la deuxième courbe en p' points, correspondent $p'p$ droites IX. Il existe donc $2\,pp'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. pp' de ces droites sont coïncidentes avec la droite IO, et n'appartiennent pas à des points communs aux deux courbes; mais chacune des pp' autres droites passe par un point α de la première courbe coïncidant nécessairement avec un des points α' de la deuxième courbe situés sur la droite αO. Le théorème est donc démontré.

Les points multiples et les points de contact que peuvent avoir les deux courbes ne modifient en rien la démonstration, de sorte que le résultat pp' est général.

Observation. — Si les deux courbes avaient un point commun sur la droite IO, ce point servirait, comme les autres, à former le nombre pp' des solutions étrangères; mais, néanmoins, il compterait aussi dans le nombre des points d'intersection des deux courbes; car une droite IX, infiniment voisine de IO, donnerait lieu alors à une droite correspondante IU, infiniment peu différente de IX, et conséquemment faisant, à la limite, une coïncidence. Mais, du reste, on peut prendre les deux points I, O sur une droite qui ne passe pas par un point commun aux deux courbes: ce qui justifie notre raisonnement.

Théorème II. — *Lorsque deux courbes d'ordre* p *et* p' *sont représentées par les deux équations*

$$(x^{m}, y^{n})^{p} = 0, \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0$$

de degré p *et* p', *dans lesquelles les puissances supérieures de* x *et* y *sont* m, n, m', n', *le nombre de leurs points d'intersection, situés à distance finie, est*

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega,$$

ω *étant le nombre des points d'intersection des deux courbes qui peuvent se trouver à l'infini, autres que ceux qui s'y trouvent sur les axes coordonnés, en nombre* $(p - m)(p' - m') + (p - n)(p' - n')$.

Le nombre total des points d'intersection des deux courbes étant pp' (*Théorème I*), il suffit d'en retrancher leurs points

communs situés à l'infini. Au nombre de ces points s'en trouvent évidemment $(p - n)(p' - n')$ sur l'axe Ox et $(p - m)(p' - m')$ sur l'axe Cy. Donc, si les deux courbes ont à l'infini ω autres points communs, le nombre de leurs points à distance finie se réduit à

$$pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') - \omega.$$

La question se réduit donc à déterminer le nombre ω des points communs aux deux courbes qui peuvent se trouver sur la droite de l'infini, autres que ceux qui sont représentés par $[(p - m)(p' - m') + (p - n)(p' - n')]$.

Or cela se fait sans difficulté. L'équation de chaque courbe fait connaître, par une équation en $\frac{y}{x}$ qu'on pose immédiatement, le nombre et la direction des points de la courbe qui se trouvent à l'infini, ainsi que les tangentes en ces points. Ces deux choses, les points et leurs tangentes, sont les éléments principaux de la question.

Deux points des deux courbes situés dans une même direction $\left(\text{déterminée par une même valeur de } \frac{y}{x}\right)$ sont deux points coïncidents, puisqu'ils sont à l'infini sur deux droites parallèles; ils comptent donc pour 1 dans le nombre ω. Mais si les courbes ont en ce point la même tangente, elles ont deux points communs: le point compte donc pour 2. Si l'une des courbes a un point double, il compte aussi pour 2, et de même pour les points multiples d'ordre supérieur. Si les deux courbes ont une tangente commune en leurs points multiples coïncidents, cette tangente ajoute une unité au produit des ordres de multiplicité.

Il peut entrer aussi dans le nombre ω des points situés sur les axes coordonnés Ox, Oy, soit que les courbes aient un contact commun avec un de ces axes en son point à l'infini, ou un contact avec la droite de l'infini elle-même, au même point.

Sans chercher à énumérer les différents cas que peuvent présenter les conditions de contact de deux courbes, je vais donner quelques exemples dans lesquels on trouvera toujours une vérification du résultat.

Voici l'indication du sujet de chacun de ces exemples.

I. Les deux courbes ont un point d'intersection sur la droite de l'infini : $\omega = 1$.

II. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini, dont un est un point d'intersection et l'autre un point de contact : $\omega = 1 + 2 = 3$.

II *bis*. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini : $\omega = 4$.

III. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, et leur tangente commune est la droite de l'infini: $\omega = 2$.

IV. Les deux courbes ont un point de contact avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$.

IV *bis*. Les deux courbes ont trois points de contact à l'infini, dont deux sont sur les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$.

V. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini; la seconde courbe lui est tangente en ce point : $\omega = 2$.

VI. La première courbe a un point double à l'infini; la seconde courbe passe par ce point : $\omega = 2$.

VII. La première courbe a un point double à l'infini ; la seconde courbe passe par ce point et est tangente à l'une des deux branches : $\omega = 3$.

VIII. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, et ont les mêmes tangentes en ce point : $\omega = 6$.

IX. La première courbe a un point triple et la seconde un point double en un même point de l'infini; les deux courbes ont deux tangentes communes en ce point; en outre, elles ont un autre point de contact à l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 8 + 1 = 9$.

X. Exemples pris d'un mémoire de M. Minding : $\omega = 0$.

XI. Du même : $\omega = 0$.

XII. Autre exemple de M. Minding où $\omega = 1 + 2 = 3$.

Exemples. Faisons

$$N = pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n');$$

le nombre cherché sera $N - \omega$.

Soient les courbes

$$\text{(I)} \qquad y^3 - 2y^2x + yx - 1 = 0,$$
$$y^2 - 2yx - y - 2x + 2 = 0.$$

$N = 6 - 2 = 4$. Les courbes ont un point commun à l'infini dans la direction de la droite $y = 2x$. Leurs tangentes en ce point ne coïncident pas : aussi $\omega = 1$, et $N - \omega = 3$. Les deux courbes ont donc trois points d'intersection à distance finie. Effectivement l'équation finale en y est
$$5y^3 - 3y^2 - 2 = 0.$$

(II) $$y^3 - 7xy^2 + 14x^2y - 8x^3 + 7y^2 - 30xy + 20x^2 + 7y + 13x - 15 = 0$$
$$y^2 - 6xy + 8x^2 + 4y - 12x + 5 = 0.$$

$N = 6$. Les courbes ont deux points communs à l'infini, dans les directions des droites $y = 2x$, $y = 4x$; le premier est un point d'intersection et le second un point de contact du premier ordre; la tangente commune a pour équation $y = 4x - 2$; donc $\omega = 1 + 2$, et $N = 3$. Donc les courbes ont trois points d'intersection à distance finie, ce qui s'accorde avec le résultat de M. Magnus (*Journal de Crelle*, 1843, t. XXVI, p. 366.)

(II *bis*) $$2y^3 - 2x^2y + y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$$
$$y^3 - x^2y + 3y^2 - xy - x^2 = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont deux points de contact à l'infini; leurs tangentes en ces points ont pour équations $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{3}{2}$.

Donc $\omega = 4$; $N - 4 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points communs à distance finie; ces quatre points coïncident à l'origine des coordonnées où les courbes ont chacune un point double.

(III) $$x^3 + 2x^2y + y^2x + 3y^2 + y = 0$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point de contact à l'infini, dans la direction de la droite $y = -x$; leur tangente en ce point est la droite de l'infini : $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Les courbes ont donc quatre points d'intersection à distance finie. L'un est l'origine des coordonnées; les trois autres sont déterminés par l'équation $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0$.

(IV) $$y^2x - 2y^2 + 3xy + x^2 = 0.$$
$$y^2 - x^2 = 0.$$

$N = 6 - 1 = 5$. Les deux courbes ont un point de contact

avec la droite de l'infini sur l'axe Ox : $\omega = 1$, $N - 1 = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la cubique a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2y^2 + 3y - 2 = 0$.

(IV *bis*)
$$y^2x - 2yx^2 + 2y + x = 0$$
$$2y^2x - 4yx^2 + y + 3x = 0.$$

$N = 9 - 2 = 7$. Les deux courbes ont trois tangentes communes en trois points de l'infini; l'une est la droite $y = 2x$, et les deux autres sont les axes Ox, Oy : $\omega = 2 + 1 + 1 = 4$. Les deux courbes ont donc $N - 4 = 3$ points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est en O; les deux autres sont déterminés par les équations finales $3y^2 - 1 = 0$, $x^2 - 3 = 0$.

(V)
$$y^3 + x^3 - 3ayx = 0$$
$$y^2 + yx + ax = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point d'inflexion à l'infini dans la direction de la droite $y = -x$; la tangente en ce point a pour équation $y = -x - a$. La seconde courbe passe par le même point et a la même tangente. Donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 4$. Ainsi les deux courbes ont quatre points d'intersection à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la courbe a un point double; les deux autres sont déterminés par l'équation finale $2x^2 - 3ax + 16a^2 = 0$.

(VI)
$$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 + 3y - x = 0$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0.$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini, dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite $y = x - 1$ et la droite de l'infini. La deuxième courbe passe par le même point, et sa tangente est la droite $y = x + 1$. Les deux courbes ont donc deux points communs : $\omega = 2$, $N - \omega = 4$. Les courbes ont quatre points d'intersection à distance finie, dont un est l'origine des coordonnées, et les trois autres sont déterminés par l'équation $4x^3 - 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

(VII)
$$y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + y^2 - x^2 - 3y + x = 0$$
$$y^2 - 3yx + 2x^2 + y = 0,$$

$N = 6$. La première courbe a un point double à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point sont la droite de l'infini et la droite $y = x + 1$. La deuxième courbe passe par ce point et a la même tangente. ce qui fait trois points communs aux deux courbes; ainsi $\omega = 3$, $N - \omega = 6 - 3 = 3$, et les courbes ont trois points d'intersection à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont déterminés par l'équation finale $3x^2 - 7x + 3 = 0$.

(VIII) $y^2x - 2x^2y + x^3 + y^2 - 5xy + 4x^2 + 2y = 0$

$$2y^2x - 4x^2y + 2x^3 - y^2 + 5x^2 + 4y = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Les deux courbes ont chacune un point double en un même point de l'infini, dans la direction de la droite $y = x$, et ont les mêmes tangentes en ce point, lesquelles ont pour équations $y = x + 1$, $y = x + 2$.

Ce qui fait six points communs à l'infini : $\omega = 6$ et $N - \omega = 2$.

Ainsi les deux courbes n'ont que deux points d'intersection à distance finie. Ces points sont à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

(IX) $x(y - x)^3 - (3y + 4x)(y - x) + 6y = 0$

$$x(y - x)^2 - 3x(y - x) + 2y = 0.$$

$N = 12 - 1 = 11$. La première courbe a un point triple à l'infini dans la direction de la droite $y = x$; les tangentes en ce point ont pour équations

$$y = x + 1, \quad y = x + 2, \quad y = x + 3.$$

La courbe est tangente à l'axe Oy, à l'infini.

La deuxième courbe est aussi tangente à cet axe en ce point, et a un point double coïncidant avec le point triple de la première; en outre, ses deux branches sont tangentes à deux branches de celle-ci : ce qui fait huit points communs aux deux courbes, et un neuvième au point de contact sur l'axe Oy; ainsi $\omega = 9$ et $N - \omega = 2$. Les courbes n'ont donc que deux points communs à distance finie. Ces deux points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox.

(X) $(x,2)\, y^4 + (x,4)\, y^2 + (x,5)\, y + (x,2)\, y^3 + (x,5) = 0$

$$(x,8)\,y^5 + (x,9)\,y^3 + (x,6)\,y^4 + (x,4)\,y^2 + (x,3)\,y + (x,4) = 0$$

(x,α) désigne un polynôme en x de degré α (Minding, *Journal de Crelle*, t. XXII, p. 178).

On ne peut déterminer que N. On a $N = 6 \cdot 13 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 78 - 20 = 58$, quels que soient les polynômes; ce qui s'accorde avec la formule de Minding, qui donne

$$4 \cdot 8 + \frac{11}{2} + \frac{11}{2} + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 8 + 11 + 15 = 58.$$

La première courbe a trois points à l'infini, autres que les trois qui s'y trouvent aux extrémités des axes coordonnés; et la seconde courbe n'en a qu'un, lequel se trouve infiniment voisin de l'axe des x, dû à ce que la courbe est tangente en ce point à la droite de l'infini, de sorte que les deux courbes n'auront pas de points communs s'exprimant par $x = \infty$, $y = \infty$, quels que soient les polynômes multiplicateurs des puissances de y; mais elles pourront en avoir aux extrémités des axes coordonnés, s'exprimant par $y = 0$, $x = \infty$, ou bien $x = 0$, $y = \infty$, selon ce que seront les polynômes.

(XI) $$bx^2y^4 + ay^4 + gx^3y + exy^2 + lx^3 + cy^2 + kx^2 + h = 0$$
$$\beta x^5y^2 + \mu x^2 + \delta x^2y + \gamma z + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 16 = 26$. La première courbe n'a qu'un point à l'infini, autre que les cinq qui s'y trouvent aux extrémités des deux axes coordonnés, et la seconde courbe n'en a aucun; en outre les deux courbes n'ont pas de contact sur les axes Ox, Oy. Donc $\omega = 0$, et les deux courbes ont leurs vingt-six points d'intersection à distance finie; ce qui s'accorde avec le résultat de M. Minding.

(XII) $$bx^2y^4 + gx^3y + exy^2 + fy^3 + kx^2 + h = 0$$
$$\beta x^5y^2 + \mu x^4 + \delta x^2y + \gamma y + \lambda = 0.$$

$N = 42 - 6 - 10 = 26$. Ces deux équations sont les mêmes que les précédentes, où l'on a fait $a = 0$ et $l = 0$ dans la première.

La première courbe a l'axe Ox pour asymptote et l'axe Oy pour asymptote double; en d'autres termes, la courbe a deux points à l'infini sur Ox, et trois points à l'infini sur Oy.

La seconde courbe a une asymptote double coïncidant avec Ox, et cinq asymptotes coïncidant avec Oy. Ainsi les deux courbes ont un point de contact (c'est-à-dire deux points consécutifs) à l'infini sur l'axe Ox, et un contact double (trois points consécutifs) à l'infini sur l'axe Oy; ce qui fait $\omega = 1 + 2 = 3$. $N - \omega = 23$. Ainsi les deux courbes ont vingt-trois points communs à distance finie.

Les trois points qui entrent dans ω forment trois couples de solutions des deux équations, savoir

$$y = 0, x = \infty\ ;\ x = 0, y = \infty\ ;\ x = 0, y = \infty.$$

Ce résultat s'accorde avec la méthode analytique de M. Minding.

NOTE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Je me propose de résoudre, dans les pages qui suivent, un problème simple et sans doute bien connu, afin d'en tirer des conséquences assez importantes, et de jeter un nouveau jour sur certains faits de la géométrie cartésienne.

Désignons, en coordonnées cartésiennes rectangles, par

$$U = Mx^2 + Ny^2 = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'un faisceau de deux droites qui a son sommet à l'origine des coordonnées,

et par
$$ax + by + 1 = 0 \qquad (2)$$

l'équation d'une droite, fixe comme le faisceau, et qui ne passe pas par le sommet du faisceau; il en résulte que l'équation

$$Mx^2 + Ny^2 + (ax + by + 1)^2 = 0 \qquad (3)$$

représente une conique tangente aux deux rayons du faisceau (1) aux points où ils sont rencontrés par la droite (2).

Une droite quelconque du plan peut être représentée par l'équation

$$ax + by + 1 = \lambda x + \mu y \qquad (4)$$

en y faisant varier λ et μ; et on trouvera sans peine que cette droite devient tangente à la conique (3) moyennant la relation

$$\frac{\lambda^2}{M} + \frac{\mu^2}{N} + 1 = 0; \qquad (5)$$

en d'autres termes, l'équation (5) est l'équation tangentielle de la conique (3), λ et μ étant les coordonnées tangentielles variables.

Cela posé, sur la tangente mobile (4), les deux tangentes fixes (1) déterminent un segment dont le milieu P appartient à la droite que représente l'équation

$$\frac{Mx}{\lambda - a} = \frac{Ny}{\mu - b}; \qquad (6)$$

donc, si on élimine λ et μ entre les trois équations (4), (5) et (6), on obtiendra l'équation cartésienne du lieu du point P à travers toutes les positions de la tangente mobile. Or, les équations (4) et (6) nous donnent très facilement

$$\lambda = a + \frac{Mx}{Mx^2 + Ny^2},$$

$$\mu = b + \frac{Ny}{Mx^2 + Ny^2};$$

et portant ces valeurs dans la relation (5), nous trouvons pour l'équation du lieu

$$U \times \left[\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^3}{N} + 1\right) U + (2ax + 2by + 1)\right] = 0 \qquad (7)$$

donc le lieu est une courbe du quatrième ordre qui se décompose en deux coniques : l'une de ces deux coniques n'est autre que le faisceau des deux tangentes fixes, et l'autre est une conique proprement dite représentée par l'équation

$$\left(\frac{a^2}{M} + \frac{b^2}{N} + 1\right) U + (2ax + 2by + 1) = 0. \qquad (8)$$

Or, si nous comparons cette équation à celle de la conique donnée (3), nous voyons qu'en retranchant (3) de (8), il vient :

$$\frac{1}{MN}(bMx - aNy)^2 = 0. \qquad (9)$$

Donc, la conique (8) est doublement tangente à la conique donnée (3), et la corde de contact, représentée par l'équation

$$bMx - aNy = 0, \qquad (10)$$

n'est autre chose que la droite joignant l'origine au milieu de la corde de contact (2); les deux coniques ont donc un diamètre commun, la droite (10), et se touchent aux extré-

mités de ce diamètre; elles sont donc concentriques; et dès lors l'équation (8) montre que les asymptotes du lieu sont parallèles aux deux droites qui forment le faisceau (1).

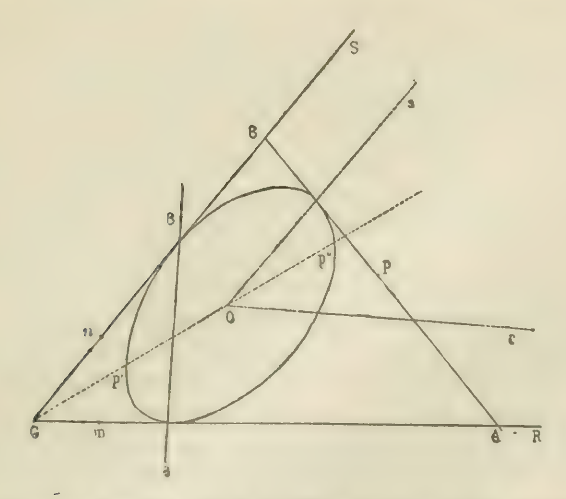
En résumé, nous avons cet énoncé:

Quand une droite AB *roule sur une conique fixe* Σ, *le milieu* P *du segment* AB *intercepté par deux tangentes fixes* GR *et* GS *décrit un lieu du quatrième ordre; et ce lieu se décompose en deux autres qui sont:*

1° *L'ensemble des deux tangentes fixes* OR *et* OS;

2° *Une conique proprement dite, qui est concentrique à la première, la touche aux deux extrémités* p′ *et* p″ *du diamètre* GH *qui passe au point* G, *a pour asymptotes les droites* Or *et* Os *parallèles aux deux tangentes fixes, et passe en outre par le point* m *milieu de* Gα, *et par le point* n *milieu de* Gβ, α *et* β *étant les points de contact de la conique primitive avec les deux tangentes fixes.* (*Ce dernier résultat est immédiatement visible sur l'équation* (8).

Tel est le problème que je me proposais de résoudre; je vais en donner quelques conséquences.



Supposons que les deux droites représentées par l'équation (1) soient les deux directions asymptotiques d'un cercle,

en faisant $M = N$, le point P sera précisément la projection du point fixe G sur la tangente mobile; en même temps le point G sera le *foyer* de la conique donnée, et l'énoncé général donne immédiatement ce théorème :

Le lieu des projections d'un foyer d'une conique sur les tangentes de cette courbe est un lieu du quatrième ordre; et ce lieu se décompose en deux autres qui sont :

1° L'ensemble des directions asymptotiques de tout cercle ayant son centre au foyer;

2° Une circonférence concentrique à la conique, et la touchant aux deux extrémités de l'axe focal.

On trouve ainsi, sans aucun artifice de calcul, le lieu complet, tel qu'il doit résulter de la théorie générale des podaires; seulement le foyer n'intervient que pour donner un caractère spécial d'élégance au résultat obtenu dans le cas général; de telle façon que les explications plus ou moins rigoureuses, plus ou moins tourmentées, que l'on consacre parfois à la question particularisée, n'ont plus aucune raison d'être; il est bon cependant d'en faire une justice sommaire.

On explique souvent la nature du lieu étudié pour le cas du foyer, en remarquant que le point P est à chaque instant situé sur une droite mobile autour du point G, et que par suite le lieu du point P doit passer par le point G; mais nous ferons remarquer :

1° Que la démonstration du prétendu théorème que l'on invoque comporte en certains cas des objections sérieuses;

2° Que dans les circonstances actuelles ce théorème est bien applicable, mais qu'il n'explique presque rien; car il ne s'agit pas seulement de montrer que le lieu passe au point G; eût-on prouvé encore que le point G est un point double du lieu, cela ne suffirait pas encore; le fait essentiel, c'est la décomposition du lieu total en deux autres; or notre procédé indique immédiatement cette décomposition sans faire intervenir spécialement les propriétés focales.

Il est vrai que si, au lieu d'appliquer le pseudo-théorème dont nous parlions, on appliquait en toute rigueur les procédés de raisonnement introduits par *Poncelet* et fortement

développés par *Chasles*, et pourvu que l'on n'ignorât pas les propriétés singulières des directions asymptotiques du cercle, on pourrait, en toute rigueur, et *sans calcul écrit*, retrouver toutes les conclusions de notre calcul ; mais alors on aurait fait, sous apparence géométrique, toutes nos transformations algébriques, en prenant comme principe directeur le principe de continuité de Poncelet ; on peut donc, si l'on veut, considérer notre problème comme une heureuse *illustration* de ce dernier principe ; et cette seule raison suffirait à justifier tous les détails que nous venons de donner à nos lecteurs.

Nota. — Pour laisser à cet article son véritable caractère, nous avons dû passer rapidement sur certains calculs, et sur certaines interprétations de formules ; mais nous sommes à la disposition de nos jeunes lecteurs pour leur transmettre des explications détaillées.

QUESTION 12

Solution par M. Cartier, élève au Lycée d'Angoulême.

On considère une ellipse rapportée à ses axes : soient A, A *les extrémités du grand axe ;* B, B′ *celles du petit axe. On mène les tangentes à l'ellipse en ces quatre points et une tangente mobile* Δ *qui rencontre celles-ci en des points* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$. *Cela posé on propose les questions suivantes :*

I. *Équation générale des cercles* U *décrits sur* $\alpha\alpha'$ *comme diamètre.*

II. *Équation des cercles* V *décrits sur* $\beta\beta'$.

III. *Quel est l'angle d'anomalie du point de contact* M *de la tangente* Δ *quand les cercles* U, V *sont égaux.*

IV. *Démontrer que l'axe radical des cercles* U, V *n'est autre chose que la normale en* M.

V. *Par le centre de l'ellipse on mène une tangente aux cercles* V. *Démontrer que le lieu des points de contact est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.*

VI. *Démontrer que les cercles* U, V *sont orthogonaux.*

VII. *Trouver le lieu décrit par les points communs. Démontrer qu'il se compose de deux cercles concentriques à l'ellipse, de rayons* a + b *et* a — b. (G. L.)

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit φ l'anomalie correspondant à un point quelconque M de cette ellipse.

La tangente en ce point est

$$\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi - 1 = 0. \qquad (\Delta)$$

Le point α a pour abscisse a et pour ordonnée $\frac{b(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi}$; β a pour ordonnée b et pour abscisse $\frac{a(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi}$, β' a pour ordonnée $-b$ et pour abscisse $\frac{a(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi}$.

1° Le cercle correspondant U a son centre en u dont l'ordonnée est $\frac{b}{\sin \varphi}$; son rayon est

$$u\alpha = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{\sin \varphi} - b\,\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2\,\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}}$$

L'équation générale des cercles U est donc

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin \varphi}\right)^2 - \left(a^2 + b^2\,\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}\right) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{b}{\sin \varphi}\,y - c^2 = 0. \qquad (u)$$

2° On trouve de même l'équation générale des cercles V.

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{a}{\cos \varphi}\,x + c^2 = 0. \qquad (v)$$

3° Lorsque les cercles sont égaux $\alpha\alpha' = \beta\beta'$

ou

$$B'\beta' - B\beta = \pm 2\alpha$$

ou

$$\frac{a(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{a(1 - \sin \varphi)}{\cos \varphi} = \pm 2a;$$

d'où

$$\cos \varphi = \pm \sin \varphi$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \begin{cases} \pm 45^\circ \\ \pi \pm 45^\circ \end{cases}$$

On pourrait prévoir ce résultat en remarquant que lorsque $\alpha\alpha' = \beta\beta'$, la tangente ($\Delta$) est parallèle à l'une des diagonales du rectangle des axes, car on a ou $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, ou $\alpha\beta' = \beta\alpha'$.

4° L'axe radical des deux cercles (u) et (v) est

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2$$

C'est la normale au point φ.

5° L'équation (v) montre que la longueur de la tangente menée de l'origine à ce cercle est c. Le lieu des points de contact est donc le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.

Les tangentes issues de l'origine à (u) sont imaginaires; le carré de leur longueur est $-c^2$ comme le montre (u). Le lieu des points de contact est donc le cercle imaginaire concentrique à l'ellipse et passant par les foyers imaginaires de cette conique.

6° Pour prouver que (u) et (v) se coupent orthogonalement, il suffit de montrer que β et β' sont conjugués harmoniques par rapport à α et α'; ou que β_1 et β' le sont par rapport à D et E; on le voit facilement, on a en effet

$$B'\beta' \times B'\beta_1 = B'D^2 = a^2$$

car $$B'\beta' = \frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi} \qquad B'\beta_1 = \frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}$$

7° Pour avoir le lieu décrit par les points communs à (u) et (v), on pourrait éliminer φ entre (u) et (v).

Opérons autrement.

La droite OM, qui fait avec Ox l'angle φ, coupe le cercle (u) en deux points dont les distances ρ à O sont données par l'équation $$\rho^2 - 2b\rho - c^2 = 0,$$
obtenue en remplaçant dans (u) $x^2 + y^2$ par ρ^2, $\dfrac{y}{\sin\varphi}$ par ρ.

Elle coupe le cercle (v) en deux points dont les distances à O sont de même les racines de

$$\rho^2 - 2a\rho + c^2 = 0.$$

Ces deux équations ont une racine commune $\rho = a + b$. Elle correspond à un point commun P aux deux cercles. Le lieu de ce point est donc le cercle

$$\rho = a + b.$$

Les deux autres racines sont égales et de signes contraires ; donc les deux points F, G sont équidistants de O ; la valeur absolue de ces racines est $a - b$. Donc le lieu des points F et G est le cercle

$$\rho = a - b.$$

De même la droite faisant avec OX un angle égal à $-\varphi$, coupe le cercle (u) en un point Q commun aux deux cercles, car Q symétrique de F par rapport à AA′ est aussi sur le cercle (v).

On a $$OQ = OF \text{ ou } OG = a - b.$$

Le lieu de Q est le cercle $\rho = a - b$. Les autres points où elle coupe les deux cercles, H et K sont évidemment symétriques par rapport à O dont ils sont à une distance égale à $OP = a + b$. Leur lieu est donc le cercle $\rho = a + b$.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Petouzet, à Bar-le-Duc ; Lutaud et Finat, à Moulins ; Griffon, à Montpellier ; Onillon, à Versailles Montérou, au lycée Louis-le-Grand ; Lapareillé, au lycée Henri IV.

QUESTION 14

Solution par M. TROCMÉ (*), élève au Lycée Charlemagne.

On considère la parabole P

$$(\lambda y - x)^2 - 2\mu x = 0,$$

qui est tangente à l'axe Oy *au point* O, *et qui coupe l'axe des* x *en un point* M *tel que* $OM = 2\mu$; *on considère aussi la parabole cubique* Q, *enveloppe des normales de* P. *Cette courbe est tangente à l'axe* Ox *au point* A, *et coupe cet axe en un autre point* B; *soit enfin* C *le point de rencontre de l'axe de* P *avec* Ox. *On imagine maintenant que, d'un point* R, *mobile sur* Ox, *on mène à la courbe* P *des normales.*

Ce problème dépend d'une équation du second degré.

1° Déterminer et discuter cette équation, et montrer quels résultats elle donne quand on suppose successivement le point R *à l'un des points* A, B, C *ou* M.

(*) Aujourd'hui élève à l'École polytechnique.

2° Après avoir déterminé en fonction de λ *les rapports* $\frac{OA}{OM}$, $\frac{OB}{OM}$, $\frac{OC}{OM}$, *déduire de ces relations que l'on a*

$$2OA \cdot OC = AC \cdot OM.$$

3° Examiner successivement le cas où le point B *se confond avec* O, *et celui où le point* A *coïncide avec* M. *Énoncer les théorèmes auxquels donnent lieu ces deux hypothèses.*

4° Démontrer que le paramètre p *de la parabole est donné par la formule*

$$p = \frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

et que l'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{\lambda^2 + 1} = 0.$$

5° Trouver l'enveloppe de cette droite quand on suppose que μ *est constant, et construire la courbe donnée.* (G. L.)

1° Exprimons rationnellement en fonction d'un paramètre t les coordonnées d'un point quelconque de la parabole. Posons $\lambda y - x = t$. L'équation de P devient, en remplaçant $\lambda y - x$ par t, $t^2 - 2\mu x = 0$; d'où on tire $x = \frac{t^2}{2\mu}$.

On a d'autre part $y = \frac{x + t}{\lambda} = \frac{t^2 + 2\mu t}{2\mu\lambda}$.

L'équation d'une normale au point x' y' est

$$\frac{x - x'}{-(\lambda y' - x') - \mu} = \frac{y - y'}{\lambda(\lambda y' - x')}.$$

Écrivons que cette normale passe par le point $x = \alpha$: $y = 0$ en désignant par α la distance OR

$$\frac{\alpha - x'}{-(\lambda y' - x') - \mu} = \frac{-y'}{\lambda(\lambda y' - x')}. \qquad (1)$$

Soit t le paramètre correspondant au point x' y' situé sur la courbe. En remplaçant dans (1) x' y' par leurs valeurs en fonction de t, on aura l'équation qui fera connaître les paramètres caractéristiques des points où aboutissent les normales issues de R.

$$\frac{\alpha - \dfrac{t^2}{2\mu}}{t + \mu} = \frac{\dfrac{t^2 + 2\mu t}{2\mu\lambda}}{\lambda t}.$$

ou en simplifiant

$$t^2 (\lambda^2 + 1) + 3\mu t + 2\mu^2 - 2^2\lambda\alpha\mu = 0. \qquad (2)$$

Nous avons supprimé la racine $t = 0$ qui correspond à l'origine.

On peut écrire l'équation (2) en posant $\dfrac{\alpha}{\mu} = K$,

$$\frac{t^2}{\mu^2} (\lambda^2 + 1) + \frac{3t}{\mu} + 2 - 2\lambda^2 K - 0. \qquad (3)$$

Cette équation aura ses racines réelles si

$$9 - 8(1 + \lambda^2)(1 - \lambda^2 K) \geq 0,$$

ou
$$8\lambda^2 K (1 + \lambda^2) - 8\lambda^2 + 1 \geq 0.$$

ou encore
$$K \geq \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)}.$$

Donc pour toute valeur de K inférieure à

$$\frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)},$$

on ne pourra mener à la parabole qu'une seule normale réelle Ox. Pour la valeur particulière

$$K' = \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)}.$$

on a deux racines coïncidentes, le point correspondant se trouve sur la développée en B *(fig. 1)* et on a

$$\frac{2OB}{OM} = K'.$$

Le coefficient angulaire d'une normale est donné

par
$$\gamma = \frac{\lambda (\lambda y' - x')}{-(\lambda y' - x') - \mu} = -\frac{\lambda t}{t + \mu}.$$

Au point A une seconde normale se confond avec Ox. On doit donc trouver $\gamma = 0$, ce qui exige $t = 0$.

L'équation (3) admettant une racine nulle, on a la condition

$$1 - \lambda^2 K = 0,$$

d'où
$$K = \frac{2OA}{OM} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Au point C, une normale se confond avec l'axe. On doit donc trouver $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ pour le coefficient angulaire.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda t}{t + \mu},$$

d'où
$$t = \frac{-\mu}{1 + \lambda^2}.$$

Pour avoir le rapport $\frac{OC}{OM}$, il suffit de porter cette valeur de t dans l'équation (3). Il vient

$$\frac{1}{\lambda^2 + 1} - \frac{3}{\lambda^2 + 1} + 2 - 2\lambda^2 K = 0;$$

d'où on tire

$$K = \frac{2OC}{OM} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}.$$

2° — Éliminons λ^2 entre les deux relations

$$\frac{2OA}{OM} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et } \frac{2OC}{OM} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}.$$

On aura
$$\frac{OM}{2OA} = \frac{OM - 2OC}{2OC}.$$

ou
$$OA.\ OC = OM\ (OA - OC) = OM.\ AC,$$

ce qui démontre les propriétés énoncées.

3° — Supposons d'abord que les points O et B soient confondus. On doit avoir $OB = 0$. Mais on a

$$\frac{2OB}{OM} = \frac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2 (\lambda^2 + 1)},$$

d'où
$$\lambda^2 = \frac{1}{8}.$$

Si on calcule le rapport $\frac{OA}{OM}$, on a $\frac{2OA}{OM} = 8$,

d'où
$$OA = 4OM.$$

On a de même $\frac{2OC}{OM} = \frac{8}{9}$, d'où $OC = \frac{4}{9} OM$.

Comparant avec la valeur de OA,

$$OC = \frac{OA}{9}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère une infinité de parabole tangentes à l'origine à l'axe des* y *et telles que la parabole cubique passe également par l'origine et soit tangente en* A *à l'axe* Ox, *si* M *est le second point d'intersection de* Ox *et de la parabole, le rapport des distances du point* O *aux points* A *et* M *est constant et égal à* 4. *Si* C *est le point d'intersection de l'axe avec* Ox, *le rapport entre* OA *et* OC *est constant et égal à* 9.

Supposons maintenant que A coïncide avec M. On a

$$\frac{2OA}{OM} = 2 = \frac{1}{\lambda^2} \text{ d'où } \lambda^2 = \frac{1}{2}.$$

On a alors $\quad \dfrac{2OB}{OM} = \dfrac{8\lambda^2 - 1}{8\lambda^2(\lambda^2 + 1)} = \dfrac{1}{2} \quad OB = \dfrac{OM}{4}.$

De même $\quad \dfrac{2OC}{OM} = \dfrac{1}{\lambda^2 + 1} = \dfrac{2}{3}, \quad OC = \dfrac{OM}{3}.$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si on considère une infinité de paraboles tangentes à* Oy *à l'origine et la parabole cubique tangente à* Ox *au point* M *d'intersection de la parabole et de cette droite, le point* B *est à une distance de l'origine égale au quart de la distance* OM; *de plus* OC *est le tiers de* OM.

4° — L'axe est la parallèle à la droite $\lambda y - x = 0$ menée par le point C. Or, on a

$$\frac{2OC}{OM} = \frac{OC}{\mu} = \frac{1}{1 + \lambda^2};$$

d'où l'équation de l'axe

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{1 + \lambda^2} = 0.$$

Pour calculer le paramètre, abaissons OH perpendiculaire sur l'axe. OC étant une normale, CH représente le paramètre p. On a donc $\qquad p^2 = \overline{OH}^2 - \overline{OC}^2.$

Mais OH, distance de l'origine à l'axe est donné par

$$OH = \frac{\frac{\mu}{1+\lambda^2}}{(1+{}^2)\lambda^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu}{(1+{}^2)\lambda^{\frac{3}{2}}}$$

$$OC = \frac{\mu}{(1+\lambda^2)}$$

$$p^2 = \frac{\lambda^2\mu^2}{(1+\lambda^2)^3}$$

ou

$$p = \frac{\lambda\mu}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

5° — L'équation de l'axe est

$$\lambda y - x + \frac{\mu}{1+\lambda^2} = 0. \qquad (1)$$

Si la parabole P passe par un point fixe de Ox, μ est constant et λ est le paramètre variable.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\lambda^3 y - \lambda^2 x + \lambda y + \mu - x = 0.$$

Il faut exprimer que cette équation du troisième degré en λ a une racine double. Pour cela nous rendrons l'équation homogène en λ et z, en posant $z = 1$ et nous annulerons les deux dérivées partielles par rapport à λ et à z.

$$f(\lambda z) = \lambda^3 y - \lambda^2 z x + \lambda z^2 y + (\mu - x)z^3 = 0,$$

$$f'_\lambda(\lambda z) = 3\lambda^2 y - 2\lambda x + y = 0,$$

$$f'_z(\beta z) = 3(\mu - x) + 2\lambda y - \lambda^2 x = 0.$$

Éliminant λ^2 par la règle connue, on a le lieu cherché

$$[9y(\mu - x) + xy]^2 = (6y^2 - 2x^2)[-2y^2 + 6x(x-\mu)].$$

C'est une courbe du quatrième degré. On peut l'écrire

$$y^2(9\mu - 8x)^2 = 4(3y^2 - x^2)(3x^2 - y^2 - 3\mu x). \qquad (A)$$

Les termes du degré le plus élevé sont

$$64x^2y^2 - 4(3y^2 - x^2)(3x^2 - y^2) = 12x^4 + 12y^4 + 24x^2y^2.$$

Il n'y a donc pas de points à l'infini, puisque l'on peut écrire ce groupe sous la forme

$$12(x^2 + y^2)^2.$$

Ordonnons l'équation par rapport à y^2.

$$12y^4 + y^2(81\mu^2 - 144\mu x + 64x^2 - 36x^2 + 36\mu x - 4x^2) + 12x^3(x - \mu) = 0,$$

ou en simplifiant,

$$4y^4 + y^2(27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x) + 4x^3(x - \mu) = 0.$$

Pour que cette équation en y^2 ait ses racines réelles, il faut que

$$U = (27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x)^2 - 64x^3(x - \mu) \geq 0,$$

ou

$$U = (27^2\mu^4 + \mu^2 x^2(36^2 + 16.27) - 54.36.\mu^3 x - 8^3\mu x^3) \geq 0$$

ou $U = \mu(27^2\mu^3 - 3.8.81.\mu^2 x + 3.9.8^2.\mu x^2 - 8^3 x^3) \geq 0$

ou enfin $\qquad U = \mu(9\mu - 8x)^3 \geq 0.$

Pour que U soit positif, en supposant μ supérieur à o, il faut que

$$x \leq \frac{9\mu}{8}.$$

Les valeurs correspondantes de y^2 sont égales

$$y^2 = \frac{x^2}{3} = \frac{27\mu^2}{64}, \; y = \pm \mu \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Revenons à l'équation de la courbe mise sous la forme (A).

Les deux droites $3y^2 - x^2 = 0$ et l'hyperbole $3x^2 - y - 3\mu x = 0$ séparent le plan en régions et il n'y a pas de points du lieu dans les parties ombrées de la figure 2.

L'hyperbole $3x^2 - y^2 - 3\mu x = 0$ a son centre au point $y = 0$, $x = \frac{\mu}{2}$, ses sommets réels aux points $y = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, $x = \mu$. Les asymptotes font un angle de 60° avec l'axe des x.

Si on cherche directement les points d'intersection de la courbe et de la droite $x = \frac{9\mu}{8}$, on peut remarquer qu'ils

appartiennent aux deux droites $3y^2 - x^2 = 0$, et à l'hyperbole $3x^2 - y^2 - 3\mu x = 0$. Or on trouve pour les ordonnées la même valeur $y = \pm \frac{\mu 3\sqrt{3}}{8}$.

Les deux points $x = \frac{9\mu}{8}, y = \pm \mu \frac{3\sqrt{3}}{8}$ sont donc deux points doubles, et comme il n'y a pas de points de la courbe au delà de la droite $x = \frac{9\mu}{8}$, ce sont deux points de rebroussement.

Pour avoir la tangente en l'un de ces points, considérons les deux dérivées secondes f''_{y^2} et f''_{xy}.

$$f'_y = 16y^3 + 2y(27\mu^2 + 8x^2 - 36\mu x)$$
$$f''_{y^2} = 48y^2 + 54\mu^2 + 16x^2 - 72\mu x$$
$$f''_{xy} = 2y(16x - 36\mu).$$

Remplaçons dans ces deux dérivées x et y par leurs valeurs

f''_{y^2} devient égal à $\frac{27\mu^2}{2}$

et f''_{xy} ... $-\sqrt{3}\,\frac{27\mu^2}{2}$.

Le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{f''_{xy}}{f''_{y^2}} = \sqrt{3}.$

Comme l'origine est aussi un point de rebroussement, la tangente étant Ox, on voit que la courbe présente trois points de rebroussement qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et que les tangentes en ces trois points sont les hauteurs de ce triangle.

Si x est compris entre O et μ, le produit des racines de l'équation en y^2 est négatif et l'on n'a que deux valeurs réelles pour y, égales et de signes contraires. Au point $y = 0$ $x = \mu$, la tangente est verticale.

x variant de μ à $\frac{9\mu}{8}$, on a pour y quatre valeurs égales deux à deux et de signes contraires.

Enfin les points $x = \mu$, $y = \pm \frac{\mu}{2}$ appartiennent à la courbe,

Nota. — La même question a été résolue par M. Petouzet, à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

36. — On considère les ellipses E, ayant le même centre, leurs axes de direction fixes, et homothétiques ; par deux points fixes, l'un A pris sur ox, l'autre B pris sur oy, de telle façon que $oA = a$, $oB = b$, on fait passer des cercles C tangents à E au point I. Trouver le lieu de ce point. Ce lieu est une cubique ; on propose de la construire dans le cas particulier où les courbes E sont des cercles.

(G. L.)

37. — On considère une parabole P, et sur cette courbe un point C. Soit N la normale en ce point. 1° Trouver sur cette normale un point D, tellement choisi que le cercle S décrit de D comme centre avec DC pour rayon rencontre P en deux points A et B, en ligne droite avec D.

2° Démontrer que la surface du segment parabolique qui a pour corde AB est constante quand le point C se déplace sur la courbe P.

3° Équation générale de la droite AB. Démontrer, au moyen de cette équation générale, que l'enveloppe de ces droites est une parabole égale à la proposée.

4° Reconnaître que cette enveloppe se confond avec le lieu des centres des cercles S. Expliquer cette coïncidence.

5° Aux cercles S, on mène des tangentes parallèles à la droite AB. Démontrer que le lieu des points de contact est formé de deux paraboles, dont l'une est égale à la proposée quand on déplace celle-ci parallèlement à elle-même de la longueur $4p$, dans la direction positive de son axe.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX. — RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23864-2.

NOTE

RELATIVE A LA DÉTERMINATION DU NOMBRE DES POINTS D'INTERSECTION DE DEUX COURBES D'ORDRE QUELCONQUE, QUI SE TROUVENT A DISTANCE FINIE

Par M. **Chasles.**

Les équations de deux courbes p et p' étant

$$(x^m, y^n)^p = 0 \quad (x^{m'}, y^{n'})^{p'} = 0,$$

le nombre de leurs points communs situés à distance finie est $pp' - (p-m)(p'-m') - (p-n)(p'-n') - \omega$, ω étant le nombre des points communs aux deux courbes qui se trouvent sur la droite de l'infini, autres que ceux qui, situés sur cette droite et sur les axes des coordonnées, sont représentés par les deux termes $(p-m)(p'-m')$, $(p-n)(p'-n')$. Cela résulte de ce que *le nombre total des points (réels ou imaginaires) communs à deux courbes d'ordre* p *et* p' *est toujours* pp'.

En donnant une première démonstration de ce théorème par le principe de correspondance, j'ai annoncé que le même raisonnement se prêtait à une seconde démonstration. C'est celle-ci qui fait l'objet de la présente note. Cette démonstration, extrêmement simple, repose sur une seule propriété des courbes géométriques, savoir : que le nombre des tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut mener par un point à une courbe, est constant, quel que soit le point ; ce qui est évident, puisque la recherche de ce nombre est un problème déterminé.

Théorème. — *Le nombre des points communs à des courbes d'ordre* p *et* p' *est* pp'.

Une droite IX, tournant autour d'un point I, rencontre la première courbe en p points x ; par chacun de ces points, on mène les tangentes de la seconde courbe, qui (réelles ou imaginaires) sont en nombre constant q', ce qui fait pq' tangentes ; et par leurs points de contact x' on mène pq' droites

IU. Ces pq' droites correspondent à la droite IX. A une droite IU correspondent pp' droites IX ; car une droite IU rencontre la seconde courbe en p' points α', et les tangentes en ces points coupent la première courbe en $p'p$ points α, par lesquels passent les $p'p$ droites IX correspondant à IU. Il existe donc $pq' + pp'$ droites coïncidant chacune avec une droite correspondante IU. pq' de ces droites coïncident avec les q' tangentes de la seconde courbe, qu'on peut mener par le point I ; et les pp' autres sont les droites qui passent par les points d'intersection des deux courbes. Donc ces points d'intersection sont en nombre pp'; C. Q. F. D.

Observation. — Au lieu des tangentes que l'on suppose menées de chaque point de la première courbe à la seconde, on peut se servir des normales : le raisonnement et la conclusion sont les mêmes. On dira : Une droite IX rencontre la première courbe en p points α, de chacun desquels on mène les normales de la seconde courbe, en nombre constant q', ce qui fait pq' normales ; par leurs pieds on mène pq' droites IU. Une droite IU, menée arbitrairement, coupe la seconde courbe en p' points, et les normales en ces points rencontrent la première courbe en $p'p$ points, par lesquels passent $p'p$ droites IX. Il existe donc $pp' + pq'$ droites IX qui coïncident chacune avec une droite correspondante IU. De ces coïncidences, pq' ont lieu sur les q' normales de la seconde courbe menées par le point I. Ce sont des solutions étrangères, et chacune des pp' autres coïncidences a lieu quand une droite IX passe par un point commun aux deux courbes : car ce point est le pied d'une normale à la seconde courbe. Le théorème est donc démontré.

Il serait rare de trouver un pareil exemple de l'usage des tangentes ou des normales, indifféremment, dans une même démonstration.

On conçoit que le principe de correspondance s'applique avec la même facilité à la démonstration du théorème corrélatif, savoir : que le nombre des tangentes communes à deux courbes de la classe nn' respectivement est nn'.

Démonstration. — D'un point x d'une droite l on mène

n tangentes à la première courbe; puis, de leurs points de contact, nn' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles coupent l en nn' points u. D'un point u de l on mène n' tangentes à la deuxième courbe, lesquelles rencontrent la première courbe en $n'm$ points; les tangentes en ces points coupent l en $n'm$ points x. Il existe donc $nn' + n'm$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant; $n'm$ de ces points coïncident avec les m points de la première courbe située sur l. Les nn' autres appartiennent à nn' tangentes communes à deux courbes. Donc.....

Le même raisonnement convient pour démontrer que deux courbes $u^n_m, u^{n'}_{m'}$ admettent $(m + n)(m' + n')$ normales communes; ou bien que n $(m' + n')$ tangentes à la première courbe sont normales à la seconde.

Je vais donner quelques exemples de contacts d'ordres supérieurs en des points de l'infini, exemple que l'on ne rencontre guère dans les traités de Géométrie analytique, ainsi que dans les applications de la théorie de l'élimination, que pour des contacts simples.

La tangente au point de contact de deux courbes, supposé à l'infini, peut avoir quatre positions différentes qu'il y a lieu de distinguer.

Elle sera un des axes coordonnés, ou parallèle à l'un de ces axes, ou aura une direction quelconque, ou enfin elle sera la droite de l'infini. Ce dernier cas se subdivise, relativement à la position du point de contact, qui peut être sur un axe coordonné ou dans une direction quelconque.

(I) $\quad axy^2 + bxy + cx + ey^2x + fy^2 = 0$

$\quad ax^2y + bxy + cx + ey^2x + fy^2 = 0$

faisant $pp' - (p - m)(p' - m') - (p - n)(p' - n') = \text{N}$

ici $\quad \text{N} = 9 - 1 - 1 = 7.$

Les deux courbes sont tangentes à l'axe Ox en son point de l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre: donc $\omega = 3$, et $\text{N} - \omega = 4$. Ainsi les courbes ont quatre points communs à distance finie: deux de ces points coïncident en O, où les courbes sont tangentes à l'axe Oy; les deux autres sont sur la droite $(e - e')\,x + f - f' = 0$.

(I') $ay^3x + cy^2x + fy^2 + bx^2y^2 + ex^2y + gxy + hx^2 = 0$

$$ay^3x + cy^2x + fy^2 + b'x^2y^2 + e'x^2y + g'xy + h'x^2 = 0.$$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les deux courbes sont tangentes à l'axe Oy à l'infini, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points à l'infini, outre celui qui a été compté dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées, où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation du quatrième degré en y, qu'on obtient ainsi : des deux équations soustraites l'une de l'autre, puis divisées par xy, on tire une expression de x en fonction de y, qui, mise dans une des équations, donne l'équation finale du quatrième degré.

(II) $ay^2x + by^2 + cy + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0,$
$a'y^2x + b'y^2 + c'y + ex^2y + fx^2 + gxy + hx = 0.$

$N = 9 - 1 - 1 = 7$. Les deux courbes ont un contact du second ordre au point à l'infini sur Ox ; leur tangente en ce point est la droite $y = -\dfrac{f}{e}$; on a donc $\omega = 2$ et $N - \omega = 5$. Ainsi les courbes ont cinq points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale en x ou en y qu'on obtient sans difficulté, car des deux équations proposées on tire celle-ci :

$$(a - a')yx + (b - b')y + (c - c') = 0,$$

et la valeur de x ou de y tirée de cette équation et mise dans l'une des deux premières donne une équation du quatrième degré.

(II') $ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + fy^2x + gy^2 + hyx = 0,$
$ax^3y + bx^2y^2 + cx^2 + ex^2y + f'y^2x + g'y^2 + h'yx = 0.$

$N = 16 - 1 - 4 = 11$. Les courbes ont à l'infini chacune un point double sur l'axe Oy, et un point simple sur l'axe Ox; donc $N = 16 - 4 - 1 = 11$. Mais ce point sur l'axe Ox est un contact du second ordre dont la tangente a pour équation $y = -\dfrac{c}{a}$, ce qui fait deux points de plus à l'infini. Enfin, les deux courbes ont en outre un point d'inter-

section à l'infini dans la direction de la droite $y = -\frac{a}{b}x$. On a donc $\omega = 2 + 1 = 3$ et $N - 3 = 8$. Ainsi les deux courbes ont huit points communs à distance finie. Cinq de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double, dont une branche de chacune est tangente à l'axe Ox. Les trois autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x ou en y du troisième degré. En effet, des deux équations proposées, soustraites l'une de l'autre, on tire

$$(f - f')yx + (g - g')y + (h - h')x = 0,$$

et l'élimination de x ou de y entre cette équation et l'une des premières conduit à l'équation du troisième degré.

$$\text{(III)} \qquad 9x^4 - x^2y^2 - xy^2 - 3xy + y^2 = 0$$
$$9x^4 - x^2y^2 + 9x^3 - 6x^2y - 18x^2 + 2y^2 = 0.$$

$N = 16 - 2 - 2 = 12$. Les deux courbes ont un contact du second ordre en un point de l'infini, situé dans la direction de la droite $y = 3x$ (leur tangente en ce point ayant pour équation $y = 3x - \frac{3}{2}$).

Donc $\omega = 3$ et $N - \omega = 9$. Ainsi les deux courbes ont neuf points communs à distance finie. Cinq coïncident à l'origine O, où les deux courbes ont chacune un point double, dont deux branches ont une tangente commune. Les quatre autres points communs aux deux courbes sont déterminés par une équation finale en x du quatrième degré, qu'on obtient en retranchant les deux équations l'une de l'autre, d'où l'on conclut $y = \frac{3x(x-2)}{x+1}$; cette valeur de y, mise dans une des équations, la réduit au quatrième degré en x.

$$\text{(III')} \; 5x^3 - 6x^2y + xy^2 + 5x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 0$$
$$5x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont deux points communs à l'infini; l'un, dans la direction de la droite $y = 5x$, est un point d'intersection; et l'autre, dans la direction de la droite $y = x$, est un point de contact du second ordre, dont la tangente a pour équation $y = x + \frac{1}{2}$, ce qui fait quatre points communs à

l'infini; donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les deux courbes ont deux points communs à distance finie. On trouve sans difficulté que ces points ont pour coordonnées $x = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$; et $x = -\frac{9}{7}$, $y = -\frac{30}{7}$.

$$\text{(IV)}\ ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + cx^2y + fx^2 + gxy + hy = 0$$
$$ax^2y^2 + bxy^2 + ey^3 + c'x^2y + f'x^2 + g'xy + h'y = 0.$$

$N = 16 - 4 - 1 = 11$. Ces courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Oy, et ont en ce point un contact du troisième ordre, ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui se trouve compris dans la valeur de N. Ainsi $\omega = 3$, et $N - \omega = 8$. Les courbes ont donc huit points communs à distance finie. Quatre de ces points coïncident à l'origine des coordonnées où les deux courbes ont chacune un point double. Les quatre autres sont déterminés par une équation finale du quatrième degré en x, qui s'obtient sans difficulté. Les deux équations étant soustraites l'une de l'autre, il en résulte une équation où y n'entre qu'au premier degré, et dont la valeur mise dans l'une des deux proposées, donne l'équation du quatrième degré en x.

$$\text{(IV')}\ ay^2x^2 + byx^2 + cx^3 + ey^2x + fy^2 + gyx + hx^2 = 0$$
$$ay^2x + byx + cx^2 + g'y + h'x = 0.$$

$N = 12 - 1 - 2 = 9$. Les deux courbes sont tangentes à la droite de l'infini à l'extrémité de l'axe Ox, et ont en ce point un contact du troisième ordre; ce qui leur fait trois points communs, outre celui qui entre dans la valeur de N : ainsi $\omega = 3$ et $N - \omega = 6$. Les courbes ont donc six points communs à distance finie. Deux de ces points sont à l'origine des coordonnées, où la première courbe a un point double. Les quatre autres se peuvent déterminer par une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines α exprimeront les directions des droites $y = \alpha x$, qui, partant de l'origine O, passent par les quatre points. En effet, la seconde équation étant multipliée par x et soustraite de la première, on a

$$ey^2x + fy^2 + (g - g')xy + (h - h')x^2 = 0$$

$$e\frac{y^2}{x^2}x + f\frac{y^2}{x^2} + (g-g')\frac{y}{x} + (h-h') = 0;$$

d'où
$$\frac{1}{x} = \frac{e\dfrac{y^2}{x^2}}{f\dfrac{y^2}{x^2} + (g-g')\dfrac{y}{x} + (h-h')}.$$

Cette valeur de $\frac{1}{x}$, mise dans la première équation divisée d'abord par x^4 et écrite ainsi :

$$a\frac{y^2}{x^2} + \left(e\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c\right)\frac{1}{x} + \left(f\frac{y^2}{x^2} + g\frac{y}{x} + h\right)\frac{1}{x^2} = 0,$$

la transforme en une équation du quatrième degré en $\frac{y}{x}$, dont les racines déterminent les quatre points communs aux deux courbes.

(V) $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^2 + exy + fx + gy = 0$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f' = 0$$
où l'on a
$$b^2 - 4ac = 0.$$

$N = 6$. Les deux courbes ont un point commun à l'infini, dans la direction de la droite $y = -\frac{b}{2c}x$; elles sont tangentes en ce point de la droite de l'infini, et ont entre elles un contact du troisième ordre. Donc $\omega = 4$ et $N - \omega = 2$. Ainsi les courbes ont deux points communs à distance finie. Et, en effet, ces points sont accusés par l'équation $(f - f')x + gy = 0$, qu'on tire des deux proposées.

(V′) $x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 2x - 3y = 0$
$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - 4xy - 3x - y = 0.$$

$N = 9 - 1 = 8$. Ces deux courbes sont tangentes, à la droite de l'infini, au point situé dans la direction $y = x$, et ont en ce point un contact du troisième ordre. En outre, elles sont tangentes à l'axe Oy au point de l'infini ; on a donc $\omega = 4 + 1 = 5$ et $N = 8 - 5 = 3$. Ainsi les deux courbes ont trois points communs à distance finie. L'un de ces points est à l'origine des coordonnées, les deux autres sont sur la droite $2y - 5x = 0$.

Observation. — On facilite les calculs relatifs à des con-

tacts d'ordre supérieur en des points de l'infini, en les ramenant à des contacts de même ordre à des distances finies, par une transformation homographique. Les formules les plus simples sont celles-ci :

$$x = \frac{1}{y'}, \quad y = \frac{x'}{y'}$$

et

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

par lesquelles la droite de l'infini devient un des axes coordonnés.

ÉTUDE SUR LES COORDONNÉES TRILINÉAIRES
ET LEURS APPLICATIONS

Par M. **E. J. Boquel.**

(*Suite*, voir p. 181.)

APPLICATIONS

Avant de continuer l'étude générale du système trilinéaire, et pour en faire mieux saisir l'utilité, nous en ferons immédiatement quelques applications choisies parmi celles qui n'exigent que la connaissance de la ligne droite. Ces applications, d'ailleurs très simples, familiariseront le lecteur avec l'emploi des coordonnées trilinéaires, et lui rendront, par conséquent, plus facile l'intelligence des théories qui viendront par la suite.

Polaire d'un point donné par rapport à un système de deux droites. — Proposons-nous de résoudre le problème sous la forme suivante : *Si par un point* P *pris dans le plan d'un angle* xOy *on mène une sécante fixe* PBA *et une sécante mobile* PB'A', *les diagonales* BA' *et* B'A *du quadrilatère* ABB'A' *ainsi formé se coupent en un point* M *dont on demande le lieu quand la sécante mobile tourne autour du point* P.

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle fixe OAB; soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations respectives de ses côtés OA, OB et AB.

Le point fixe P sera regardé comme défini par l'intersection des deux droites fixes ABP et OP. La première a pour équation $\gamma = 0$; la seconde, qui passe par le sommet O du triangle de référence, a une équation de la forme $\alpha = \lambda\beta$; les coordonnées du point P satisfont donc à la fois à ces deux équations.

La sécante mobile PB'A' a une équation de la forme générale
$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0. \qquad (1)$$

Elle passe par le point P : donc son équation doit être vérifiée quand on y remplace à la fois γ par o, et α par $\lambda\beta$; on aura identiquement
$$m\lambda\beta + n\beta = 0;$$
d'où
$$n = -m\lambda.$$

L'équation (1) devient, en tenant compte de cette condition.
$$m(\alpha - \lambda\beta) + p\gamma = 0 \qquad (2)$$
que l'on peut, d'ailleurs, poser directement comme droite passant par le point de rencontre de deux droites données.

Les coordonnées des points B' et A' où cette droite coupe les côtés OA et OB du triangle de référence, satisfont respectivement aux équations
$$B' \begin{cases} \beta = 0 \\ m\alpha + p\gamma = 0 \end{cases} \qquad A' \begin{cases} \alpha = 0 \\ p\gamma - m\lambda\beta = 0 \end{cases}$$

Les droites BA' et B'A qui passent chacune par un sommet du triangle de référence ont des équations de la forme
$$(BA')\ \beta = k\gamma, \qquad (AB')\ \gamma = h\alpha.$$

La première passant en A', son équation doit être rendue identique par les coordonnées de ce point A' ; donc
$$p - mk\lambda = 0,$$
ce qui donne :
$$k = \frac{p}{m\lambda}.$$

La seconde doit l'être par les coordonnées du point B' ; de là
$$m + ph = 0,$$
d'où
$$h = -\frac{m}{p}.$$

Les équations de BA' et de AB' sont donc respectivement :
$$\beta = \frac{p}{m\lambda}\gamma,$$
ou
$$m\lambda\beta = p\gamma, \qquad (3)$$

et $$\gamma = -\frac{m}{p}\alpha$$

ou $$p\gamma = -m\alpha. \qquad (4)$$

Entre (3) et (4) éliminant le paramètre variable $\frac{m}{p}$, on aura l'équation du lieu.

Il vient ainsi $$\frac{\lambda\beta}{-\alpha} = 1,$$

ou $$\alpha + \lambda\beta = 0. \qquad (5)$$

L'équation (5) représente une droite passant par le sommet O du triangle de référence; elle ne dépend pas de γ; elle reste donc la même quelle que soit la sécante fixe PBA, et comme le paramètre λ ne dépend que de la direction de OP, et nullement de la position du point P sur cette direction, le lieu reste le même quand le point P se meut sur OP.

Remarque. — Les droites OA, OB, OM et OP dont les équations sont respectivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha - \beta\lambda = 0$, prennent par la transformation en coordonnées cartésiennes, et quels que soient les paramètres de référence, les formes

$$P = 0,\ Q = 0,\ P + kQ = 0,\ P - kQ = 0,$$

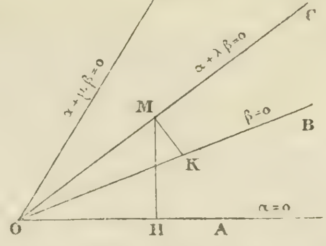
où P et Q sont des fonctions linéaires en x et y.

Or on sait que ces équations sont celles des rayons d'un faisceau harmonique. La droite OM est donc bien le lieu du conjugué harmonique du point P par rapport au segment A'B'; c'est-à-dire la polaire de ce point P par rapport à l'angle yOx.

Il n'est, d'ailleurs, pas indispensable de passer par l'intermédiaire du retour aux coordonnées cartésiennes pour reconnaître que les quatre droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha - \lambda\beta = 0$ forment un faisceau harmonique; il suffit de se rappeler que, pour un point quelconque du plan, les coordonnées α et β sont, à un facteur près, les distances de ce point aux axes de référence représentés par $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Plus généralement, on reconnaît, par le même raisonnement, que le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \mu\beta = 0$ est $\frac{\lambda}{\mu}$.

Soient, en effet, OA et OB les deux droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et OC, OD les deux droites $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \mu\beta = 0$. Menons les perpendiculaires MH et MK d'un point M de OC sur OA et sur OB.



On aura

$$\frac{MH}{MK} = \frac{\sin AOC}{\sin BOC}.$$

Mais

$$MH = \frac{\alpha}{l} \text{ et } MK = \frac{\beta}{m}.$$

l et m étant les paramètres de référence correspondant aux axes OA et OB ;

donc
$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{m}{l}$$

Mais, à cause de l'équation de la droite OC, à laquelle appartient le point M, on a $\frac{\alpha}{\beta} = -\lambda$.

De là
$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} = -\lambda \frac{m}{l}.$$

On trouverait de même $\frac{\sin AOD}{\sin BOD} = -\mu \frac{m}{l}$.

Donc
$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin BOD} = \frac{\lambda}{\mu}$$

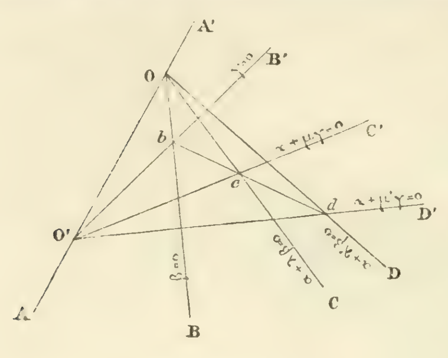
Mais on sait que le quotient

$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin BOD}$$

est le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites (rapport anharmonique des quatre points que ces droites déterminent sur une transversale quelconque); ce rapport est donc égal à $\frac{\lambda}{\mu}$. C. Q. F. D.

Théorème. — *Quand deux faisceaux de quatre droites* OA, OB, OC, OD, *et* O'A', O'B', O'C', O'D', *ont un rapport anharmonique égal et un rayon homologue commun*, OO' *les trois points d'intersection* b, c, d, *des autres rayons homologues pris deux à deux sont en ligne droite.*

Nous prendrons pour triangle de référence le triangle OO'B formé par le rayon homologue commun OO′, et deux autres rayons homologues OB et O'B′. Soient respectivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations de OO′, de OB et de O′B′.



Les rayons OC et OD ont des équations de la forme $\alpha + \lambda\beta = 0$, $\alpha + \lambda'\beta = 0$, et le rapport anharmonique du faisceau (O, ABCD) a pour valeur $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

De même les rayons O′C′ et O′D′ ont des équations de la forme $\alpha + \mu\gamma = 0$, $\alpha + \mu'\gamma = 0$, le rapport anharmonique du faisceau (O′, A′B′C′D′) ayant pour valeur $\frac{\mu}{\mu'}$. Une droite issue du sommet b du triangle de référence est de la forme $\beta + k\gamma = 0$.

Si cette droite passe par le point c, intersection des droites OC et O′C′, son équation est vérifiée quand on y fait à la fois $\alpha + \lambda\beta = 0$ et $\alpha + \mu\gamma = 0$. On aura donc identiquement

$$\alpha\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{k}{\mu}\right) = 0;$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{k}{\mu} = 0$$

et

$$k = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

L'équation de bc est donc $\beta - \frac{\mu}{\lambda}\gamma = 0$. (1)

On trouverait de même que l'équation de bd est

$$\beta - \frac{\mu'}{\lambda'}\gamma = 0. \quad (2)$$

Mais les rapports anharmoniques (O, ABCD) et (O′, A′B′C′

D′) étant égaux, par hypothèse, on en conclut

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

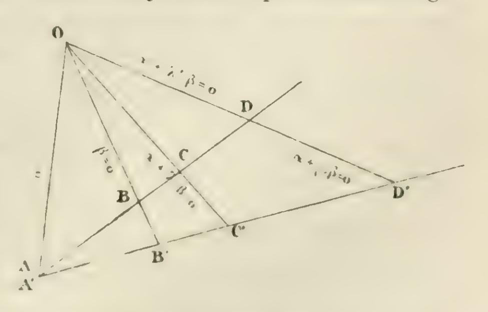
ou

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu'}{\lambda'}. \qquad (3)$$

Donc les droites (1) et (2) se confondent; les trois points *b, c, d* sont donc en ligne droite.

Théorème (CORRÉLATIF DU PRÉCÉDENT). — *Si deux systèmes de quatre points en ligne droite ont un rapport anharmonique égal et un point homologue commun, les trois droites qui joignent les autres points homologues pris deux à deux concourent en un même point.* — Cette proposition se démontrerait aisément par l'absurde, comme conséquence de la précédente; mais ce mode de raisonnement ne remplirait pas notre but, et nous préférons établir directement le théorème, ce qui est d'ailleurs très facile, et ce qui fournira en même temps un nouvel exemple des avantages que présente l'emploi des coordonnées trilinéaires pour l'étude des propriétés descriptives des figures et la traduction analytique des théorèmes de la géométrie pure.

Les deux systèmes donnés ayant un point homologue commun, soit (A,A′) ce point; ABCD étant le premier système, et A′B′C′D′ le second, supposons les deux rapports anharmoniques (ABCD), (A′B′C′D′) égaux. Joignons deux à deux les points homologues B,B′ et C,C′; les droites de jonction se rencontreront en un point O; et considérons encore la droite OA qui unit ce point O au point homologue commun (A,A′).



Prenons pour triangle de référence le triangle OAB, et soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations de ses côtés OA, OB et AB. Joignons séparément OD et OD′.

Les quatre droites formant le faisceau (O,CD) ont pour équations :
(OA) $\alpha = 0$, (OB) $\beta = 0$, (OC) $\alpha + \lambda\beta = 0$, (OD) $\alpha + \lambda'\beta = 0$.
et le rapport anharmonique (O,ABCD), qui est d'ailleurs celui des quatre points A, B, C, D, a pour valeur $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

Les quatre droites formant le faisceau (O,A'B'C'D') ont de même pour équations :
(OA') $\alpha = 0$, (OB') $\beta = 0$, (OC') $\alpha + \lambda\beta = 0$, (OD') $\alpha + \mu\beta = 0$
et le rapport anharmonique (O,A'B'C'D'), qui est d'ailleurs celui des quatre points A',B',C',D', a pour valeur $\frac{\lambda}{\mu}$.

Par hypothèse les deux rapports anharmoniques (ABCD), (A'B'C'D') étant égaux, on a $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\mu}$; donc $\lambda' = \mu$.

La droite $\alpha + \mu\beta = 0$ est donc la même que la droite $\alpha + \lambda'\beta = 0$, c'est-à-dire que OD et OD' se confondent ; la droite DD' qui joint les deux derniers points homologues passe donc par le point O, comme les deux autres droites analogues BB' et CC' ; c. q. f. d.

Remarque. — Il faut observer que cette démonstration et le théorème qu'elle établit signifient précisément que, si l'on coupe un faisceau de quatre droites par une sécante quelconque, le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de cette sécante avec les rayons du faisceau est indépendant de la position de la sécante. Il ne faudrait pas croire néanmoins qu'il y a là un cercle vicieux ; car la démonstration qui prouve que $\frac{\lambda}{\mu}$ exprime le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha + \lambda\beta = 0, \quad \alpha + \mu\beta = 0$$

ne suppose pas du tout que l'on connaisse le théorème dont nous venons de parler ; elle peut ne s'appuyer que sur la définition du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites au moyen de ses angles, définition que nous avons toujours le droit d'adopter *à priori*.

Quoi qu'il en soit, c'est-à-dire quelque point de départ que

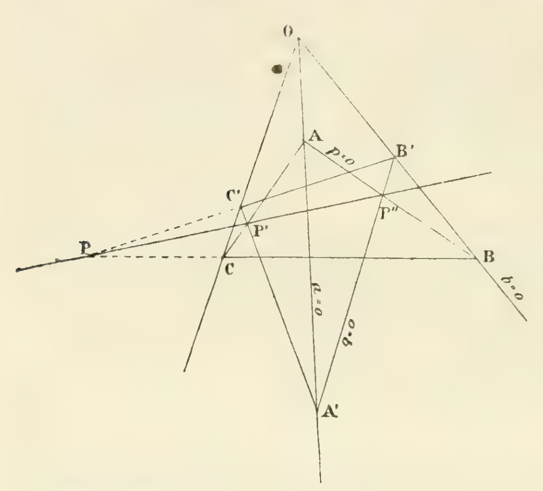
l'on adopte, on voit que toutes ces propriétés géométriques intéressantes, qui découlent de la considération du rapport anharmonique, sont indissolublement liées les unes aux autres, et rien n'est plus propre à montrer leur étroite liaison que le nouvel instrument analytique fourni par l'emploi des coordonnées trilinéaires, puisque ces coordonnées laissent précisément le rapport anharmonique $\frac{\lambda}{\mu}$ en pleine évidence dans les équations.

Autres applications. — En coordonnées rectilignes, on prend souvent des axes de coordonnées entièrement indépendants des éléments de la figure qu'on étudie, et même on représente, dans un grand nombre de questions, les droites de la figure par des équations réduites à un simple symbole; c'est ainsi que $P = 0$, par exemple, représente souvent, pour abréger, une équation générale telle que $Ax + By + C = 0$. Il est des cas, d'ailleurs assez fréquents, dans lesquels il y a avantage à faire de même en coordonnées trilinéaires, c'est-à-dire à laisser le triangle de référence indépendant des éléments de la figure, et à employer des équations symboliques. Ainsi, l'équation d'une droite du plan, par rapport à un triangle de référence donné quelconque, étant de la forme générale $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0$, nous représenterons souvent, pour abréger, son premier membre par une seule lettre a, et nous raisonnerons sur de simples symboles de cette nature.

Pour mettre complètement en lumière cette manière d'opérer, prenons comme exemple l'intéressant théorème de Desargues sur les triangles homologiques.

Théorème de Desargues (SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES). — *Quand deux triangles ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes, les points d'intersection des côtés pris deux à deux sont en ligne droite.*

Soient OA', OB', OC' les trois droites concourantes, et ABC, A'B'C', les deux triangles considérés. Le triangle de référence restant quelconque, soient $a = 0$, $b = 0$ les équations respectives de OA et de OB, et de même $p = 0$, $q = 0$ celles de AB et de A'B'.



L'équation de la droite AC, qui passe par le point de rencontre A des deux droites OA et AB est de la forme

$p + \lambda a = o.$ (1)

Celle de la droite BC, qui passe par le point B, rencontre de OB avec AB, est de même

$p + \mu b = o.$ (2)

On peut de même représenter les droites A'C' et B'C' par les équations de la forme

$$q + \lambda' a = o \quad (3) \qquad q + \mu' b = o. \qquad (4)$$

La droite OC passant par le point C, intersection des deux droites (1) et (2), son équation est de la forme

$$p + \lambda a + k\,(p + \mu b) = o.$$

Comme elle passe aussi par le point O, intersection des deux droites $a = o$ et $b = o$, cette équation doit être vérifiée quand on y fait à la fois $a = o$ et $b = o$, ce qui donne $p\,(1 + k) = o$, d'où $k = -1$.

L'équation de OC est donc, en définitive,

$$\lambda a - \mu b = o \qquad (5)$$

que l'on aurait pu trouver immédiatement en combinant par voie de soustraction les deux équations (1) et (2).

De même, en retranchant (4) de (3) on trouve

$$\lambda' a - \mu' b = o \qquad (6)$$

qui représente la droite O'C'.

Puisque, par hypothèse, les points C et C' sont en ligne droite avec le point O, (5) et (6) doivent représenter la même droite. On est donc conduit à la condition $\dfrac{\lambda}{\lambda'} = \dfrac{\mu}{\mu'}$.

Multiplions (1) par λ', (3) par λ, et retranchons les résultats ; il vient $$\lambda' p - \lambda q = 0. \qquad (7)$$

Cette équation représente une droite passant au point de rencontre P′ de AC avec A′C′, en raison même de l'opération de calcul qui l'a fournie; cette droite passe d'ailleurs au point de rencontre P″ de AB ($p = 0$) avec A′B′ ($q = 0$), puisque son équation est rendue identique par les hypothèses simultanées $p = 0$ et $q = 0$; (7) est donc l'équation de la droite P″ P′.

On reconnaît de même que la droite PP″ a pour équation
$$\mu' p - \mu q = 0. \qquad (8)$$

Mais puisque $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$, les équations (7) et (8) n'en font qu'une seule ; les droites qu'elles représentent sont confondues, et par suite les trois points P, P′, P″ sont en ligne droite ; C. Q. F. D.

— Il faut observer que les raisonnements précédents sont complètement applicables aux coordonnées rectilignes, en employant les équations sous la forme symbolique ; mais il n'y a là rien que de bien naturel ; car interpréter la démonstration dans le système des coordonnées rectilignes, c'est en réalité faire usage des coordonnées trilinéaires en déguisant l'emploi de celles-ci d'une manière plus ou moins ingénieuse ; aussi pensons-nous qu'il y a lieu de proscrire cette façon de s'exprimer, qui n'est pas naturelle, et de restituer aux coordonnées trilinéaires ce qui est réellement de leur domaine propre.

Théorème (RÉCIPROQUE DU PRÉCÉDENT). — *Quand les côtés de deux triangles se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite, leurs sommets sont situés deux à deux sur trois droites concourantes.* — La démonstration que nous venons de donner pour le premier théorème offre encore un exemple de la simplicité introduite dans les calculs par l'emploi des coordonnées trilinéaires ; en effet, il suffit de renverser la conclusion pour obtenir le théorème réciproque. Les équations des droites OC et OC′ étant, comme nous l'avons établi,
$$(\text{OC})\ \lambda a - \mu b = 0, \qquad (\text{OC}')\ \lambda' a - \mu b' = 0,$$

et celles des droites P″P′ et PP″ étant de même

$$(P''P')\ \lambda' p - \lambda q = 0, \qquad (PP'')\ \mu' p - \mu q = 0,$$

l'hypothèse est ici que les trois points P, P′, P″ sont en ligne droite, et, par conséquent, que les deux droites P″P′ et PP″ se confondent ; on a donc

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} ;$$

d'ou il résulte que les équations de OC et de OC′ sont identiques ; ce qui montre que ces deux dernières droites se confondent, et, par suite, que la droite qui joint les deux derniers sommets C et C′ passe par le point O, où se rencontrent les droites qui joignent les deux autres couples de sommets, AA′ et BB′.

— On pense que les deux théorèmes précédents ont été énoncés pour la première fois par Desargues ; ce sont eux que Poncelet a pris pour base de sa théorie des figures homologiques. — Deux pareils triangles sont, en effet, *homologiques*, ainsi que nous l'expliquerons plus loin ; le point O et la droite PP′P″ sont le *centre* et l'*axe d'homologie*.

— Pour donner une dernière application des formules relatives à la ligne droite, nous démontrerons encore le théorème suivant, très connu en géométrie : *Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Nous prendrons ici, pour plus de simplicité, un triangle de référence particulier ; ce sera le triangle OAC formé par deux côtés adjacents OA et OC du quadrilatère considéré et par une de ses diagonales AC ; soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les équations respectives des axes de référence OB, OC et AC.

La diagonale BD a une équation de la forme

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0.$$

La droite OG passant par le sommet O du triangle de référence a une équation telle que $\alpha + k\beta = 0$.

Les coordonnées du point G, intersection de AC ($\gamma = 0$) avec BD, satisfont à la condition $m\alpha + n\beta = 0$.

Ce point étant sur la droite OG, l'équation de celle-ci doit

être vérifiée par les coordonnées du point G ; on a donc

$$\alpha + k\left(-\frac{m}{n}\alpha\right) = 0$$

c'est-à-dire
$$\alpha\left(1 - k\frac{m}{n}\right) = 0.$$

On en déduit
$$k = \frac{n}{m}.$$

L'équation de OG est donc

$$m\alpha + n\beta = 0.$$

De même, les droites AD et BC ont relativement pour équations $m\alpha + p\gamma = 0$ et $n\beta + p\gamma = 0$.

Si on retranche ces équations membre à membre, il vient

$$m\alpha - n\beta = 0$$

qui représente une droite passant en O ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) et au point K d'intersection des droites AD et BC.

C'est donc l'équation de OH.

Les quatre droites OA, OC, OG et OH ont donc pour équations respectives

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad m\alpha + n\beta = 0, \qquad m\alpha - n\beta = 0.$$

Sur lesquelles on reconnaît la forme du faisceau harmonique ; car $\left(-1\frac{n}{m}\right):\left(\frac{n}{m}\right) = -1$; la transversale GDHB est donc divisée harmoniquement par ce faisceau ; C. Q. F. D.

QUESTION 10

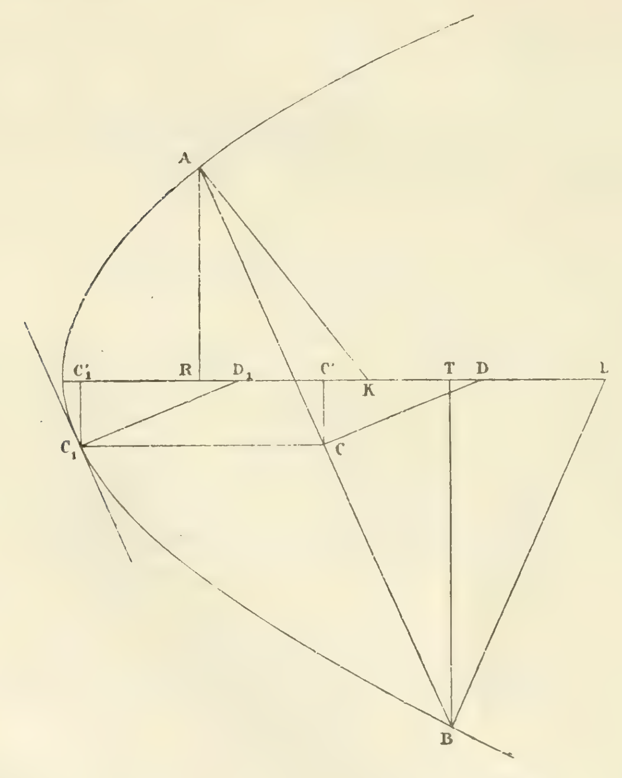
Solution par M. Finat, du Lycée de Moulins.

Soit AB *une corde dans une parabole,* C *le milieu de* AB. *On projette le point* C *en* C' *sur l'axe, et on mène par ce point* C *une perpendiculaire à* AB *qui rencontre l'axe au point* D. *Démontrer que, quel que soit* AB, CD *est constamment égal à* p. *Déduire de ce théorème une solution du problème qui consiste à trouver le sommet d'une parabole connaissant deux points et l'axe de la courbe.*

Déduire aussi de la propriété précédente ce théorème connu

que les normales A *et* B *coupent l'axe en des points équidistants du point* D. (G. L.)

I. — Je transporte le triangle $CC'D$ en $C_1C'_1D_1$, CC_1 étant un diamètre de la parabole. Le théorème connu sur la sous-normale donne $C'D = C'_1 D_1 = p$.



II. Première Solution. — On a $x = \dfrac{\overline{PB}^2}{2C'D}$.

La distance de P au sommet s'obtiendra par une troisième proportionnelle.

Deuxième Solution. — Le coefficient angulaire de la tangente en B est $\dfrac{p}{BP}$; d'où la construction.

On prend PI = C′D ; on mène BI et la perpendiculaire MB qui coupe l'axe en M. Le milieu S du segment MP est le sommet de la parabole.

III. — On a $KR = C'D = TL = p.$

On en déduit en retranchant les parties communes

$$RC' = KD \qquad C'T = DL.$$

Or $RC' = C'T$ comme projection sur le même axe de segments égaux de la droite AB.

Donc $$KD = DL.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Cartier, à Angoulême ; Renaud, à Bordeaux ; Griffon, à Montpellier ; Thomas, à Bar-le-Duc ; Mettetal, à Besançon ; Lapareillé, lycée Henri IV ; Bonieux, collège Rollin.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1882. — SECONDE SESSION

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, et deux points H et H′, le premier défini par ses coordonnées a et b, et le second symétrique du premier par rapport au point O. Par ce dernier point O on mène une droite indéfinie DOE, formant avec l'axe Ox un angle $DOx = \theta$; on projette les points H et H′ sur cette droite en h, h'. On projette le point h en u sur l'axe Ox, sur le point u en u_1 sur la droite DOE ; on projette le point h en v sur l'axe Oy, et le point v en v_1 sur la droite DOE ; toutes ces projections sont orthogonales. Enfin, sur la longueur $u_1 v_1$ comme hypothénuse, on construit un triangle rectangle $u_1 v_1 S$, en menant $u_1 S$ parallèle à Ox, et $u_1 S$ parallèle à Oy. Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ ;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice ;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les

paraboles, en faisant varier l'angle θ, se compose d'un système de deux circonférences de cercle ;

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées ;

5° De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent en un même point.

Trigonométrie.

Soient
$$a = 4546,723$$
$$b = 5678,304$$
$$c = 6246,549$$
les trois côtés d'un triangle ; calculer les angles et la surface.

Épure.

Intersection de deux cônes.— Les cônes, dont les sommets (s, s'), (t, t') ont respectivement pour côtés $0^m,050$ et $0^m,080$, touchent suivant deux génératrices verticales, distantes de $0^m,070$, un même plan de front, dont l'éloignement égale $0^m,035$. Les sections de ces cônes par un plan horizontal à la cote $0^m,090$ sont deux cercles égaux (γ, γ'), (γ_1, γ_1') dont les rayons ont $0^m,042$ de longueur.

On demande de construire les projections du corps constitué par la partie du cône de sommet (s_1, s') qui, placée de part et d'autre de ce sommet, et à l'extérieur de l'autre cône, se trouve comprise entre : 1° un plan de front, dont l'éloignement est de $0^m,020$; 2° un plan horizontal, à la cote de $0^m,230$, et 3° le plan horizontal de projection.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point de la courbe commune aux cônes et la tangente en ce point.

On placera la droite ss' à égale distance des grands côtés du cadre, et la ligne de terre à $0^m,170$ du petit côté intérieur.

QUESTIONS PROPOSÉES

38. — On considère une ellipse E, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

par les sommets on fait passer une infinité de coniques S, et l'on imagine une tangente commune à E et à S. Le point de contact de cette droite avec S décrit un lieu géométrique; on construira ce lieu, qui est une courbe du quatrième degré, et l'on indiquera les points qui proviennent d'une ellipse S ou d'une hyperbole S. *(G. L.)*

39. — On considère une hyperbole H ayant pour asymptotes les droites Ox, Oy; soit M un point de cette courbe; par M on mène une droite parallèle à Ox, qui rencontre Oy en un point P. Soit Q le symétrique de P par rapport à M; par le point Q, on mène à Oy une parallèle qui rencontre H en R; enfin, par R, on trace une parallèle à Ox; soit D cette dernière droite. On propose de démontrer que toute transversale D', menée par le point M dans le plan de l'hyperbole, rencontre QR et H en deux points également distants de D.

D' rencontre H en un point S, et la tangente en ce point coupe Oy au point T. Démontrer que la parallèle à D' menée par T, et la droite QR se coupent sur Ox. *(G. L.)*

40. — On considère une ellipse Δ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

rapportée à ses axes; par les sommets on fait passer une infinité de coniques Δ' et l'on imagine une tangente commune à Δ et à Δ'. Le point de contact de cette droite avec Δ décrit un lieu géométrique.

On construira ce lieu qui est une courbe du quatrième degré et l'on indiquera sur cette courbe les points qui proviennent des ellipses Δ' ou des hyperboles Δ'. *(G. L.)*

41. — On considère une hyperbole équilatère H. et une des asymptotes D de cette courbe ; soient P et Q deux points fixes de H. et R un point mobile sur l'hyperbole. 1° On demande le lieu géométrique des centres des cercles C circonscrits au triangle formé par les droites RP, RQ et D : 2° Ayant mené par R une perpendiculaire à D, cette droite rencontre le cercle C en un point I. autre que R. Trouver le lieu de ce point I. *(G. L.)*

42. — On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy sur Ox, un point fixe P ; sur Oy, un autre point fixe Q. Du point O comme centre, avec un rayon supposé variable, on décrit un cercle C, et des points P et Q, on mène des tangentes au cercle C ; ces tangentes se coupent en des points dont on demande le lieu géométrique. *(G. L.)*

43. — On donne une droite terminée aux points P et Q ; soit R un point pris sur PQ ; du point P comme centre avec PR pour rayon, on décrit un cercle, et du point Q avec QR, un autre cercle ; on mène une tangente commune à ces cercles, et l'on demande de démontrer que le lieu décrit par les points de contact est l'ensemble de deux quartiques.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Questions d'examen.

Correspondance.

Concours généraux.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix.

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

DE LONGCHAMPS
Professeur
de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

2e SÉRIE

TOME SIXIÈME



ANNÉE 1882

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

INTRODUCTION DU POLYNOME DÉRIVÉ

EN MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (*)

On sait comment on reconnaît qu'un polynôme entier en x est divisible par $(x - a)$, et aussi comment on reconnaît qu'un polynôme entier est divisible par $(x - a)(x - b)$, a et b étant deux nombres *différents*; mais si l'on suppose que l'on fasse $a = b$, on rencontre une difficulté, lorsque l'on cherche les conditions de divisibilité d'un polynôme entier par $(x - a)^2$.

C'est cette question qui va nous occuper ici.

Désignons par U_x le polynôme proposé, et convenons que U_a exprime la valeur que prend ce polynôme quand nous y remplaçons x par a ; alors les deux conditions

$$U_a = 0, \quad U_b = 0,$$

si b est égal à a, se réduisent à la relation unique, *nécessaire mais non suffisante* $\quad U_a = 0$.

Reprenons les conditions du cas général.

$$U_a = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \dots + A_m = 0$$
$$U_b = A_0 b^m + A_1 b^{m-1} + \dots + B_m = 0.$$

Nous pouvons remplacer l'une d'elles par la condition

$$\frac{U_a - U_b}{a - b} = 0$$

(*) Voir l'*Algèbre* de Lauvernay, p. 30.

ou
$$\left.\begin{array}{l} A_0 (a^{m-1} + b\, a^{m-2} + \ldots + b^{m-1}) \\ + A_1 (a^{m-2} + b\, a^{m-3} + \ldots + b^{m-2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-1} \end{array}\right\} = 0$$

Si l'on suppose que a tende vers b, cette relation devient à la limite

$$m\, A_0\, a^{m-1} + (m - 1)\, A_1\, a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0.$$

Si nous appelons *polynôme dérivé d'un polynôme donné*

$$U_x = A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\, x + A_m$$

celui que l'on obtient en écrivant la suite

$$m\, A_0\, x^{m-1} + (m - 1)\, A_1\, x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}$$

dont les termes sont déduits des termes correspondants de U_x par la loi suivante : *1° Si* $A_k\, x^{m-k}$ *est écrit dans le polynôme* U_x, $(m - k) A_k\, x^{m-k-1}$ *sera le terme correspondant du polynôme dérivé; 2° la constante* A_m *de* U_x *ne figure pas dans le polynôme dérivé;* nous pourrons former immédiatement le polynôme dérivé de U_x et en le désignant par U'_x, nous allons établir le théorème suivant:

Théorème. — *Pour qu'un polynôme* U_x *soit divisible exactement par* $(x - a)^2$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait :* $U_a = 0$, $U'_a = 0$, *c'est-à-dire que* a *annule le polynôme proposé et le polynôme dérivé de celui-ci.*

Nous avons déjà reconnu que ces conditions étaient nécessaires, mais il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

On a $U_x = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$

$$U_a = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_{m-1} a + A_m$$

donc puisque $U_a = 0$

$$\text{(A)}\quad U_x = (x - a) \left\{\begin{array}{l} A_0 (x^{m-1} + a x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}) \\ + A_1 (x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + a^{m-2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-1} \end{array}\right\}$$

ou $$U_x = (x - a)\, V_x$$

V_x désignant le polynome qui est placé dans la parenthèse. Mais on trouve que

$$V_a = U'_a$$

donc $$V_a = 0$$

et l'on a $$V_x = (x - a)\, W_x$$

par suite $$U_x = (x - a)^2\, W_x$$

ce qui prouve que si $U_a = 0$, $U'_a = 0$, U_x est exactement divisible par $(x - a)^2$.

Application. — *Reconnaître que*

$$U = nx^{n-1} - (n + 1)x^n y + y^{n+1}$$

est exactement divisible par

$$V = x^2 - 2xy + y^2.$$

On écrira d'abord

$$U = y^{n+1} \left\{ n \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} - (n + 1) \frac{x^n}{y^n} + 1 \right\}$$

$$V = y^2 \left\{ \frac{x^2}{y^2} - 2 \frac{x}{y} + 1 \right\}$$

et en posant $$\frac{x}{y} = X$$

on considérera les deux polynomes :

$$u_x = nX^{n+1} - (n + 1)\, X^n + 1,$$

$$v = X^2 - 2X + 1.$$

On a $$u_1 = 0$$

$$u'_x = n\,(n + 1)\, X^n - n\,(n + 1)\, X^{n-1}$$

donc $$u'_1 = 0$$

et par suite v est divisible par $(X - 1)^2$; d'où l'on déduit que U est exactement divisible par V.

Polynôme dérivé second. Divisibilité par $(x - a)^3$. *Indice simple, indices multiples.*

On peut généraliser les idées précédentes et après avoir conçu le polynôme U′, dérivé de U, imaginer le polynôme dérivé de U′, le désigner par U″ et le nommer *polynôme dérivé second*. On aura donc

$$U_x = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots$$
$$+ A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A$$

$$U'_x = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \dots$$
$$+ 2A_{m-2}x + A_{m-1}$$
$$U''_x = (m-1)mA_0x^{m-2} + (m-2)(m-1)A_1x^{m-3} + \dots$$
$$+ 2A_{m-2}$$

et nous nous proposons de rechercher les caractères de divisibilité par $(x - a)^3$, lesquels peuvent s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Pour qu'un polynôme entier* U_x *soit divisible par* $(x - a)^3$, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$U_a = 0 \qquad U'_a = 0 \qquad U''_a = 0.$$

Mais avant d'exposer la démonstration de cette propriété, nous donnerons quelques explications sur l'emploi si fréquent dans l'analyse de l'*indice*, du *double indice*, en général de l'*indice multiple*.

Quand on veut exprimer par une *notation abrégée* qu'une expression algébrique donnée U renferme une certaine lettre x, il est commode de représenter (comme nous l'avons fait plus haut, pour le polynôme entier) cette expression par U_x. Si l'on veut aussi rappeler que U a une valeur qui dépend de deux lettres x, y, nous pouvons le désigner par $U_{x,y}$; x et y sont dits des indices. On écrit aussi U_x^y ; mais en adoptant cette écriture algébrique qui s'énonce U *indice* x, *indice* y, il faut se rappeler que la lettre y représente un *indice*, et non un *exposant*. Cette convention faite, nulle confusion n'est possible et l'on pourra prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux notations précédentes ; l'une et l'autre sont d'ailleurs employées.

Lorsque les indices x, y, z..... d'une expression algébrique $U_{x,y,z\dots\dots}$ ou quelques-uns d'entre eux sont assujettis à prendre des valeurs entières et positives, la partie de l'algèbre qui étudie les relations dites *relations de récurrence*, auxquelles satisfont les relations considérées, est nommée *analyse combinatoire*.

Posons d'après la notation des indices

$$R_{x,m} = x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \dots + a^m$$

alors $\quad R_{a,m} = a^m + a^m + a^m + \dots + a^m$

(B) $\quad R_{a,m} = (m+1)a^m$

$$\frac{R_{x,m} - R_{a,m}}{x-a} = \frac{x^m - a^m}{x-a} + a\,\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x-a} + \ldots + a^{m-1}$$

et par suite

$$R_{x,m} - (m+1)a^m = (x-a)\left\{ R_{x,m-1} + aR_{x,m-2} + \ldots + a^{m-1} \right\} \tag{C}$$

la formule (A) du paragraphe précédent peut s'écrire, cette notation étant adoptée,

$$U_x = (x-a)\left\{ A_0 R_{x,m-1} + A_1 R_{x,m-2} + \ldots + A_{m-1} \right\}$$

et en posant

$$V_x = A_0 R_{x,m-1} + A_1 R_{x,m-2} + \ldots A_{m-1}$$

on a, en tenant compte de l'égalité (B),

$$V_a = A_0\, ma^{m-1} + A_1(m-1)a^{m-2} + \ldots + A_{m-1}$$

et par suite d'après (C)

$$(1)\qquad V_x - V_a = (x-a)\left\{ \begin{array}{l} A_0(R_{x,m-2} + aR_{x,m-3} + \ldots + a^{m-2}) \\ + A_1(R_{x,m-3} + aR_{x,m-4} + \ldots + a^{m-3}) \\ + \ldots \\ + A_{m-3}\, R_{x,1} + a \\ + A_{m-2} \end{array} \right\}$$

ou

$$V_x - V_a = (x-a)\, W_x$$

W_x désignant la parenthèse qui suit le facteur $(x-a)$ dans l'identité (1). Il est maintenant facile de reconnaître que

$$2W_a = U''_a\,;$$

on a en effet

$$W_a = \left\{ \begin{array}{l} A_0\,(R_{a,m-2} + aR_{a,m-3} + \ldots + a^{m-2}) \\ + A_1\,(R_{a,m-3} + aR_{a,m-4} + \ldots + a^{m-3}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + A_{m-3}\,(R_{a,1} + a) \\ + A_{m-2} \end{array} \right\}$$

ou, et en vertu de l'égalité (B),

$$\begin{array}{l} A_0 a^{m-2}\left\{ 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) \right\} \\ + A_1 a^{m-3}\left\{ 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-2) \right\} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$+ A_{m-3}a \{ 1 + 2 \}$$
$$+ A_{m-2}$$

d'ailleurs, si l'on pose

$$S_p = 1 + 2 + 3 + \ldots + p,$$

on a aussi

$$S_p = p + (p - 1) + (p - 2) + \ldots + 1 ;$$

on aura $$2S_p = p(p + 1) ;$$

donc

$$2W_a = m(m - 1)A_0a^{m-2} + (m - 1)(m - 2)A_1a^{m-}$$
$$+ \ldots + 2 . 1A_{m-2}$$

ou enfin

$$2W_a = U''_a.$$

La démonstration du théorème qui nous occupe est maintenant très simple.

On a successivement établi que,

$$U_x - U_a = (x - a)\ V_x$$
$$V_x - V_a = (x - a)\ W_x$$

avec les conditions $$V_a = U'_a$$
$$2W_a = U''_a$$

on en déduit

$$U_x = U_a + (x - a)\ U'_a + (x - a)^2\ W_x .$$

Si l'on suppose à la fois $U_a = 0$, $U'_a = 0$, on retrouve le résultat déjà établi ; U_x est alors divisible par $(x - a)^2$, puisque l'on a $$U_x = (x - a)^2 W_x$$
et alors de deux choses l'une : ou W_a n'égale pas 0, par suite U''_a n'égale pas 0 et alors U_x n'est pas divisible par $(x - a)^3$; ou au contraire $W_a = 0$, par suite $U''_a = 0$, alors W_x est divisible par $(x - a)$, et U_x par $(x - a)^3$; les trois conditions *nécessaires et suffisantes* pour que U_x soit divisible par $(x - a)^3$, sont donc

$$U^a = 0,\ U'^a = 0,\ U''_a = 0.$$

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE

Problème. — *Étant donné un point* P *dans l'intérieur d'un cercle, de ce point on lance une bille; trouver dans quelle direction il faut la lancer pour qu'elle revienne au point de départ après* n *réflexions.*

Soient *(fig. 1)* A_1 et A_n le premier et le dernier point d'incidence. Les deux triangles OA_1P, OA_nP ont le côté OP commun, $OA_1 = OA_n$; de plus, il est facile de voir que les angles en A_1 et en A_n sont égaux. Donc les angles en P sont égaux ou supplémentaires.

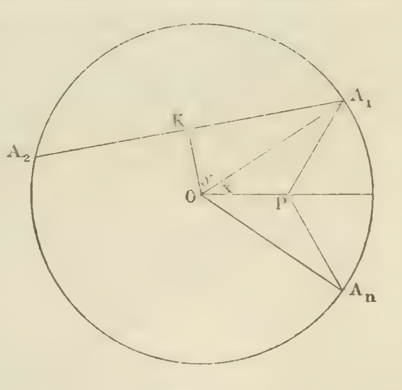


Fig. 1.

Si ces angles sont supplémentaires, le point mobile décrit un polygone régulier, convexe ou concave. Si donc on peut construire un polygone régulier de n côtés passant par le point P, il y aura une solution. Il suffit pour cela que l'apothème de ce polygone régulier soit inférieur à OP.

En second lieu, supposons que les angles en P soient égaux. Abaissons du point O une perpendiculaire OK sur A_1A_2; et posons $A_1OP = x$; $A_1OK = y$; nous trouvons facilement les égalités suivantes :

$$A_2OP = x + 2y$$

$$A_3OP = x + 4y$$

et, en général $$A_hOP = x + 2(h - 1)y.$$

Pour que A_n soit symétrique de A_1 par rapport à OP, il faut que l'on ait

$$2x + 2(n - 1)y = 2K\pi$$

ou $$x + (n - 1)y = K\pi$$

D'autre part on a, en posant $OP = a$, $OA_1 = r$,

$$\frac{a}{r} = \frac{\cos y}{\cos (x - y)}.$$

Or $$x - y = K\pi - ny.$$

Donc $$\frac{a}{r} \pm \frac{\cos y}{\cos ny}.$$

Cette dernière équation définit l'angle y; on aura par suite l'angle x, par la première équation.

Dans le cas particulier de $n = 2$, l'équation précédente devient *quadratique*, et, par suite, peut se traiter d'une manière élémentaire; mais on peut aussi résoudre la question géométriquement comme il suit :

Soient *(fig. 2)* P la position initiale, A_1 et A_2 les deux points d'incidence; menons la ligne A_1O, et prolongeons-la jusqu'au point K où elle rencontre une perpendiculaire à OP menée par le point P; enfin décrivons le cercle PO, ayant pour centre P, et passant par le point O; il coupe en I la droite OK, et en D le prolongement de OP. Il est facile de voir que le quadrilatère PIKD est inscriptible; on a donc

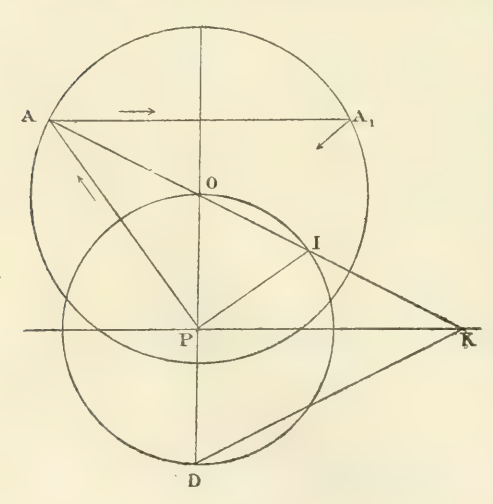


Fig. 2.

$$OI \times OK = 2OP^2;$$
$$OK - OI = OA_1 = r;$$

le problème est donc susceptible d'une solution graphique, puisqu'il revient à construire deux lignes connaissant leur différence et leur produit; on aura donc facilement OK, et, dar suite, le point A_1 sera déterminé.

QUESTIONS

A L'USAGE DES CANDIDATS DE SAINT-CYR

Trouver une progression arithmétique pour laquelle la somme des termes soit donnée, quel que soit n, par la formule

$$3n^2 + 4n.$$

— Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients de deux équations du premier degré à deux inconnues pour que la valeur de l'une des inconnues soit double de l'autre ?

— Sur les quatre côtés d'un rectangle, on construit extérieurement des triangles équilatéraux ; on demande, connaissant le périmètre du rectangle, dans quel cas la surface totale sera maxima.

— Simplifier et rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\frac{\text{Sin}^2 a - \sin^2 b}{(\cos a + \cos b)^2}.$$

— Résoudre $\text{Sin}\, x + \cos x = \text{séc}\, x.$

— Les côtés d'un triangle sont

$$x^2 + x + 1, \quad 2x + 1, \quad x^2 - 1.$$

Démontrer que l'angle opposé au premier côté est de 120 degrés.

— Calculer à 0.01 près l'expression

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}.$$

Calculer à 0,01 la valeur de l'expression

$$\sqrt{3 + \sqrt{\pi}}.$$

Combien faudra-t-il prendre de chiffres exacts à π ?

— La surface d'une sphère augmente de 371 centimètres carrés lorsque le rayon augmente de 1 centimètre ; calculer, d'après ces données, le rayon à un millimètre près.

— Trouver la vraie valeur de l'expression

$$\text{Sin}\, a = \frac{\text{tg}\, a}{\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$$

quand on y suppose $\text{tg}\, a = \infty$.

— Décomposer $2a$ en deux parties x et $2a - x$ telles que

$$\frac{2}{2a - x} + \frac{2a - x}{x}$$

soit maximum ou minimum.

— Trouver trois nombres en proportion continue, connaissant la somme 19 de ces nombres, et la somme 133 de leurs carrés.

— Une équation bicarrée dont les coefficients sont commensurables admet pour racine $2 - \sqrt{3}$; trouver les trois autres racines et l'équation qui leur a donné naissance.

— Résoudre l'équation $\cos^2 x - \cos^2 (\alpha - x) = m$.

— Dans un cercle, on connait les longueurs c et c' de deux cordes parallèles et la distance d de ces deux cordes ; on demande : 1° le rayon du cercle ;

2° la distance du centre à l'une des cordes; 3° la longueur de la corde équidistante des deux premières.

— Calculer les éléments d'un triangle rectangle dont on connaît la surface et la somme des côtés de l'angle droit.

— On donne les trois angles d'un triangle ABC; calculer l'angle formé par la bissectrice de l'angle A et la médiane issue du même sommet.

— Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice b de l'angle droit et le rapport $\frac{m}{n}$ des deux côtés de l'angle droit.

— Les quantités variables x et y étant assujetties à vérifier l'équation

$$x^2 + y^2 + xy = 216,$$

assigner les valeurs de x et y qui rendent maxima l'expression

$$2x + 3y.$$

— Deux ouvriers doivent creuser un fossé; le premier en fait la moitié, et ensuite le second fait le reste; ils emploient alors 25 heures; si les deux ouvriers travaillaient ensemble, ils auraient fini en 12 heures; combien de temps chaque ouvrier mettrait-il pour faire seul l'ouvrage entier?

— Étant donné un point sur la bissectrice d'un angle, mener par ce point une sécante qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée.

— Décomposer 17 en trois parties telles que la somme des carrés de ces parties soit égale à 120, et le produit des parties extrêmes égal à 3 fois la deuxième.

— Si a et b sont deux nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, $a^4 - b^4$ est divisible par 240.

— Trouver une équation dont les racines soient les carrés des racines de l'équation

$$7x^2 + 4x + 2 = 0.$$

— On donne l'équation $x^2 + bx + c = 0$; trouver une équation du second degré en y, telles que les racines de cette dernière équation soient égales aux racines carrées des racines de l'équation donnée.

— Calculer à $\frac{1}{20}$ près la valeur de $\sqrt{17 + \sqrt{5}}$.

— Etant donné un triangle isoscèle ABC, on mène par le sommet A une droite AX dans l'intérieur du triangle; des extrémités B et C de la base, on mène des perpendiculaires BB' et CC' sur la droite AX. On demande de déterminer la position de AX de façon que la somme, ou le produit, des deux perpendiculaires soit maximum ou minimum.

— Résoudre $\cos(x + \alpha) - \cos(x + \beta) = \cos\gamma$.

— Résoudre un triangle connaissant la base, l'angle au sommet, et la somme es produits des deux autres côtés par des quantités données.

— Sachant que $x^2 + y^2$ est constant, trouver le maximum ou le minimum de la quantité $mx + ny$.

— Déterminer la base du système de numération dans lequel le nombre 127 se trouve exprimé par le 243.

— Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le rayon du cercle inscrit et la surface. — Discussion des valeurs obtenues.

— Trouver les trois côtés d'un triangle tels que ces trois côtés et la surface soient quatre nombres entiers consécutifs.

— Démontrer que, quel que soit x, on a

$$\text{arc tg.}\,\frac{x\cos a}{1 - x\sin a} - \text{arc tg.}\,\frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

— Étant donné un triangle quelconque ABC, mener par le point A une droite telle que si l'on abaisse sur cette droite les perpendiculaires BB′, CC′, les deux triangles BAB′, CAC′ soient équivalents.

— Résoudre un triangle connaissant deux côtés et la bissectrice de l'angle compris.

— Parmi les cylindres de même volume, quel est celui qui peut être inscrit à la plus petite sphère?

— Résoudre un triangle connaissant un côté a, la hauteur correspondante h et et la différence δ des angles B et C adjacents au côté donné.

— Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre et la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

— Trouver quatre nombres en proportion géométrique, connaissant leur somme, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs quatrièmes puissances.

— Résoudre le système $x + y = a$; $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.

— Trouver le maximum du produit xyz, sachant que le produit $a^x b^y c^z$ est constant.

— Les angles d'un triangle sont en progression arithmétique, et la somme des carrés de leurs sinus est égale à 2; quelle relation doit-il exister entre les côtés de ce triangle?

— Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A, et sachant que le côté b est double du côté c. Discuter.

— Résoudre et discuter l'équation $x^2(3\alpha - 1) + 2x + 4\alpha - 1 = 0$; trouver pour quelles valeurs de α les racines sont comprises entre $+1$ et -1.

— Couper un tronc de pyramide par un plan parallèle aux bases, de façon que la section soit moyenne proportionnelle entre les deux bases.

— Étant donné $\operatorname{tg} a$, calculer $\cos \frac{a}{4}$.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et la surface.

— Trouver quatre nombres en progression arithmétique, connaissant le produit des extrêmes, 22, et le produit des moyens, 40.

— Si S, S′, S″ sont les sommes de n termes de trois progressions arithmétiques dont les premiers termes sont l'unité et dont les raisons sont respectivement 1, 2, 3, démontrer que l'on a

$$S + S'' = 2S'.$$

— Si a, b, c sont les termes de rang p, q, r d'une progression géométrique, on a

$$a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1.$$

— Dans une progression géométrique, le terme de rang $p + q$ est m; le terme de rang $p - q$ est n; en déduire que le terme de rang p est $\sqrt{mn}$, et le terme de rang q est $m\sqrt[2q]{\left(\frac{n}{m}\right)^p}$.

— Résoudre un triangle rectangle connaisant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0$.

— Résoudre $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

QUESTION 350

Solution par M. Gino-Loria, élève à l'Université de Mantoue (Italie).

Les centres de gravité des quatre triangles dans lesquels tout quadrilatère est divisé par ses deux diagonales sont les sommets d'un second quadrilatère semblable au parallélogramme maximum inscrit dans le quadrilatère proposé et équivalent aux $\frac{2}{9}$ de ce quadrilatère.

Soit ABCD le quadrilatère donné; MNPQ le parallélogramme inscrit maximum, O le point de rencontre des diagonales AC, BD.

Déterminons sur OM le point M_1 au tiers de OM à partir de M, et par des constructions analogues déterminons les points N_1, P_1, Q_1.

Ces points M_1, N_1, P_1, Q_1 sont les centres de gravité des triangles de l'énoncé.

Il résulte des constructions précédentes que

$$OM_1 = \frac{2}{3} OM;$$

$$ON^1 = \frac{2}{3} ON;$$

$$OP_1 = \frac{2}{3} OP;$$

$$OQ_1 = \frac{2}{3} OQ.$$

Donc M_1N_1 et MN; P_1N_1 et PN; P_1Q_1 et PQ; Q_1M_1 et QM sont deux à deux parallèles. Par suite les triangles OMN, OM_1N_1 sont semblables; de même ONP et ON_1P_1; OPQ et OP_1Q_1; OQM et OQ_1M_1. Dès lors les quadrilatères MNPQ et $M_1N_1P_1Q_1$ composés du même nombre de triangles semblables et semblablement placés sont semblables. — Leurs surfaces sont donc entre elles comme les carrés de deux lignes homologues. Donc

$$\frac{MNPQ}{M_1N_1P_1Q_1} = \frac{OM^2}{MO_1^2} = \frac{9}{4},$$

donc $$M_1N_1P_1Q_1 = \frac{4}{9} MNPQ;$$

mais $$MNPQ = \frac{1}{2} ABCD;$$

donc $$M_1N_1P_1Q_1 = \frac{2}{9} ABCD.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Prevost, au Lycée du Mans, et Henry, à Bréchaincourt.

QUESTION 352

Solution par M. H. Bourget, au Collège d'Aix.

Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, le côté opposé et la bissectrice de cet angle ou de son supplément.

1° Supposons le problème résolu. Soient ABC le triangle demandé, BAC l'angle donné $AE = l$ sa bissectrice, $BC = m$, le côté opposé (*fig. 1*).

Circonscrivons un cercle O au triangle ABC; la bissectrice AE prolongée passe en D milieu de l'arc BC. Donc si sur BC on décrit un segment capable de l'angle donné, le problème revient à mener par le point D une sécante telle que la partie AE ait une longueur donnée l.

Joignons BD. Les triangles semblables ABD, EBD donnent

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{ED}$$

ou $\overline{BD}^2 = AD \cdot ED.$

D'autre part $AD - ED = l.$

A l'aide de ces deux équations on peut construire la ligne AD.

Cette ligne une fois construite, de D comme centre avec AD pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera le segment capable en deux points A et A'. Joignant A et A' aux points B et C on aura deux triangles égaux et symétriques par rapport au diamètre DP.

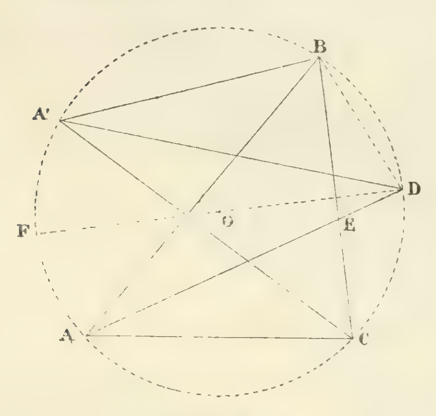


Fig. 1.

Pour que le problème soit possible, il faut que $AD < 2R$, R étant le rayon du cercle O.

Quand $AD = 2\,R$, A et A' se confondent, il n'y a qu'une solution; le triangle ainsi construit est isoscèle.

2° Si on donnait la bissectrice du supplément de l'angle A, on obtiendrait par une construction analogue le point D (*fig. 2*). Puis de D comme centre, avec AD comme rayon, on décrirait une circonférence qui couperait le cercle O en A et A'. On

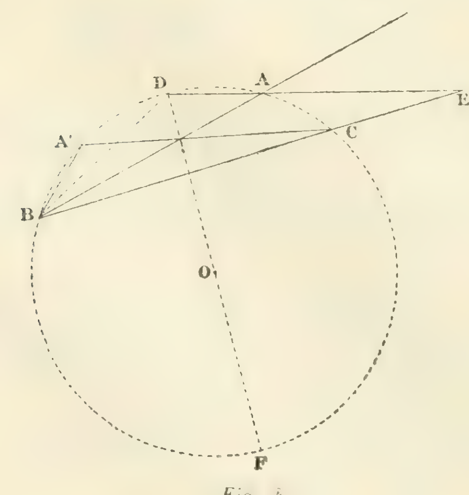


Fig. 2.

aurait encore deux solutions égales et symétriques par rapport à DF.

Le cercle de centre D coupe toujours le cercle O, à moins que AD ne soit nul; dans ce cas le problème n'a qu'une solution, qui est un triangle isoscèle.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Perrier, à Lons-le-Saunier Gino-Loria, à Mantoue; Henry, à Bréchancourt; Joly, à Tarbes; Hellot, à Rouen; Debray, à Chauveney-Saint-Hubert; Hoover à Dayton (États-Unis); Vigy, à Vitry-le-François

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE CAEN

Août 1881.

Étant donnés dans un plan deux points A et B, et une droite CD, trouver une circonférence qui passe par les deux points, et intercepte sur la droite une corde de longueur donnée. Examiner le cas où les deux droites sont rectangulaires. Dans les deux cas, trouver le rayon de la circonférence.

— Par un point donné sur l'un des côtés d'un triangle, mener une droite qui le partage en deux parties équivalentes.

— Un triangle tourne autour de sa base, dont la longueur est la moitié de la hauteur correspondante. Calculer le volume engendré, et comparer ce volume à celui d'une sphère dont le rayon serait égal à la base du triangle.

— Connaissant le rayon et la distance des centres de deux circonférences, extérieures l'une à l'autre, calculer la longueur de chaque tangente commune comprise entre les points de contact. Conditions pour que le quadrilatère formé par les quatre tangentes soit inscriptible.

— Déterminer les valeurs du paramètre m pour lequel les quatre racines de l'équation bicarrée

$$x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$$

sont en progression arithmétique. Calcul des racines correspondantes.

— Déterminer les deux points de la ligne de terre dont la distance à un plan donné est égale à 3 centimètres. Les traces du plan sont dans le prolongement l'une de l'autre, et font un angle de 30° avec la ligne de terre. On joindra à l'épure une explication succincte.

— La durée de l'année sidérale étant égale à 365,25637 jours, et celle de la révolution sidérale de la lune à 27,32166 jours, calculer la durée de la révolution synodique de la lune.

— Trouver le maximum du volume du cylindre inscrit dans une sphère de rayon 1.

— Démontrer que dans un tétraèdre régulier les six arêtes sont perpendiculaires deux à deux, et que leurs trois perpendiculaires communes se coupent en un point qui est en même temps le point de concours des quatre hauteurs.

— Connaissant la longueur l de l'arête d'un tétraèdre régulier, calculer la

distance d'un sommet à la face opposée, la plus courte distance de deux arêtes opposées, le volume du tétraèdre, enfin la grandeur, à une seconde près, de l'angle dièdre fourni par deux faces contiguës.

— Un plan parfaitement poli est incliné de 30° sur l'horizon ; sa longueur est de 25 mètres. On demande au bout de combien de temps un corps pesant abandonné en haut du plan sera arrivé en bas.

— Combien de temps faut-il pour rembourser un emprunt de 20000 francs par annuités de 1600 francs, le taux étant 4 o/o ?

— Un tronc de pyramide régulière a pour bases deux carrés, l'un de 16 mètres, l'autre de 9 mètres de côté ; on sait de plus que le polyèdre est circonscrit à une sphère ; calculer le rayon de la sphère, le volume et la surface du polyèdre.

— Un arc de cercle compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π a pour sinus $-\frac{240}{289}$; calculer le sinus et le cosinus de la moitié de cet arc.

— Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+c}=0$$

et démontrer qu'elle a toujours ses racines réelles, a, b, c étant des nombres réels quelconques.

— Aux trois sommets A, B, C d'un triangle dont les angles sont aigus, on applique trois forces parallèles, de même sens, et respectivement égales à tgA, tgB, tgC. Trouver le point d'application de leur résultante, et montrer que la grandeur de cette résultante est égale au produit tg A. tg B. tg C. Dire comment il faudrait modifier l'énoncé du théorème si le triangle avait un angle obtus.

RENNES

Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un de ses sommets sans traverser la surface. Quelle position doit avoir le triangle pour engendrer le plus grand volume possible ?

— Un levier coudé, dont les deux bras, supposés rectilignes, font entre eux un angle de 120°, et dont l'un est double de l'autre, est en équilibre sous l'action de deux poids égaux suspendus à ses extrémités ; quelles sont les inclinaisons respectives des deux bras par rapport à l'horizontale ?

— On donne un point C centre d'un cercle de rayon variable, et un point A par lequel on mène les tangentes AB et AD. Pour quelle valeur du rayon la corde de contact BD a-t-elle une longueur donnée ? — Maximum de cette longueur. Interprétation géométrique.

— On donne une circonférence O de rayon R, et un point A, par lequel on mène toutes les sécantes telles que ABC. Quelle est celle qui détermine le triangle OBC de surface maximum ?

MONTPELLIER

Démontrer par la trigonométrie que la surface du dodécagone régulier est égale à trois fois le carré du rayon.

— Trouver un arc dont la tangente égale dix fois le sinus.

— Une personne a emprunté 10000 francs ; elle veut se libérer au moyen

de 24 paiements égaux effectués : le premier un an après l'emprunt et les suivants d'année en année. Calculer quelle doit être la valeur de l'annuité, le taux de l'intérêt étant de 4 1/2 0/0.

— Etant donnés deux alliages d'argent et de cuivre, l'un au titre de 0,800, et l'autre au titre de 0,900, combien faut-il prendre de grammes de chacun pour faire 100 pièces de 1 franc au titre de 0,835 ?

— Transformer en un monôme le binôme $a \sin x + b \cos x$. Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle maxima ou minima ? Faire le calcul pour $a = 3$, $b = 4$.

MARSEILLE

Etant donné un triangle équilatéral ABC, inscrire dans ce triangle un autre triangle équilatéral A'B'C', sous cette condition que la surface du triangle A'B'C' soit la moitié de la surface du triangle ABC ; déterminer les segments AA' et A'B en fonction du côté a du triangle donné.

— Quel est le lieu géométrique des milieux de toutes les cordes d'un cercle qui vont converger en un même point ?

— On donne par leurs projections une droite (ab, $a'b'$) et un point (o, o') ; on demande de trouver les projections d'une droite passant par le point (o, o') et rencontrant la ligne de terre et la droite (ab, $a'b'$).

— Etudier les variations de l'expression.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9x + 20}$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

— Quelle est la longitude d'un lieu dont l'heure avance sur l'heure de Paris de $2^h\,27'\,36''$, et quelle est la latitude de ce lieu, sachant que la hauteur méridienne du soleil est au solstice d'été de $75^\circ\,13'\,24''$, et que l'inclinaison du plan de l'écliptique sur le plan de l'équateur est égale à $23^\circ\,27'\,15''$.

— Deux cercles dont les rayons sont R et R' sont tangents extérieurement. Mener une sécante qui détermine dans le premier cercle une corde égale à R, et dans le second une corde égale à R'. Déterminer le point où cette sécante coupe la ligne des centres.

POITIERS

Une barre homogène dont l'unité de longueur pèse a kilogrammes, et dont une extrémité A est fixe, supporte en un point B de sa longueur un poids P, tandis qu'une force verticale Q, appliquée de bas en haut à l'autre extrémité C, est destinée à maintenir la barre en équilibre ; étant donnés a, P, Q et la distance AB, trouver AC. Montrer qu'il y a un minimum pour Q, et trouver la valeur correspondante de C.

— Exprimer, en fonction du demi-paramètre et de l'angle α que fait la tangente à la parabole en un point M avec le rayon vecteur : 1° la longueur de la normale à la courbe au point M ; 2° la longueur de l'ordonnée ; 3° la distance qui sépare le pied de l'ordonnée du sommet de la parabole ; 4° le rayon vecteur.

— Entre quelles limites peut varier la fraction

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 1} ?$$

— Deux corps pesants partent au même moment d'une hauteur h ; le premier, sans vitesse initiale, suit un plan faisant avec l'horizon un angle α ; le second suit un plan incliné d'un angle β, et arrive en même temps que le premier. Quelle est la vitesse initiale? Application $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; $h = 9{,}8088$.

NANCY

Trouver quatre nombres en proportion, sachant que la somme des moyens est égale à a, la somme des extrêmes égale à b, et la somme des carrés des quatre termes égale à k^2.

— Calculer le rayon d'une sphère sachant que les deux bases d'une zone de cette sphère sont distantes du grand cercle parallèle de 15° et de 75°, et que la surface de la zone est égale à 16 mètres carrés. — Calculer le volume du segment sphérique compris entre les plans des deux bases de la zone.

GRENOBLE

Maximum et minimum de

$$3 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x.$$

— A quelles distances du sommet d'une pyramide de hauteur égale à 142 mètres faut-il mener des plans parallèles à la base pour que son volume soit divisé en trois parties équivalentes?

BORDEAUX

Maximum et minimum de

$$\sin x + 3 \cos x.$$

— Calculer en kilomètres carrés la surface de la zone terrestre comprise entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est de 30°.

— Sur deux droites rectangulaires se coupant en O, on prend quatre points A, B, C, D à une distance d de O; de chacun de ces points comme centre, on décrit des circonférences égales et tangentes deux à deux; puis une grande circonférence enveloppe la première et leur est tangente; calculer le rayon de chacune de ces circonférences et le rapport de la surface de chacun des cercles intérieurs au cercle enveloppant. Quelle doit être la valeur de d pour que le rapport soit $\frac{1}{10}$.

TOULOUSE

Étant donné un petit cercle de rayon r sur une sphère de rayon R, déterminer le rayon d'un second cercle parallèle au premier, et comprenant avec le premier un segment sphérique qui soit dans un rapport k avec le cône qui aurait pour sommet le centre du premier cercle et pour base le second cercle. Discuter.

— Trouver sur l'une des arêtes d'une pyramide polygonale de sommet S un point B tel que, si on mène par ce point un plan parallèle à celui de la base de la pyramide, l'aire de la section obtenue soit les trois quarts de l'aire de la base de la pyramide.

PARIS

Résoudre l'équation

$$\sin 2x = \cos(x + h)$$

h étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

— Trouver la valeur de tg$x$ d'après l'équation

$$\text{tg}^2 x = \text{K tg}(x + a)\ \text{tg}(x - a);$$

discuter la solution, et trouver sans tables la valeur de x lorsque $K = 1$.

— Trouver les rayons de bases du tronc de cône circonscrit à une sphère et dont le volume est double de celui de cette sphère; on connaît le rayon R de la sphère.

— Calculer les côtés b et c d'un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse a, et dans lequel les angles B et C vérifient la relation

$$\sin B = 2 \sin C.$$

— Une pyramide régulière a pour base un triangle équilatéral dont on donne le côté a, on sait de plus que la surface latérale de la pyramide est égale à deux fois la surface de la base. Calculer la hauteur.

— Etant donné un cône circulaire droit dont le côté est égal au diamètre $2a$ de la base, trouver à quelle distance x du sommet il faut mener un plan parallèle à la base pour que la surface du cercle suivant lequel ce plan coupe le cône soit égale à la surface latérale du cône comprise entre les deux plans parallèles.

— Connaissant le côté a de la base d'une pyramide régulière à base carrée, et la hauteur h, calculer le rayon de la sphère circonscrite.

— Les bases d'un tronc de pyramide étant B et b, calculer l'aire de la section faite dans cette pyramide par un plan équidistant des bases.

— Trouver l'angle de deux plans dont l'un est parallèle à la ligne de terre.

— Trouver une progression arithmétique de cinq termes connaissant la somme $5a$ de ses termes, et la somme $\frac{1}{b}$ de leurs inverses. On déterminera le terme du milieu et la raison.

— Trouver la relation qui doit exister entre a et a' pour que le maximum et le minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 2ax + 1}{x^2 + 2a'x + 1}$$

soient égaux et de signes contraires.

— ABCD est un rectangle dont les côtés $AB = a$, $BC = b$ sont donnés. Calculer au moyen de ces données les deux volumes engendrés par les triangles AOB, COD tournant autour de AB. Le point O est le point de concours des diagonales.

— Combien faut-il prendre de termes dans la progression arithmétique

$$4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots$$

pour que la somme de ces termes soit égale à 60500.

— Résoudre les trois équations

$$x + y + z = 1$$
$$ax + by + cz = h$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = h^2$$

et faire voir que le numérateur et le dénominateur des valeurs de chacune des inconnues peuvent être décomposés en facteurs du premier degré.

— On considère un cercle de rayon R, et une tangente AB à ce cercle; on mène

BC perpendiculaire à AO. Calculer le volume du cône engendré par ABC tournant autour de AC. On donne le rayon R et $OA = a$.

— A quelle condition les trois équations

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a''x + b''y + c''z = 0$$

sont-elles satisfaites autrement que par $x = 0$, $y = 0, z = 0$?

QUESTIONS PROPOSÉES

1. — Démontrer que le polynôme

$$A = n(n+1)(n+2)x^n - 6.n.1.x^{n-1}$$
$$- 6.(n-1).2x^{n-2} - 6.(n-2).3.x^{n-3} \ldots$$
$$- 6.2(n-1).x - 6n$$

est exactement divisible par $(x - 1)$, et donner le quotient.

(G. de Longchamps.)

2. — Démontrer que le polynôme

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p-1)x^{n-1} + (p-1)x^{n-2}$$
$$+ \ldots + (p-1)x + p$$

est exactement divible par

$$x^2 - (p+1)x + p.$$

(G. de Longchamps.)

3. — Résoudre l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$$

4. — Démontrer que, si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

(G. de Longchamps.)

5. — A tout triangle ABC, on peut inscrire deux triangles ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de ABC. Ces triangles sont inscriptibles dans une circonférence ayant pour centre le centre des médianes antiparallèles de ABC.

(J. Neuberg.)

6. — A tout triangle ABC, on peut inscrire deux trian-

gles ayant leurs côtés parallèles aux bissectrices de ABC ; ces triangles ont le même cercle des neuf points.

(J. Neuberg.)

7. — Sur les côtés d'un triangle donné ABC, on construit trois triangles semblables ABC_1, BCA_1, CAB_1, tels que les droites AA_1, BB_1, CC_1, concourent en un même point D. Démontrer que les points A_1, B_1, C_1, décrivent chacun une circonférence. *(J. Neuberg.)*

BIBLIOGRAPHIE

COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, *à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences et des candidats aux écoles du gouvernement, par M.* **Combette**, *professeur au lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière.

Nous avons voulu attendre la publication du second fascicule de cet ouvrage pour pouvoir l'étudier d'ensemble ; nous avons trouvé, dans ce nouveau cours écrit par M. Combette, les qualités qui devraient se rencontrer dans tout livre écrit pour des élèves : la précision, et surtout l'ordre méthodique dans l'exposition. M. Combette, tout en introduisant dans son Cours de Géométrie quelques-unes des notions connues maintenant sous le nom de *géométrie moderne*, et qu'il est indispensable d'exposer aux élèves, même de Mathématiques élémentaires, a su cependant rejeter les modifications que l'on tendait à introduire dans l'étude du cinquième livre, et revenir aux méthodes de Legendre, évitant ainsi aux élèves de tourner souvent dans un cercle vicieux sous prétexte d'avoir des idées plus générales sur les figures de l'espace.

M. Combette, sans vouloir faire une géométrie sphérique, a cependant traité quelques questions relatives à la sphère, telles que les cercles tangents sur la sphère, le plan radical de deux sphères, etc. ; mais l'une des parties importantes de l'ouvrage que nous analysons ici, est l'étude des courbes usuelles. L'auteur a eu soin de rattacher les trois courbes l'une à l'autre par la considération des directrices et de l'excentricité. On sait que c'est en partant de la définition des coniques par l'excentricité, que les auteurs anglais ont étudié ces courbes au point de vue géométrique ; mais, jusqu'à présent, cette notion géométrique n'avait pas encore eu droit de cité chez nous.

Enfin, pour résumer ce que nous avons à dire de l'ouvrage de M. Combette, nous dirons que cette géométrie contient tout ce que l'on demande aux examens des écoles, que par suite elle doit être considérée comme un ouvrage complet, et a droit au même succès que les deux autres ouvrages du même auteur que nous avons signalés précédemment.

Cours de Géométrie descriptive, *par* **M. Ch. Brisse**, *professeur de Mathématiques spéciales au lycée Fontanes, répétiteur de géométrie et stéréotomie à l'Ecole polytechnique.* — Paris, Imprimerie Gauthier-Villars. Prix: 5 francs.

La première partie seulement de cet ouvrage est parue; mais nous n'avons pas voulu attendre pour la recommander à nos lecteurs; les idées énoncées par l'auteur ont en effet une importance capitale: M. Brisse insiste sur ce point qu'il n'y a jamais qu'une seule méthode générale pour la solution d'un même genre de questions, et que cette méthode ne comporte aucune exception ; en outre, l'auteur a le soin de rappeler que toujours on doit effectuer une construction dans l'espace avant de faire une épure, et qu'on ne doit lire dans l'espace que pour disposer des données, et lire l'épure que lorsqu'elle est terminée; on doit s'occuper, pendant son exécution, exclusivement d'appliquer les règles données pour *le trait*.

M. Brisse a, dès le début, signalé l'emploi d'un seul plan horizontal de projection, mais avec autant de plans verticaux qu'on le juge nécessaire. D'après cela, il devenait inutile d'indiquer la méthode des changements de plan, et aussi de faire l'étude des prétendus cas particuliers d'un problème, qui tiennent au choix du système de plans que l'on considère ; au contraire l'auteur a étudié avec soin la méthode du rabattement et la méthode des rotations. Puis il a donné toutes les indications nécessaires à l'exécution d'une épure, la distinction des parties vues et des parties cachées, et, à propos des polyèdres, a donné des exercices d'ombre.

Les problèmes traités par M. Brisse sont développés assez complètement pour que les élèves y trouvent toutes les indications utiles, et en même temps soient forcés à un travail personnel sérieux, pour en tirer un véritable profit ; c'est, à nos yeux, une bien grande qualité dans un ouvrage classique. Nous espérons que beaucoup de personnes, jugeant comme nous, assureront le succès de cet ouvrage, dont la première partie fait désirer très vivement la seconde.

La solution de la question n° 355 donnée dans le numéro de décembre est inexacte; nous en donnerons une solution nouvelle dans le numéro de février.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE GHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 202-2.

RÉSOLUTION PAR LES TABLES

DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A RACINES RÉELLES

Lorsque l'équation du second degré a ses racines réelles et inégales, on peut toujours, par un changement de variable, l'identifier avec une équation trigonométrique très simple et on obtient, par suite, très rapidement les racines de l'équation au moyen des tables de logarithmes, comme nous allons l'indiquer.

1. — Proposons-nous, d'abord, de déterminer sin 2φ en fonction de tg φ. Nous avons

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi;$$

puis $$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

donc, nous avons

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Inversement, nous aurons, pour déterminer tg φ en fonction de sin 2φ, l'équation

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{2}{\sin 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0. \qquad (1)$$

De même, nous savons que l'équation qui donne tg φ en fonction de tg 2φ est

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0. \qquad (2)$$

2. — Cela posé, considérons l'équation du second degré ramenée à la forme

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (3)$$

dans laquelle nous supposons d'abord q positif, et son signe mis en évidence ; posons

$$x = z\sqrt{q};$$

l'équation devient, en divisant par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0. \qquad (4)$$

Puisque les racines sont réelles, nous pouvons poser

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{2}{\sin 2\varphi},$$

ce qui nous donne

$$\sin 2\varphi = \frac{-2\sqrt{q}}{p};$$

cette équation donne pour φ une valeur réelle, car on voit facilement que cette valeur de sin 2φ est comprise entre -1 et $+1$, son carré étant $\frac{4q}{p^2}$, quantité moindre que 1, par hypothèse; connaissant l'angle 2φ des tables, nous en tirons l'angle φ, puis nous avons

$$z' = \operatorname{tg} \varphi; \quad z'' = \operatorname{cotg} \varphi;$$

d'où nous tirons $x' = \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi; x'' = \sqrt{q} \operatorname{cotg} \varphi.$

Exemple. — Soit à résoudre par les tables l'équation

$$x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0.$$

Nous trouvons $2\varphi = 73°27'14''$;

puis $x' = 3{,}87625,$

$x'' = 6{,}9632.$

3. — Supposons en second lieu que l'équation soit de la forme

$$x^2 + px - q = 0, \qquad (5)$$

dans laquelle nous admettons encore q positif; posons comme précédemment $x = z\sqrt{q}$;

l'équation devient, après avoir divisé par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z - 1 = 0.$$

Si nous posons alors

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi},$$

nous identifions l'équation (6) avec l'équation (2), et nous en tirons

$$z' = \operatorname{tg} \varphi$$

$$z'' = -\operatorname{cotg} \varphi.$$

Donc nous avons

$$x' = \sqrt{q} \operatorname{tg} \varphi$$

$$x'' = -\sqrt{q} \operatorname{cotg} \varphi.$$

EXEMPLE. — Proposons-nous de résoudre l'équation

$$x^2 + 0{,}42331x - 8{,}53972 = 0.$$

De l'égalité $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$

nous tirons $2\varphi = 85^\circ\ 51'\ 27''$;

puis $x' = 2{,}71828$

$x'' = -3{,}14159.$

La méthode précédente est indiquée dans la Trigonométrie américaine de *Chauvenet*: elle a une grande analogie avec celle qui est généralement enseignée; mais pourtant elle a sur celle-ci l'avantage d'éviter la connaissance de la résolution de l'équation du second degré.

4. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les racines étaient réelles; mais nous pouvons encore employer la première forme quand les racines sont imaginaires; dans ce cas nous avons nécessairement q positif, et l'équation a la forme $x^2 + px + q = 0.$

En posant encore $x = z\sqrt{q}$

nous trouvons, en divisant par q,

$$z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0.$$

Posons alors $\frac{p}{2\sqrt{q}} = \cos\varphi$:

l'angle φ est calculable par les tables; car le carré du premier membre, $\frac{p^2}{4q}$, est inférieur à 1; alors l'équation devient $z^2 + 2z\cos\varphi + 1 = 0$

ou $z^2 + 2z\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 0.$

Ce qui peut s'écrire

$$(z + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 0$$

ou $(z + \cos\varphi + i\sin\varphi)(z + \cos\varphi - i\sin\varphi) = 0.$

Dans ce cas, les racines ont pour expression, comme on le sait, $a + bi$ et $a - bi$;

on a donc $a = \sqrt{q}\cos\varphi$; $b = \sqrt{q}\sin\varphi$;

par conséquent, nous pouvons calculer les racines imaginaires.

Exemple. — Soit à résoudre l'équation

$$x^2 + 6,28318\,x + 10,87312 = 0,$$

nous trouvons $\varphi = 17^\circ\,41'\,10''$.

puis $a = -3,14159$

$b = 1,001769.$

Donc les racines sont

$$-3,14159 \pm 1,001769\,i.$$

MAXIMA ET MINIMA DANS LES PROBLÈMES

MÉTHODE DIRECTE

Quand l'énoncé d'un problème se borne à la recherche du maximum ou du minimum d'une quantité, on doit se proposer d'abord d'obtenir l'expression de cette quantité en fonction d'une variable dont le choix, qui n'est pas absolu, est généralement indiqué par l'énoncé ou par la figure.

Cela fait, on cherche à discuter l'expression trouvée, c'est-à-dire *à suivre sa variation quand la variable choisie va, par exemple, toujours en croissant entre les valeurs extrêmes compatibles avec la question.*

Si on peut préciser cette variation, il est clair que l'on arrive naturellement à déterminer *les valeurs correspondantes de la fonction et de la variable pour lesquelles la fonction passe par un maximum ou par un minimum.*

C'est ce que nous appellerons la *méthode directe.*

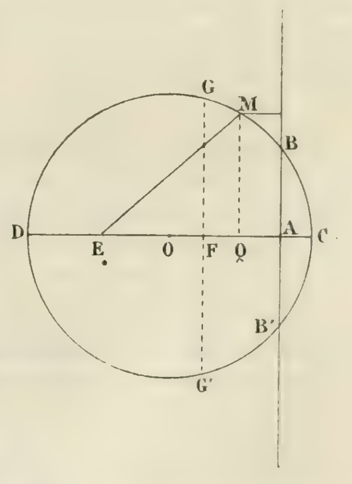
Nous allons en donner plusieurs exemples.

Exemple 1. — *Étant donnés une circonférence* O, *une droite* BB' *située à une distance* OA *du centre égale à* $\frac{3R}{4}$, *et un point* E *situé sur le diamètre* OA *à une distance du centre égale à* $\frac{R}{2}$, *on propose de trouver les positions d'un point* M *mobile sur la circonférence, pour lesquelles la somme des carrés de ses distances au point* E *et à la droite* BB' *est maximum ou minimum.*

Prenons pour variable x la distance du centre à la projection Q du point mobile sur le diamètre OA, cette variable étant positive ou négative suivant que le point Q est à droite ou à gauche de O ; et cherchons l'expression de la somme y des carrés en fonction de x. Pour la position M du point, nous avons

$$y = \left(\frac{3R}{4} - x\right)^2 + \left(R^2 + \frac{R^2}{4} + Rx\right)$$

et il est aisé de s'assurer que cette expression conserve la même forme quand le point M occupe une position quelconque sur la circonférence, et cela grâce à la convention faite sur le signe de x. Or, cette expression étant ordonnée par rapport à x, s'écrit



$$y = x^2 - \frac{R}{2}x + \frac{29R^2}{16}.$$

C'est donc un trinôme du second degré en x qu'il s'agit de discuter quand x croît de $(-R)$ (à $+R$). A cet effet, nous le mettons sous la forme

$$y = \left(x - \frac{R}{4}\right)^2 + \frac{7R^2}{4}.$$

Sous cette forme nous voyons que y décroîtra jusqu'au moment où x croissant atteindra $\frac{R}{4}$; à partir de ce moment, y croîtra indéfiniment.

En prenant les valeurs extrêmes, on a donc le tableau suivant :

x	$-R$ ...	$<$	$-\frac{R}{2}$ ...	$<$	$-\frac{R}{4}$ ...	$<$	$+R$
y	$\frac{53R^2}{16}$ ...	$>$	$\frac{37R^2}{16}$ ...	$>$	$\frac{7R^2}{4}$ ...	$<$	$\frac{37R^2}{16}$

donc y passe par le *minimum* $\frac{7R^2}{4}$ quand $x = \frac{R}{4}$.

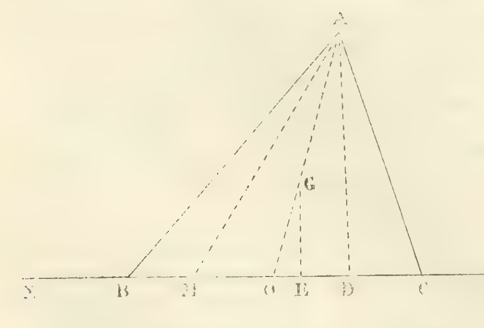
De plus, lorsque x atteint la valeur R, le point M est en C; et le point continuant à parcourir la circonférence, x repasse par les valeurs précédentes; il en est donc de même de y; la valeur $\frac{37R^2}{16}$ est donc un *maximum* pour y; de même, le point M arrivant en D, et continuant à parcourir la courbe, y va en décroissant, la valeur $\frac{53R^2}{16}$ est donc encore un *maximum*.

En résumé, dans une révolution complète du point M, la somme des carrés passe par deux maxima, quand le point mobile est en D ou en C, et elle passe par deux minima égaux quand le point mobile est aux deux points symétriques G et G′ tels que $OF = \frac{R}{4}$.

Exemple 2. — *Étant donnés les trois points* A, B, C, *on considère un point* M *parcourant de* x *vers* y *la droite indéfinie qui passe par les points* B *et* C; *on propose de trouver la position du point* M *pour laquelle la somme des carrés de ses distances aux points* A, B, C *est minima.*

Nous représentons par a la distance donnée AD du point A à BC, et par b, c les distances données DB, DC.

Enfin, nous prenons pour variable x la distance du point D au point M, cette distance étant comptée positivement dans le sens yx, et négativement en sens inverse.



Dans la position M, nous obtenons, pour la somme y de carrés,

$$y = a^2 + x^2 + (b - x)^2 + (c + x)^2.$$

Cette expression reste évidemment de même forme tant que le point M est à gauche du point D; on démontre aisé-

ment que cette forme se conserve encore lorsque ce point est à droite de D, la distance de ce point à D étant alors $(-x)$.

En ordonnant y par rapport à x, nous obtenons

$$y = 3x^2 - 2(b-c)\,x + (a^2 + b^2 + c^2);$$

c'est un trinôme du second degré que nous écrivons

$$y = 3\left[\left(x - \frac{b-c}{3}\right)^2 + \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2bc}{9}\right].$$

Nous voyons alors que, x croissant de $-\infty$ à $\frac{b-c}{3}$, ce trinôme décroît jusqu'à

$$y_1 = \frac{3a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2bc}{9},$$

et que x croissant à partir de $\frac{b-c}{3}$, la quantité y croît indéfiniment.

Cette fonction est donc *minima* quand $x = \frac{b-c}{3}$, et sa valeur minima est y_1.

En supposant $b > c$, comme dans la figure, nous obtenons la position E du point mobile dans le cas de minimum en prenant le milieu O de BC, et portant $OE = \frac{OD}{3}$.

Remarque. — Ce résultat est facile à voir par la géométrie; soit, en effet, G le centre des moyennes distances des points A, B, C, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle ABC; on sait que *la somme des carrés des distances d'un point de l'espace aux points* A, B, C *égale trois fois le carré de la distance de ce point au point* G, *plus la somme des carrés des distances du point* G *aux points* A, B, C.

Donc le minimum de la somme des carrés des distances aux points A, B, C est le même que le minimum de la distance au point G; si donc le point variable se déplace sur BC, le minimum sera atteint lorsqu'il se trouvera à la projection E de G sur BC.

Exemple 3. — *Étant donné un point* A, *intérieur à une circonférence* O, *on propose de tracer par ce point deux cordes rectangulaires* MN, PQ, *telles que l'aire du quadrilatère* MPNQ *soit maxima ou minima.*

Soit a la distance donnée OA, et soit x la distance variable du point O à la corde MN.

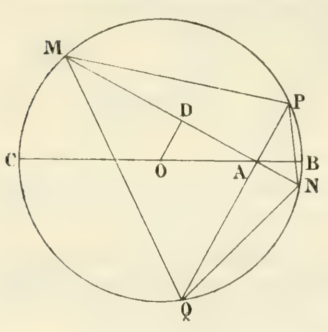
L'aire d'un quadrilatère étant la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur ses diagonales, l'aire y du quadrilatère MPNQ a pour expression

$$y = 2\text{MD} \times \text{QE}.$$

Or $\quad \text{MD} = \sqrt{\text{R}^2 - x^2}; \quad \text{QE} = \sqrt{\text{R}^2 - \text{OE}^2}\cdot$

Donc $\quad y = 2\sqrt{(\text{R}^2 - x^2)(\text{B}^2 - a^2 + x^2)}.$

Or, y étant positif, son maximum et son minimum auront lieu dans les mêmes circonstances que le maximum ou le minimum du carré



$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4\text{R}^2(\text{R}^2 - a^2);$$

le second membre étant un trinôme bicarré en x, nous pouvons suivre sa variation; et à cet effet nous l'écrivons

$$y^2 = -4\left[\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - \left(\text{R}^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right].$$

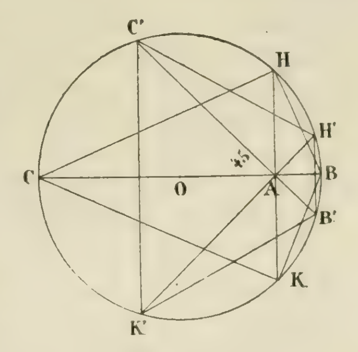
Sous cette forme, nous voyons que, x croissant de o à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la quantité y^2 croît, et x croissant de $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ à a, y décroît: donc nous obtenons un maximun de y^2, et par suite de y quand les deux cordes sont également inclinées sur le diamètre OA; la valeur maximun de y est alors

$$2\text{R}^2 - a^2.$$

D'ailleurs, la surface va en décroissant quand x croît de $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ à a, c'est-à-dire jusqu'au moment où la corde MN devient perpendiculaire au diamètre OA; il est clair qu'en supposant que cette corde continue à pivoter autour du point A, l'aire va repasser par les valeurs précédentes; donc cette

aire atteint un minimum au moment où l'une des cordes coïncide avec le diamètre OA ; la valeur de ce minimum est

$$2R\sqrt{R^2 - a^2}.$$



En résumé quand l'angle droit fait une révolution complète autour du point A, l'aire du quadrilatère passe par deux maxima égaux C'H'B'K', et deux minima égaux CHBK.

Remarque. — Tous ces exemples se traitent aisément en faisant usage de la limite F' (x) du rapport $\left(\frac{k}{h}\right)$ de l'accroissement de la fonction F (x) à l'accroissement de x. Ainsi, comme nous l'avons déjà indiqué, l'étude de la variation, d'une fonction, de laquelle résultent ses maxima et minima, est ramenée à l'étude du signe d'une autre fonction F' (x) qui est sa dérivée ; c'est la véritable méthode générale pour résoudre ce genre de questions. Ce qui va suivre est un composé de méthodes détournées qui ne peuvent être comprises complètement et rendues rigoureuses que par un retour à ces idées générales de continuité.

MÉTHODE INDIRECTE

Méthode. — La méthode directe n'est applicable, dans les cours élémentaires, que si l'on sait discuter la fonction qui exprime, à l'aide de la variable choisie, la quantité dont on cherche le maximum ou le minimum.

Dans le cas contraire, on peut arriver souvent à trouver néanmoins le maximum ou le minimum, en prenant une *méthode indirecte* qui peut se résumer ainsi :

Soit y la quantité exprimée en fonction de la variable x ; proposons-nous de chercher comment il faut prendre x pour que la quantité y prenne une valeur donnée m, que nous laissons, d'ailleurs arbitraire ; si nous sommes conduit, pour

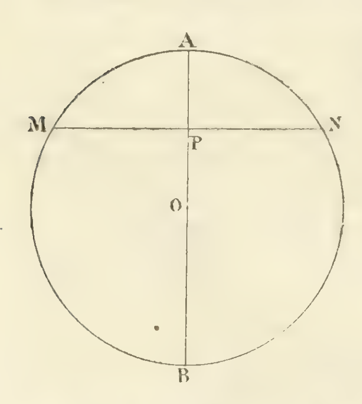
résoudre ce problème auxiliaire, à une équation en x que nous sachions résoudre, nous pourrons trouver les conditions de possibilité de cette question, et en déduire les limites de grandeur de l'indéterminée m. Ces limites feront alors généralement connaître la valeur maxima ou minima de y.

C'est ainsi que nous avons trouvé, dans les exemples donnés pour les problèmes du second degré, qu'une question de maximum se dégageait toujours de la discussion.

Nous donnons encore ici de nouveaux exemples de l'application de cette méthode.

Exemple I. — *Tracer dans une circonférence donnée une corde* MN *telle que la somme de la longueur de cette corde et de la distance* OP *au centre soit maxima.*

Il suffit évidemment d'étudier la question en supposant que la corde MN se déplace parallèlement à elle-même, $OP = x$, que nous prenons comme variable, croissant de o à R.



La quantité y, dont on cherche le maximum, est alors

$$y = x + 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous ne savons pas discuter cette fonction de x; nous avons alors recours à la méthode indirecte.

Nous nous proposons de trouver x de sorte que y prenne la valeur arbitraire m: il suffit pour cela de résoudre l'équation

$$x + 2\sqrt{R^2 - x^2} = m.$$

Cette équation étant irrationnelle, nous isolerons le radical dans un membre

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x, \qquad (1)$$

et nous élèverons les deux membres au carré; en ordonnant par rapport à x, nous obtenons

$$5x^2 - 2mx + (m^2 - 4R^2) = 0 \qquad (2)$$

Pour que la quantité y puisse acquérir la valeur m, il faut et il suffit qu'il corresponde à cette valeur une racine réelle de l'équation (1) ; c'est-à-dire que, pour cette valeur m, l'équation (2) ait une racine réelle, positive et moindre que m (à cause de l'élevation au carré).

Or. la condition de réalité des racines de l'équation (3) est

$$m^2 - 5(m^2 - 4R^2) \geq o$$

ou

$$m^2 - 5R^2 \leq o$$

ce qui conduit à la condition nécessaire et suffisante

$$m^2 \leq R\sqrt{5},$$

puisque m est positif.

Donc déjà m ne peut avoir de valeur supérieure à $R\sqrt{5}$; voyons si m peut égaler cette limite supérieure ; lorsque $m = R\sqrt{5}$, l'équation admet la racine double $\frac{m}{5}$, ou

$$\frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

qui est positive, et moindre que m ; elle est donc acceptable, et la plus grande valeur que peut atteindre m est $R\sqrt{5}$; c'est donc le maximum cherché. En discutant le problème auxiliaire on trouverait le minimum R atteint pour $x = R$.

Exemple II. — *Étant donné un rectangle* ABCD, *on propose de placer le point* M *sur la direction du côté* AB, *de sorte que la somme des aires des triangles* AMN, DNC *soit un minimum.*

Il est visible effectivement que si le point M part de A en se dirigeant vers X, la somme des surfaces a d'abord pour valeur la moitié de l'aire du rectangle, et que le point M venant se placer en F tel que AF = AB, la somme des aires reprend la même valeur ; donc M se déplaçant de A vers F : cette somme variable qui a commencé par décroître, a passé par un *minimum*.

Soient a, b les dimensions du rectangle et soit x la distance variable AM, l'expression de la somme y des deux aires sera alors

$$y = \frac{1}{2} x \, AN + \frac{1}{2} a \, DN.$$

Or on a $$\frac{x}{AN} = \frac{a}{DN} = \frac{a + x}{b}.$$

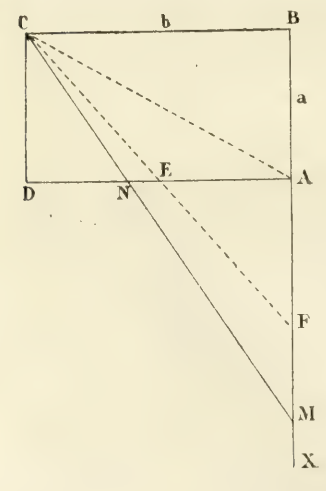
d'où $$y = \frac{bx^2}{2(a + x)} + \frac{ba^2}{2(a + x)} = \frac{b(a^2 + x^2)}{2(a + x)}.$$

Ne sachant pas discuter la fonction que nous trouvons, nous appliquons la *méthode indirecte :* nous cherchons donc à déterminer x de sorte que la somme des aires ait la valeur m. A cet effet, nous considérons l'équation

$$\frac{b(a^2 + x^2)}{2(a + x)} = m;$$

d'où $$bx^2 - 2mx + a(ab + 2m) = 0. \qquad (1)$$

Pour que la somme des aires puisse acquérir la valeur m, il faut et il suffit que, à cette valeur de m, corresponde une racine réelle et positive de l'équation (1); or, la condition de réalité des racines de (1) est



$$m^2 - ab(ab + 2m) \geq 0$$

ou $m^2 + 2abm - a^2 b^2 \geq 0$. (2)

Les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de (2) sont réelles, inégales et de signes contraires : il faut donc et il suffit, pour satisfaire à (2), que la quantité positive m ne soit pas inférieure à la racine positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$m \geq ab(\sqrt{2} - 1).$$

Ainsi la somme des aires ne peut pas être inférieure à $ab(\sqrt{2} - 1)$; voyons si elle peut l'égaler; quand m a cette valeur limite, l'équation (1) admet la racine double $\frac{m}{b}$, ou $a(\sqrt{2} - 1)$; cette valeur, étant positive, est acceptable ; par suite la moindre valeur de y est bien

$$ab(\sqrt{2} - 1)$$

et le minimum est atteint quand on a

$$x = a(\sqrt{2} - 1),$$

valeur facile à construire.

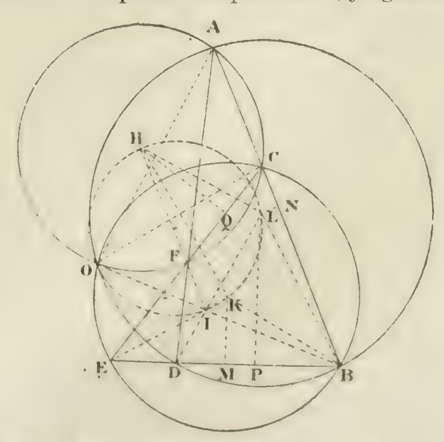
NOTE DE LA RÉDACTION. — Cet article est extrait textuellement de l'Algèbre de M. Combette, dont nous avons déjà rendu compte. Il fait voir dans quel esprit rigoureux et méthodique est écrit cet ouvrage, que nous ne saurions trop recommander à nos lecteurs.

QUESTION 361

Solution par M. E. SAUVIAT, au Lycée de Nantes.

Considérons quatre droites dans un plan : ces quatre droites prises trois à trois forment quatre triangles et l'une d'elles, AB *par exemple, appartient à trois de ces triangles. Dans chacun des trois triangles correspondant à* AB, *joignons le centre du cercle circonscrit au sommet opposé à* AB. *1° Pour un même côté* AB, *les trois droites ainsi menées concourent en un point* I ; *2° les quatre points analogues à* I *et les quatre centres des cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre droites sont sur une même circonférence.*

1° Menons les droites LD, EK qui se coupent en I ; joignons IF, FH et démontrons que les points F, I, H sont en ligne droite.



L'angle EID = IDB — IED ou la différence de leurs compléments : EKM — DLP.

Remplaçons ces deux angles par leurs égaux ECB, DAB : on a : EID = ECB — DAB = AFC = EFD.

Donc le quadrilatère FIDE est inscriptible et l'on a

$$\text{EFI} = \text{IDM}.$$

mais dans le triangle LDP, IDM est le complément de l'angle L ou de son égal FAC. D'ailleurs, l'angle HFC est le complément de l'angle FHQ ou de son égal FAC. Les deux angles IDM et HFC ont donc même complément et sont égaux. Or, on vient de voir que EFI = IDM. Donc EFI = HFC et les trois points H, F, I sont en ligne droite.

2° Je dis d'abord que les trois cercles H, L, K se coupent en un même point ; soit O le point d'intersection des cercles L et K, on a

$$AOC = AOB - COB = ADB - CEB = EFD = AFC.$$

Le cercle H passe donc par le point O.

Il faut prouver que le quadrilatère HLKI est inscriptible. Or, l'angle KHL = AOC qui a ses côtés perpendiculaires à ceux du premier, et AOC = AFC.

Donc $$KHL = AFC.$$

D'ailleurs LIK = EID = EFD, puisque le quadrilatère EDIF est inscriptible.

Donc $$LIK = EFD = AFC.$$

Les deux angles KHL, EFD égaux à AFC sont égaux entre eux et le quadrilatère IKLH est inscriptible ; c. q. f. d.

On peut d'ailleurs remarquer que le cercle circonscrit passe par le point O.

En effet,

$$LOK \text{ ou son égal } LBK = ABD - LBN - KBM$$

ou $$LBK = ABD - \left(\frac{\pi}{2} - ADB\right) - \left(\frac{\pi}{2} - ECB\right)$$
$$= ABD + ADB + ECB - \pi.$$

Or $$ABD + ADB = \pi - FAC,$$

donc $$LBK = ECB - FAC = AFC = AOC = KHL,$$

donc $$LBK \text{ ou son égal } LOK = KHL.$$

Donc les cinq points I, K, L, H, O sont sur une même circonférence. Si on considère un côté autre que AB, on a une circonférence qui doit avoir en commun avec la précédente le point O et deux quelconques des trois points H,K,L.

Cette nouvelle circonférence se confond donc avec la première.

Il en résulte que les quatre points analogues à I, les

quatre centres des cercles circonscrits et le point O sont neuf points sur une même circonférence.

Nota. — La même question a été résolue par M. Liégeois, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, classe de M. Courcelles.

QUESTION 368

Solution par M. Pigeaud, élève du Lycée de Châteauroux.

Circonscrire à une circonférence de rayon r *un triangle isoscèle dont le côté soit égal à* m *fois la base.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle proposé. Je mène le rayon OD et j'ai dans les deux triangles semblables ADO et ABH:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{BH} \text{ ou } \frac{AO}{r} = \frac{mBC}{\frac{BC}{2}};$$

d'où

$$AO = 2mr.$$

De là la construction suivante. D'un point A distant du point O d'une longueur $2mr$ je mène deux tangentes au cercle, et par le point H déterminé par AO prolongé, j'élève une perpendiculaire à cette même droite AO. Le triangle ainsi construit répond à la question.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Hellot, à Rouen; Delcambre, collège Chaptal, à Paris; Baron, à Sainte-Barbe; Verdier, à Passy; Sauviat, à Nantes; Fiévet, à Lille; Provost, au Mans.

QUESTION 389

Solution par M. Mayon, élève au Lycée Henri IV.

On considère un cercle Δ *et un diamètre* AB *de ce cercle; ayant pris sur* AB, *entre les points* A *et* B, *un point fixe* C, *on trace, du même côté du diamètre, deux droites rencontrant le cercle aux points* D *et* E. *On suppose ces droites mobiles, mais à chaque instant symétriques par rapport à la perpendiculaire*

CZ *au diamètre* AB; *enfin de même aux points* D, E, *les tangentes au cercle* Δ, *tangentes qui se rencontrent au point* F. *On propose de démontrer les propriétés suivantes de la figure ainsi formée:*

1° *Le quadrilatère* CDEF *est inscriptible.*

2° *Le lieu décrit par le point* F *est une droite.*

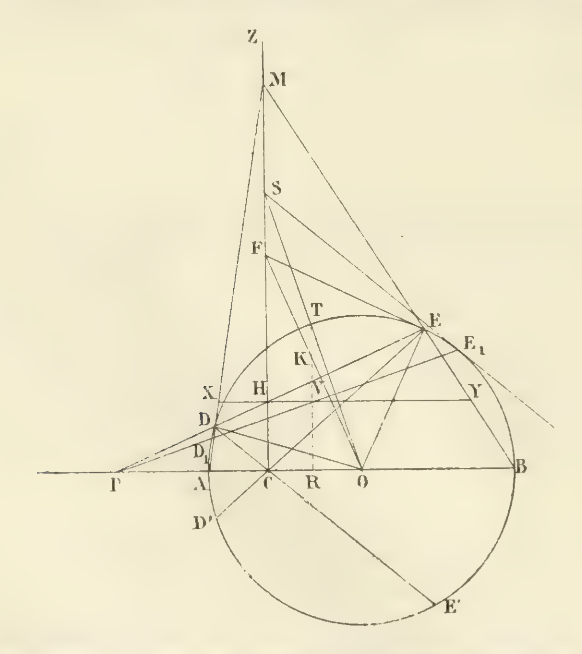
3° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère* CDEF *est une droite.*

4° *La droite* DE *passe par un point fixe.*

5° *Le triangle* CDE *est maximum quand il est rectangle.*

6° *Le lieu décrit par le point de concours des droites* AD, BE *est une droite.*

I. — La question est évidemment résolue, du moins en



majeure partie, si on s'appuie sur la division harmonique et la théorie des polaires. Ainsi le lieu de F et le lieu du point de concours des droites AD et BE sont évidemment la polaire du point fixe par lequel passent les droites DE,

lequel point fixe n'est autre que le conjugué harmonique de C par rapport au cercle.

Cette question offre, ce semble, plus d'intérêt si on s'astreint à en démontrer les divers points en ne s'appuyant que sur des principes plus élémentaires.

II. — *1° Le quadrilatère* CDEF *est inscriptible.*

Joignons DO, EO ; le quadrilatère FDOE est inscriptible; il a l'angle en F commun avec le quadrilatère CDEF ; il suffit donc de montrer que DCE = DOE ; en prolongeant EC et DC en D' et E', comme CD et CE sont symétriques par rapport à AB, on a arc DE = arc D'E'. Donc les angles DCE et DOE sont égaux comme ayant même mesure l'arc DE.

2° Lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

Il résulte du premier cas que ce cercle circonscrit est commun aux deux quadrilatères CDEF, ODEF. Or le centre du cercle circonscrit au second quadrilatère est au milieu de la droite FO en K. On a KC = KO comme rayon du même cercle; donc le lieu du point K est une perpendiculaire à AB élevée au milieu de CO.

Remarque. — Étudions ce lieu : toute la droite en fait évidemment partie; soit I son point de rencontre avec le cercle et S le point de rencontre de OT avec CZ : si par S je mène des tangentes au cercle, les droites symétriques correspondantes CD et CE jouiront d'une propriété remarquable : quand les points D et E seront sur le cercle entre A et D_1 d'une part, B et E d'autre part, le centre du cercle circonscrit à CDEF sera à l'intérieur du cercle; quand D et E seront sur l'arc D_1TE_1, le centre du cercle circonscrit sera extérieur au cercle; enfin quand D est en D_1 et par suite E en E_1 le centre correspondant n'est autre que le point T.

3° Lieu de F. — Puisque KF = KO. comme on a CR = RO, il en résulte que dans le triangle OCF, FC est parallèle à KR ; donc le lieu de F est une perpendiculaire en C à AB.

Au point de vue géométrique, la partie de cette droite comprise à l'intérieur du cercle ne fait pas partie du lieu ; car les tangentes étant réelles, leur point de rencontre F est à l'extérieur du cercle.

4° *La droite* DE *passe par un point fixe.*

Soit P le point de rencontre de cette droite avec AB. Soit V son point de rencontre avec FO. Les deux triangles rectangles PVO, COF sont semblables comme ayant un angle aigu commun. On a

$$\frac{PO}{OV} = \frac{FO}{CO};$$

d'où

$$PO = \frac{OV.FO}{CO}.$$

Or, dans le triangle rectangle FOE, comme EV est perpendiculaire sur l'hypoténuse, on a

$$OV\,.\,FO = OE^2 \text{ ou } R^2:$$

donc

$$PO = \frac{R^2}{CO}.$$

donc PO est constant ; c'est une troisième proportionnelle qu'il est aisé de construire : les droites DE passent donc toutes par le point P ainsi détourné.

5° *La surface de* DCE *est maximum quand le triangle est rectangle en* A.

En effet, la surface de DCE est

$$S = \frac{1}{2} DC\,.\,CE \sin DCE.$$

Or on a

$$DC\,.\,CE = DC\,.\,D'C = AC\,.\,CB = R^2 - CO^2:$$

donc

$$S = \frac{1}{2}(R^2 - CO^2) \sin DCE.$$

$R^2 - CO^2$ étant constant, la surface sera maximum quand sin DCE sera maximum, c'est-à-dire pour DCE $= 90°$.

6° *Lieu des points de rencontre de* AD *et* BE.

On a vu que $PO\,.\,CO = R^2$

ou

$$\frac{R}{CO} = \frac{PO}{R}:$$

on a

$$\frac{R - CO}{R + CO} = \frac{PO - R}{PO + R}$$

ou

$$\frac{CA}{BC} = \frac{PA}{PB}.$$

Dans le triangle DCE les deux bissectrices CH, CP donnent aussi les relations

$$\frac{DH}{HE} = \frac{PD}{PE}.$$

Or on a $$\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PE},$$

donc $$\frac{CA}{BC} = \frac{DH}{HE}.$$

Ceci posé, par E je mène la droite XY parallèle à AB.

Les triangles XDH, HEY sont semblables ; en effet ils ont deux angles égaux comme opposés par le sommet, et EYH = XDH comme ayant même mesure : en effet, XDH a pour mesure la moitié de ADE et EYX = EBA qui a aussi pour mesure la moitié de l'arc ADE.

De la similitude de ces deux triangles il résulte que

$$\frac{DH}{HE} = \frac{XH}{HY}.$$

Mais alors $$\frac{XH}{HY} = \frac{AC}{CB}$$

et par suite les trois droites AD, CH, BE sont concourantes ; donc le lieu du point de rencontre de AD avec BE est la droite CH.

Remarque. — Le lieu véritable n'est que la partie de la droite CZ extérieure au cercle ; mais si on considère en même temps le lieu du point de rencontre de BD avec AE, le lieu complet est la droite CZ tout entière.

Conséquences de ces diverses propriétés.

I. — Le premier cas nous conduit à la remarque suivante : Étant donnés deux points D et E, si on va de D en E en touchant une droite AB en C, le chemin DCE étant minimum, la circonférence passant par les points D, C, E coupe la droite AB en un second point qui est équidistant de D et E.

II. — Le quatrième cas étant démontré, on peut proposer sur la figure tous les problèmes relatifs aux droites qui passent par un point fixe. Ainsi, le lieu du pied de la hauteur issue de C dans le triangle CDE est un cercle de diamètre PA ; le lieu du pied de la médiane issue de A est un cercle de diamètre PO ; d'une façon plus générale le lieu du pied d'une

droite issue de C et faisant avec DE un angle constant α, est un segment capable de cet angle α décrit sur PC.

Il en serait de même pour certains points remarquables des droites CD, CE qui passent par le point fixe C. En particulier le lieu des projections de O sur ces deux droites est un cercle de diamètre CO.

III. — Le cinquième cas, si on suppose que le point C soit en O, conduit à la proposition suivante : Etant donné un point fixe P dans le plan d'un cercle, on mène une sécante PDE. Le triangle DOE sera maximum quand la sécante coupera la courbe sous un angle de 45°. — On le vérifie aisément.

IV. — On peut faire sur la figure proposée beaucoup d'autres remarques dont voici quelques-unes :

1° Le lieu du point de rencontre des bissectrices du triangle ODE est évidemment la droite OZ.

2° Le lieu du point de rencontre des médianes de ce même triangle est un cercle. En effet, on a vu que le lieu du pied de la médiane CV est un cercle de diamètre PO. Si par le point N situé aux $\frac{2}{3}$ de CV à partir de C, je mène des parallèles à VO et VP, elles coupent en G et J le diamètre AB; leur angle est évidemment droit ; donc le lieu de N est un cercle de diamètre GJ. Les points G et J divisent respectivement PC et CO dans le rapport $\frac{1}{2}$.

3° Le lieu géométrique du point de rencontre de la droite OF avec une droite symétrique de la hauteur issue de C par rapport à CZ, n'est autre que le lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère CDEF, c'est-à-dire la droite RT.

Ceci résulte en effet de la propriété qu'ont la hauteur d'un triangle et la droite qui joint le sommet considéré au centre du cercle circonscrit d'être symétriques par rapport à la bissectrice issue au même sommet.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Fiévet, à Lille; Pigeaud, à Châteauroux ; Kœhl, à Grenoble ; Simeray, à Lons-le-Saulnier ; Baron, à Sainte-Barbe.

M. Baron a remarqué en outre que, si l'on supposait le cercle projeté sur un plan passant par le diamètre AB, les droites CD, CE se projettent suivant

des droites également inclinées sur le grand axe, et que les propriétés 2, 4, 6 sont projectives; le centre du cercle circonscrit au quadrilatère CDEF se projette suivant le centre d'une ellipse homothétique à l'ellipse donnée, et passant par les cinq points A, C, E_1, D_1, F_1; et le centre de cette ellipse décrit une droite perpendiculaire au grand axe et passant par le milieu de AC.

QUESTION 390

Solution par M. J. de Loynes, élève de l'École Albert-le-Grand.

Dans un parallélogramme ABCD, *on mène, par un sommet* A, *une sécante qui coupe* BC *en* E *et* DC *en* F. *Démontrer que, quelle que soit la direction de la sécante, on a*

$$BE \times DF = \text{const.}$$

Joignons AC. Cette ligne AC coupe BC et DC au même point C. Donc, si l'on forme dans ce cas le produit des deux segments déterminés sur BC et sur DC par la sécante AC, ce produit BC × DC sera le produit de deux côtés consécutifs du parallélogramme. Considérons maintenant les deux triangles ABE, AFD. Ils sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun; savoir : les angles ABE, ADF, comme angles opposés du parallélogramme ABCD; les angles BAE, DFA, comme alternes-internes par rapport aux deux parallèles AB, DC coupées par la sécante AN. Donc

$$\frac{BE}{AD} = \frac{AB}{DF};$$

d'où

$$BE \times DF = AD \times AB.$$

Par suite le produit BE × DF est constant, puisqu'il est égal au produit de deux côtés consécutifs du parallélogramme.

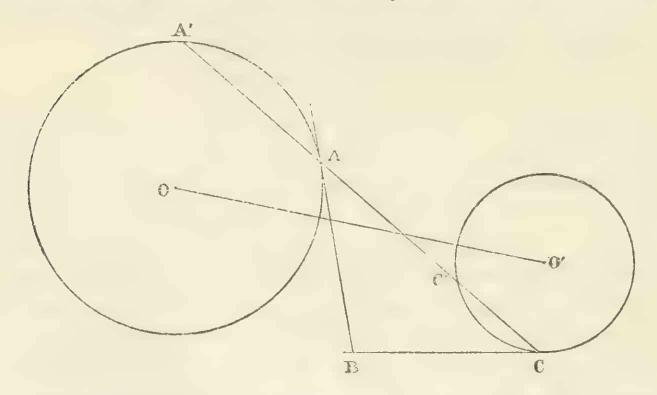
Nota. — La même question a été résolue par MM. Fiévet, à Lille; Pagillon, au collège Stanislas; Blessel, à Paris; Tietard, Pigeaud, à Châteauroux; Dupuis, à Lons-le Saulnier; Costeux, à Saint-Omer; Baron, à Sainte-Barbe; Dupré, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Broutin, Verdier, à Passy; Lestie, à Saint-Brieuc.

QUESTION 392

Solution par M. G. Pigeaud, élève au Lycée de Châteauroux.

Deux cercles étant donnés et ω étant un centre de similitude inverse, une droite AC *tourne autour de* ω. *On mène les tangentes en* A *et en* C *qui ne sont pas des points homologues. trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.*

Prenons AC dans l'une de ses positions et soit ABC le



triangle formé par les tangentes et cette droite. L'angle A de ce triangle a pour mesure la moitié de l'arc AA', l'angle C a pour mesure la moitié de l'arc CC', et comme ces deux arcs sont égaux, on a A = C et le triangle BAC est isoscèle : donc BA = BC. Le point B est donc tel que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient constamment égales entre elles. Or on sait que le lieu des points qui jouissent de cette propriété est l'axe radical des deux cercles, B est donc constamment sur cet axe, et cet axe est le lieu de B.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Dupin, à Grenoble; Gino-Loria, à Mantoue; Pagillon, au collège Stanislas; Lestic, à Saint-Brieuc.

QUESTIONS PROPOSÉES

8. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît deux côtés et la ligne qui joint le sommet de l'angle compris au centre du cercle inscrit. *(Hallowell.)*

9. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base et la hauteur, sachant en outre qu'un des angles à la base est double de l'autre. *(Hallowell.)*

10. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base, un angle à la base et la somme du côté opposé à cet angle et de la hauteur du triangle. *(Hallowell.)*

11. — Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, l'un des côtés adjacents et l'angle qui fait le côté opposé à l'angle donné avec la médiane correspondante. *(Hallowel.)*

12. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base, la différence des angles à la base, et la somme des deux autres côtés. *(Hallowell.)*

13. — Construire géométriquement un triangle, connaissant la base, un angle à la base, et le point de la base par lequel passe le diamètre du cercle circonscrit mené par le troisième sommet. *(Hallowell.)*

14. — Par un point pris sur la perpendiculaire abaissée dans un triangle rectangle du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, mener une droite telle que la portion comprise entre les deux côtés de l'angle droit ait son milieu sur l'hypoténuse. *(Hallowell.)*

15. — Construire géométriquement un triangle connaissant un angle, la bissectrice et la différence entre les côtés qui comprennent l'angle donné. *(Hallowell.)*

16. — On considère un cercle D; soient AB un diamètre, AC la tangente au point A; par le centre O de D, on mène une infinité de cercles Δ tangents à AC; soit M un des

points communs à D et Δ ; la tangente en M au cercle D rencontre Δ en un point I dont on demande le lieu géométrique.
(*G. L.*)

17. — On considère un cercle Δ, et deux diamètres rectangulaires AA′, BB′ ; par le point A, on mène une transversale δ, qui rencontre la tangente en A′ au point D, et le diamètre BB′ au point E. Par le point D on peut mener au cercle une seconde tangente DK, touchant le cercle au point K; la droite AK rencontre BB′ en un point F. Trouver l'intersection de δ et de A′F quand δ tourne autour de A.
(*G. L.*)

18. — Si trois nombres entiers ont une somme égale à zéro, la somme de leurs cubes est égale à leur triple produit, et la somme de leurs cinquièmes puissances est divisible par cinq fois leur produit. (*G. L.*)

19. — On considère un cercle du centre O, et un diamètre AA′. Soit M un point mobile sur la circonférence; on fait passer par MOA un cercle Δ, par MOA′ un autre cercle Δ′. Démontrer :

1° Que ces cercles se coupent orthogonalement ;

2° Que r et r' étant leurs rayons, R le rayon du cercle donné, on a,
$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}=\frac{4}{R^2}\,;$$

3° Que la projection de la tangente commune sur la ligne des centres a une longueur constante, égale à R. (*G. L.*)

20. — On considère un cercle de centre O, un diamètre AB et la tangente Δ à l'extrémité B de ce diamètre. La tangente en un point quelconque M de la circonférence rencontre Δ en un point C, par lequel on mène une parallèle à AB jusqu'à sa rencontre avec le rayon OM. Soit I ce point de rencontre ; trouver le lieu du point I quand M parcourt la circonférence proposée. (*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,
J. KOEHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 3520-2

QUESTION D'EXAMEN

Résoudre un triangle connaissant le côté a, *l'angle* B, *et la différence* b — h = l, *entre le côté* b *et la hauteur* h *issue du sommet* A ; *discuter.*

Montrer que le problème peut être ramené à la recherche des points où le côté BA *rencontre une parabole ayant pour foyer le sommet* C *du triangle et pour directrice une parallèle au côté* BC; *discuter à nouveau le problème et comparer les résultats.* (Concours d'agrégation, 1881.)

1. — Nous allons chercher à déterminer d'abord l'angle C, puis le côté opposé.

Nous avons $h = b \sin C$.

Donc, une première équation du problème est

$$b(1 - \sin C) = l. \qquad (1)$$

D'autre part, la relation fondamentale entre les côtés et les sinus donne $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin(B + C)}$;

en éliminant b entre cette équation et la précédente, nous avons, pour déterminer C, une équation qui, mise sous forme entière, devient

$$l \sin B \cos C + (l \cos B + a \sin B) \sin C = a \sin B. \quad (2)$$

Il est facile de déterminer l'angle C satisfaisant à cette équation; pour que cet angle C ait une valeur réelle, il faut que l'on ait

$$l^2 \sin^2 B + (l \cos B + a \sin B)^2 > a^2 \sin^2 B$$

ou, en simplifiant, et remarquant que l est toujours positif,

$$l + a \sin 2B > 0.$$

Cette condition est toujours remplie lorsque l'angle B est aigu ou droit, et aussi, quel que soit cet angle, lorsque l est plus grand que a : on trouve alors deux valeurs pour l'angle C. Si a est plus grand que l, on peut trouver deux angles obtus tels que l'on ait

$$\sin 2B = -\frac{l}{a}.$$

et alors, pour ces deux valeurs de B, l'équation (2) n'est plus satisfaite que par une seule valeur de l'angle C ; les deux valeurs de B qui donnent cette solution particulière sont

$$\frac{\pi}{2} + B_1, \text{ et } \pi - B_1,$$

B étant l'angle aigu déterminé par l'équation

$$\sin 2B_1 = \frac{l}{a};$$

le problème n'a plus de solution lorsque B est compris entre les deux valeurs précédentes.

2. — La condition de possibilité que nous venons d'indiquer n'est pas suffisante; il faut en outre que le sommet A se trouve sur la partie de BA qui fait avec BC l'angle donné B, et non pas sur son prolongement. Il faut pour cela que, en calculant le côté c, nous obtenions une valeur positive pour c. Or, nous avons, pour déterminer c, l'équation

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{l}{\sin B(1 - \sin C)}. \qquad (4)$$

Si nous éliminons C entre cette équation et l'équation (2) nous aurons une équation qui nous permettra de déterminer c en fonction des données.

Or, l'équation (4) nous donne

$$\sin C = \frac{c \sin B}{l + c \sin B};$$

d'autre part l'équation (2) peut s'écrire

$$l \sin B \cos C = a \sin B(1 - \sin C) - l \cos B \sin C;$$

élevons les deux membres au carré, et remplaçons $\cos^2 C$ par $(1 - \sin^2 C)$; nous avons, en remplaçant sin C par sa valeur, chassant les dénominateurs et divisant par $l^2 \sin^2 B$:

$$(l + c \sin B)^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

Cette équation, ordonnée par rapport à c, devient

$$c^2 \cos^2 B - 2c(a \cos B + l \sin B) + a^2 - l^2 = 0. \qquad (5)$$

Si a est inférieur à l, cette équation donnera pour c deux valeurs réelles, l'une positive, l'autre négative; il y aura donc une solution, et une seule.

Lorsque a est supérieur à l, la condition de réalité des racines est

$$(a \cos B + l \sin B)^2 - a^2 \cos^2 B + l^2 \cos^2 B > 0;$$

cette condition devient

$$l^2 + al \sin 2B > 0;$$

nous retrouvons ainsi la condition déjà indiquée; enfin, si l'on a

$$l^2 + al \sin 2B = 0,$$

les deux racines sont égales.

Lorsque nous avons reconnu que les racines sont réelles, puisqu'elles sont de même signe, dans l'hypothèse où a est supérieur à l, nous aurons leur signe en prenant celui de leur somme, c'est-à-dire en considérant la quantité

$$a \cos B + l \sin B, \qquad (6)$$

le dénominateur étant essentiellement positif.

Or, si nous supposons B aigu, la quantité précédente est positive; donc, dans ce cas, il y a deux solutions.

Si B est droit, l'équation (5) tombe au premier degré, et elle a une solution, et une seule, qui est positive ou négative suivant que a est supérieur ou inférieur à l.

Enfin, dans le cas où l'angle B est obtus, nous pouvons mettre la quantité (6) sous la forme

$$\sin B\,(a \operatorname{cotg} B + l),$$

et nous voyons que si

$$\operatorname{cotg} B > -\frac{l}{a},$$

cette expression est positive; elle est négative dans le cas contraire.

Nous avons dit précédemment qu'il n'y avait aucune solution lorsque l'angle B était compris entre deux limites, données par l'équation

$$l + a \sin 2B = 0:$$

Si nous cherchons la cotangente des angles correspondants nous avons l'équation

$$\operatorname{cotg}^2 B_1 + 2\frac{a}{l} \operatorname{cotg} B_1 + 1 = 0;$$

si nous remplaçons $\operatorname{cotg} B_1$ par $\frac{l}{a}$, nous avons

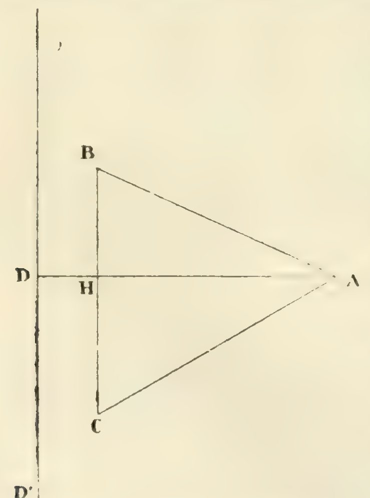
$$\frac{l^2}{a^2} - 2 + 1,$$

quantité négative; nous en concluons que

Si l'angle obtus B est inférieur à la plus petite des deux limites précédentes, les deux valeurs de C sont positives ; elles sont au contraire négatives si B est supérieur à la plus grande de ces limites.

3. — Il est facile de voir que, au point de vue géométrique, le problème revient à l'intersection d'une droite et d'une parabole. En effet, si nous prolongeons la hauteur AH d'une longueur HD égale à l, et si par le point D nous menons une droite DD' parallèle à BC, la distance AD étant égale à AC, le point A se trouve bien sur une parabole ayant le point C pour foyer et DD' pour directrice.

Cela posé, nous pouvons discuter les conditions de possibilité du problème en considérant des positions relatives de la courbe et de la droite ; nous supposerons que l'angle donné B est l'angle que fait le côté BC avec la partie de la ligne BA située à droite de BC, la directrice DD' étant à gauche de BC ; nous savons que la ligne BC rencontre la parabole au point H tel que $CH = CD = l$.

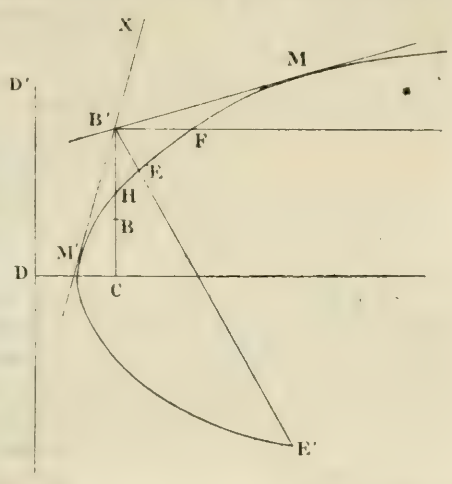


Si donc a est plus petit que l, le point B est intérieur à la courbe ; une droite quelconque, non perpendiculaire à BC, rencontre la courbe en deux points l'un à droite, l'autre à gauche de BC ; donc, il y a toujours une solution, et une seule admissible, dans ce cas, puisque la solution comptée à gauche de BC ne répond pas aux données du problème.

Si la droite est perpendiculaire à BC, le point à droite de BC s'est éloigné indéfiniment ; le point situé à gauche seul existe ; la solution correspondante n'est pas admissible.

Lorsque a est plus grand que l, le point B est extérieur à la courbe, en B' par exemple. Nous pouvons, par ce point

mener deux tangentes B'M et B'M' à la courbe ; si nous faisons tourner une droite de 0 à 180° autour du point B', nous voyons que, tant que l'angle CB'E est aigu, le côté B'E rencontre la courbe en deux points, à droite de B'C ; il y a donc deux solutions. L'un des points s'éloigne à l'infini lorsque l'angle B devient droit ; il y a donc plus qu'une solution. Le mouvement continuant, l'angle B devient obtus, et il y a d'abord deux solutions, qui se confondent en une seule lorsque l'angle donné devient égal à l'angle CB'M, formé par la première tangente avec le côté BC. Ensuite, il n'y a plus de point de rencontre, tant que la droite est comprise dans l'angle MB'X ; au delà, les points d'intersection se trouvent non plus sur la ligne elle-même, mais sur son prolongement.



Il est facile de voir que les points d'intersection se trouvant à gauche de la droite B'C ne répondent plus au problème donné, mais à cet autre problème : *Résoudre un triangle dont on connait un côté* a, *l'angle* B, *et sachant que la somme du coté* b *et de la hauteur* h *abaissée de* A *sur le côté* a *est égale à une longueur donnée* l.

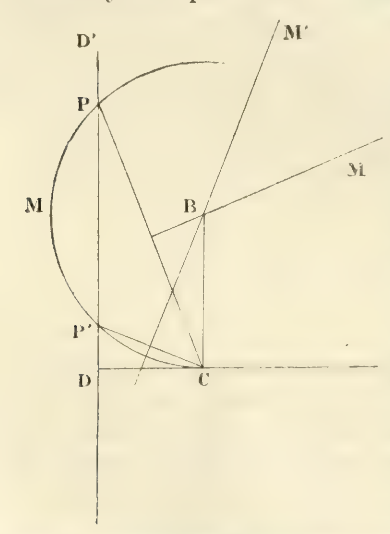
La construction ordinaire pour trouver l'intersection d'une droite et d'une parabole nous conduit aux mêmes résultats, et nous permet en outre de comparer le solution géométrique avec la solution trigonométrique du problème.

Rappelons que, pour trouver l'intersection d'une droite et d'une parobole, nous prenons d'abord le symétrique du foyer par rapport à la droite ; puis nous faisons passer par le foyer et son symétrique une circonférence, tangente à la di-

rectrice; le centre de cette circonférence qui se trouve sur la droite donnée, est le point d'intersection cherché.

Cela posé, si la droite tourne autour d'un point B, le symétrique du foyer est sur une circonférence ayant le point B pour centre, et passant par le foyer.

Pour que la droite rencontre la courbe, il faut que le foyer et son symétrique soient d'un même côté de la directrice; il est facile de voir que cette condition est toujours remplie lorsque le point B est à l'intérieur de la courbe, puisque le rayon BC de la circonférence lieu des symétriques du foyer est moindre que CD.



Lorsque le point B est à l'extérieur de la courbe, la circonférence de rayon BC coupe la directrice aux points P et P′, et lorsque le symétrique du foyer est sur l'arc PMP, la droite ne rencontre plus la parabole. Or, il est facile de voir que, pour une position quelconque, P′ par exemple, du symétrique du foyer, l'angle CBP′, compté dans le sens positif (cet angle pouvant être supérieur à deux droits) est égal au double de l'angle B, formé, dans le même sens, par la droite BA avec le côté BC.

Cela posé, on voit facilement que :

Si l'angle B est aigu, l'angle 2B étant inférieur à π, le symétrique du foyer est à droite de la parallèle BC à la directrice; il y a donc dans ce cas deux solutions:

Lorsque l'angle B est droit, l'angle 2B est égal à π; l'un des points d'intersection est rejeté à l'infini, l'autre existe à droite de B;

Si l'angle B est obtus, il faut que le symétrique du foyer par rapport à la droite ne soit pas sur l'arc PMP′; cette

condition sera remplie si la distance de ce point à la droite BC est inférieure à CD. Or, cette distance, en valeur absolue, est égale à $a \sin (2B - \pi)$;
on doit avoir $a \sin (2B - \pi) \leq l$.

Il est aisé de voir que cette condition est précisément la condition de possibilité que nous avons trouvée par la trigonométrie. La condition

$$a \sin (2B - \pi) = l$$

nous donne les deux points P et P′; nous en tirons pour la droite donnée les positions limites BM et BM′, et nous voyons que, pour les positions de la droite comprises dans l'angle MBM′, nous n'avons pas de points de rencontre.

On verrait facilement que, lorsque l'angle B est inférieur à CBM, les deux solutions conviennent au problème; tandis que si l'angle est supérieur à CBM′, en étant inférieur à π, les solutions ne conviennent pas au problème proposé.

A. M.

NOTE SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Solution par M. X. Antomari, professeur au Lycée de Carcassonne.

Notre but est de présenter la solution du problème suivant comme une application des propriétés du trinôme du second degré. Voici l'énoncé :

$A_1 A_2 \ldots A_n$ *étant* n *points donnés en ligne droite*, $m_1 m_2 \ldots m_n$ *des constantes positives ou négatives et* K *une constante, trouver le lieu géométrique des points* M *tels que*

$$m_1 \overline{MA}_1^2 + m_2 \overline{MA}_2^2 + \ldots m_n \overline{MA}_n^2 = K^2.$$

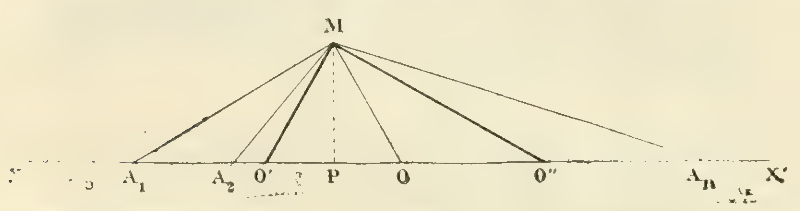
Soit XX′ la droite qui renferme les n points donnés, et soit A_0 un point pris sur cette droite. Afin d'éviter des quantités négatives, nous supposerons les points $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ à droite de A_0.

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$A_0 A_1 = a_1.\ A_0 A_2 = a_2 \ldots A_0 A_n = a_n$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 + \ldots + m_n &= S \\ m_1\, a_1 + m_2\, a_2 + \ldots + m_n\, a_n &= S_1 \\ m_1\, a_1^2 + m_2\, a_1^2 + \ldots + m_n\, a_n^2 &= S_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Soit M un point du lieu. Menons MP perpendiculaire sur



XX' et désignons A_0 P par et MP par y. Les triangles rectangles MA_1P, MA_2P. . .MA_n P donnent

$$\overline{MA}_1^2 = y^2 + (x - a_1)^2 = y^2 + x^2 - 2a_1x + a_1^2$$
$$\overline{MA}_2^2 = y^2 + (x - a_2)^2 = y^2 + x^2 - 2a_2x + a_2^2$$
$$\vdots$$
$$\overline{MA}_n^2 = y^2 + (x - a_n)^2 = y^2 + x^2 - 2a_n\, x + a_n^2\,.$$

Multipliant respectivement par m_1, m_2. . .m_n et ajoutant il vient

$$m_1\, \overline{MA}_1^2 + m_2\, \overline{MA}_2^2 + \ldots + m_n\, \overline{MA}_n^2 = S\,(y^2 + x^2) - 2S_1x + S_2.$$

On doit donc avoir pour tout point du lieu :

$$S\,(y^2 + x^2) - 2S_1\, x + S_2 = K^2$$

ou
$$Sy^2 = -Sx^2 + 2S_1\, x + S_2 + K^2. \qquad (2)$$

Considérons le trinôme du second degré

$$Sx^2 - 2S_1x + S_2 - K^2.$$

Soient x' et x'' les racines de ce trinôme égale à zéro et soit $x' > x''$. Le trinôme peut s'écrire

$$S\,(x - x')\,(x - x'') = -S\,(x - x')\,(x'' - x).$$

L'équation (2) devient alors

$$Sy^2 = S\,(x - x')\,(x'' - x)$$

ou
$$y^2 = (x - x')\,(x'' - x). \qquad (3)$$

Prenons à partir de A_0 les longueurs A_0 O' $= x'$ et A_0 O'' $= x''$. L'équation (3) montre que l'on doit avoir pour tout point du lieu $\overline{MP}^2 = O'P \times O''P.$

Le triangle MO′O″ est donc rectangle en M, et le lieu des points M coïncide avec le lieu des points d'où l'on voit O′O″ sous un angle droit. Ce lieu est donc la circonférence décrite sur O′O″ comme diamètre.

Il est facile de déterminer le centre et le rayon de cette circonférence. Le centre est le point O milieu de O′O″ : il sera donc déterminé par la longueur

$$A_0\,O = \frac{x' + x''}{2} = \frac{S_1}{S} \qquad (4)$$

Le rayon est égal à $\dfrac{O'O''}{2} = \dfrac{x'' - x'}{2}$

$$= \frac{\sqrt{S_1{}^2 - S\,(S_2 - K^2)}}{S} \qquad (5)$$

La méthode suivie se prête facilement à la discussion. Nous venons de voir en effet que le rayon est donné par la formule $$R = \frac{\sqrt{S_1{}^2 - S\,(S_2 - K^2)}}{S}.$$

Il faut donc, pour que le problème soit possible :

1° Que S soit positif. Cette condition peut toujours être supposée remplie;

2° Que l'on ait $$S_1{}^2 - SS_2 + SK^2 \geqq 0$$
ou $$K^2 \geqq \frac{SS_2 - S_1{}^2}{S}.$$

En particulier si $S = 0$, l'équation (2) donne

$$x \text{ ou } A_0P = \frac{S_2 - K^2}{2S_1}.$$

Le point P est un point fixe, et le lieu se réduit à la perpendiculaire à XX′ menée par le point P. Dans cette hypothèse, si $n = 2$ et si $m_1 = -m_2 = 1$, on a le lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante.

Les hypothèses $m_1 = m_2 = \ldots m_n$ correspondent à l'énoncé suivant : *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à* n *points fixes est constante.*

Dans ce cas on a

$$S = n \times m_1, \quad S_1 = m_1\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$
$$S_2 = m_1\,(a_1{}^2 + a^2{}_2 + \ldots + a^2{}_n).$$

La formule (4) nous donne alors

$$A_0\,O = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

La longueur de $A_0\,O$ est donc la moyenne arithmétique des distances $a_1\,a_2 \dots a_n$. Comme cas particulier remarquable, on peut examiner celui qui correspond aux hypothèses

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1,$$
$$a_1 = a, \quad a_2 = 2a \dots \quad a_n = na.$$

Les formules (4) et (5) nous donnent

$$A_0\,O = \frac{a\,(1 + 2 + \dots + n)}{n} = \frac{(n+1)\,a}{2}$$

$$R^2 = \frac{\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - n\;a^2\,(1^2 + 2^2 + \dots n^2) + n\,K^2}{n}$$

Or on sait que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On aura par suite $\quad R^2 = \dfrac{12\,K^2 - a^2\,n\,(n+1)^2}{12}.$

Le problème n'est possible que si l'on a

$$12K^2 - a^2 n\,(n+1)^2 > 0$$

Si $n = 2$ il faut que K^2 soit plus grand que $\dfrac{3a^2}{2}$,

Un certain nombre de questions relatives à la circonférence se ramènent à celle que nous venons de traiter.

Exemple : Lieu géométrique des points dont le rapport des tangentes à deux circonférences est constant. (Je crois que cette question a été donnée au concours académique à Montpellier, en 1880.)

Si R et R′ désignent les rayons des deux circonférences, t et t' les tangentes issues d'un point du lieu, d et d' les distances respectives de ce point aux centres, et enfin $\dfrac{m}{n}$ le rapport constant, on a facilement

$$\frac{t}{t'} = \frac{m}{n} \quad \frac{t^2}{t'^2} = \frac{m^2}{n^2}; \quad \frac{d^2 - R^2}{d'^2 - R'^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

et enfin $\qquad n^2d^2 - m^2d'^2 = n^2R^2 - m^2R'^2$

et la question se trouve ramenée à la précédente.

NOTE DE GEOMETRIE

Un corps est compris entre deux plans parallèles et une section faite dans ce corps par un plan parallèle aux bases, à une distance x *de la base inférieure a une aire égale à*

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \omega x^3, \qquad (1)$$

α, β, γ, ω *étant quatre valeurs constantes quelconques, c'est-à-dire indépendantes de* x. *On demande de déterminer le volume de ce corps.*

Applications. — Coupons le corps par une infinité de plans parallèles aux plans donnés et équidistants, en désignant par S_0, S_1, $S_2 \ldots$ S_n les sections obtenues, S_0 et S_n désignant les plans des bases, la hauteur h sera partagée par ces plans en n parties égales.

En vertu du principe de Cavalieri (Tout corps compris entre deux plans parallèles peut être considéré comme la somme d'une infinité de prismes ou de cylindres de hauteur infiniment petite) le volume du corps considéré sera exprimé par $V = \frac{h}{n}(S_0 + S_1 + S_2 \ldots + S_{n-1})$

ou

$$V = \frac{h}{n}\Sigma S. \qquad (2)$$

Cela posé, évaluons les sections S_0, $S_1 \ldots$

Si $x = 0$, $\quad S_0 = \alpha$

$x = \frac{h}{n}$, $\quad S_1 = \alpha + \beta\frac{h}{n} + \gamma\frac{h^2}{n^2} + \omega\frac{h^3}{n^3}$

$x = \frac{2h}{n}$, $\quad S_2 = \alpha + \beta\frac{2h}{n} + \gamma\frac{4h^3}{n^2} + \omega\frac{8h^3}{n^3}$

$x = \frac{3h}{n}$, $\quad S_3 = \alpha + \beta\frac{3h}{n} + \gamma\frac{q\,h^2}{n^2} + \omega\frac{27h^3}{n^3}$

. . .

. . .

. . .

$$x = \frac{(n-1)\,h}{n}, \quad S_{n-1} = \alpha + \beta\frac{(n-1)\,h}{n} + \gamma\,\frac{(n-1)^2\,h^2}{n} + \omega\,\frac{(n-1)^3\,h^3}{n^3};$$

dès lors
$$\Sigma S = n\alpha + \beta\frac{h}{n}\,[1 + 2 + \dots + (n-1] + \gamma\frac{h^2}{n^2}[1^2 + 2^2 + \dots (n-1)^2] + \omega\frac{h^3}{n^3}[1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1^3]$$

ou
$$\Sigma S = \quad + \beta\,\frac{h}{n}\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right] + \gamma\,\frac{h^2}{n^2}\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] + \omega\,\frac{h^3}{n^3}\,\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

Dès lors remplaçons dans (2) ΣS par sa valeur, nous avons

$$V = \frac{h}{n}\left[n\alpha + \beta\,\frac{h}{n}\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\right) + \gamma\,\frac{h^2}{n^2}\left(\frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6}\right) + \omega\,\frac{h^3}{n^3}\frac{n^2\,(n-1)^2}{4}\right]$$

$$= \alpha h + \beta\,\frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \gamma\,\frac{h^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) + \omega\,\frac{h^4}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Lorsque n croît indéfiniment, on a

$$V = \alpha h + \beta\,\frac{h^2}{2} + \gamma\,\frac{h^3}{3} + \omega\,\frac{h^4}{4}. \qquad \text{(A)}$$

Remarque. — Si l'on désigne par B, B_1 et les bases inférieures et supérieures d'un corps et par B_2 la section équidistante des bases on a

$$x = 0 \quad B = \alpha.$$
$$x = h \quad B_1 = \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \omega h^3$$
$$x = \frac{h}{2} \quad B_2 = \alpha + \beta \frac{h}{2} + \gamma \frac{h^2}{4} + \omega \frac{h^3}{8};$$

d'où $$4B_2 = 4\alpha + 2\beta h + \gamma h^2 + \frac{\omega h^3}{2};$$

par suite $$B + B_1 + 4B_2 = 6\alpha + 3\beta h + 2\gamma h^2 + \frac{3\omega h^3}{2}.$$

Par suite en multipliant par $\frac{h}{6}$ on retrouve la formule (A).

On a donc encore $$V = \frac{h}{6}(B + B_1 + 4B_2),$$
formule connue.

Sphère. — Si dans (1) l'on fait $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi R$, $\gamma = -\pi$, $\omega = 0$, cette fonction se réduit à
$$2\pi R x - \pi x^2 = \pi x(2R - x)$$
qui représente l'aire du cercle fait dans une sphère, à la hauteur x.

Dans ce cas $B = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = \pi R^2$, $h = 2R$.

Dès lors $$V = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Segment sphérique. — Faisons
$$B = 0,$$
$$B_1 = \pi h(2R - h),$$
$$B_2 = \pi\frac{h}{2}\left(2R - \frac{h}{2}\right),$$
on a $$V = \pi\frac{h^2}{6}\left(2R - h + 4R - h\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\left(3R - h\right),$$

Telle est l'expression du segment sphérique en fonction de la hauteur de la calotte et du rayon de la sphère.

Cône. — Si h est la hauteur d'un cône, R le rayon de base, le rayon R' fait à la distance x est égal à
$$R' = R - \frac{R}{h}x.$$

Dès lors $$\pi R'^2 = \pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{h}x + \frac{\pi R^2}{h^2}x^2,$$
expression à laquelle se réduit la fonction lorsque
$$\alpha = \pi R^2. \qquad (1)$$

$$\beta = -\frac{2\pi R^2}{h},$$

$$\gamma = \frac{\pi R^2}{h^2}.$$

$$\omega = 0.$$

Dès lors cône $= \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + \pi R^2\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$

De même on obtiendra facilement pour le tronc du cône

$$V = \frac{h}{6}\left(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)^2\right) = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

C. C.

QUESTION 198

Solution par M. H. Bourget, à Aix.

Par quel nombre faut-il multiplier un nombre donné pour que la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs reste la même?

Soient N le nombre donné et X le multiplicateur cherché.

Nous avons $NX = N'$;

d'où $X = \frac{N'}{N}$;

d'autre part, sachant que tout nombre est un multiple de 3 plus la somme de ses chiffres significatifs, nous pouvons poser

$$N = m.\,3 + (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n),$$

$$N' = m.\,3 + (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n);$$

mais, d'après l'énoncé,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n;$$

donc $N - N = m.\,3$;

par suite $X = 1 + \frac{m.3}{N}.$ (1)

Telle est la forme que doit prendre X; il faut prendre $m\,.\,3$ de façon qu'il soit divisible par N, puisque X doit être un nombre entier. Le problème a donc une infinité de solutions.

QUESTION 353

Solution par M. H. Bourget, élève au Collège d'Aix.

Sur la circonférence d'un demi-cercle de diamètre AA, *on donne un point* P. *On demande de mener par ce point une droite* PX, *rencontrant le diamètre en* X *de telle manière que si on élève par le point* X *l'ordonnée* XY *au cercle, perpendiculaire au diamètre* AB, *on ait*

$$PX^2 - XY^2 = d^2. \qquad \text{(Lieber.)}$$

Soit $a = OP'$, $x = P'X$ (P' est la projection de P sur AB) on trouve facilement dans la figure les valeurs PX^2 et XY^2; par suite on aura pour résoudre le problème l'équation

$$2x^2 - 2ax - d^2 = 0$$

$$x' = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2d^2}}{2};$$

d'où

$$x'' = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2d^2}}{2},$$

valeurs que l'on peut construire facilement.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Blessel, à Paris ; Perrier, Lons-le-Saunier ; Hellot, à Rouen ; La Chesnais, au lycée Saint-Louis ; Jolly, Tarbes.

QUESTION 380

On suppose que B *n'est pas carré parfait, et on propose de mettre la quantité* $z = \sqrt{A + \sqrt{B}}$ *sous la forme d'une somme de deux radicaux carrés :*

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation soit avantageuse, ce qui peut avoir lieu dans deux cas différents, savoir : 1° lorsque les quantités x *et* y *sont de la forme* $\alpha + \sqrt{\beta}$; *2° lorsque ces quantités sont des nombres rationnels.*

Je pose $\sqrt[4]{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$,
et j'élève à la quatrième puissance; j'ai alors

$$A + \sqrt{B} = (x + y)^2 + 4xy + 4(x + y)\sqrt{xy},$$

ce qui me donne les deux équations

$$(x + y)^2 + 4xy = A,$$
$$16xy\,(x + y)^2 = B.$$

Je vois que $(x + y)^2$ et $4xy$ sont les racines de l'équation

$$U^2 - AU + \frac{B}{4} = 0;$$

et comme la différence $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$ est essentiellement positive, x et y étant supposés réels, nous prendrons la plus grande racine pour $(x + y)^2$ et la plus petite pour $4xy$.

Nous aurons donc $(x + y)^2 = \dfrac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$,

$$4xy = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2};$$

ou encore, en retranchant cette dernière de la précédente,

$$(x - y)^2 = \sqrt{A^2 - B}.$$

On pourra donc avoir x et y.

Pour qu'il y ait avantage à employer cette transformation il faut ne pas avoir, pour x ou pour y, de radicaux bicarrés. Il faut donc que l'on ait

$$A^2 - B = K^2$$

en désignant par K un nombre rationnel ; alors, on aura

$$(x + y)^2 = \frac{A + K}{2},$$
$$(x - y)^2 = K.$$

Dans ce cas, x et y se présentent en général sous la forme d'une somme de deux radicaux simples. Si cependant l'un des nombres $\dfrac{A + K}{2}$ ou K est un carré parfait, l'expression devient la somme de deux radicaux du second degré portant sur une expression de la forme $\alpha + \sqrt{\beta}$.

Si enfin les deux nombres $\dfrac{A + K}{2}$ et K étaient des carrés

parfaits, l'expression prendrait la forme d'une somme de deux radicaux simples.

1° Par exemple, si l'on a

$$z = \sqrt{6 + \sqrt{20}},$$

on trouve $\quad A = 6\,; \qquad K = 4$

et par suite $\quad (x + y)^2 = 5$

$$(x - y)^2 = 4$$

Donc $$z = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2}}.$$

2° Si l'on prend $\quad z = \sqrt[4]{7 + \sqrt{48}}$

on trouve $\quad A = 7\,; \quad K = 1$

et par suite $\quad (x + y)^2 = 4$

$$(x - y)^2 = 1$$

d'où $$z = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Il serait facile de vérifier ces résultats ; en effet, prenons la première expression, par exemple ; son carré se réduit à

$$1 + \sqrt{5},$$

et en élevant encore au carré, nous trouvons

$$6 + 2\sqrt{5} = 6 + \sqrt{20},$$

ce qui est bien l'expression de z^4.

On trouverait de même, pour le carré de la seconde expression $\quad z^2 + \sqrt{3},$

dont le carré est $\quad z^4 = 7 + \sqrt{48}.$

QUESTION 381

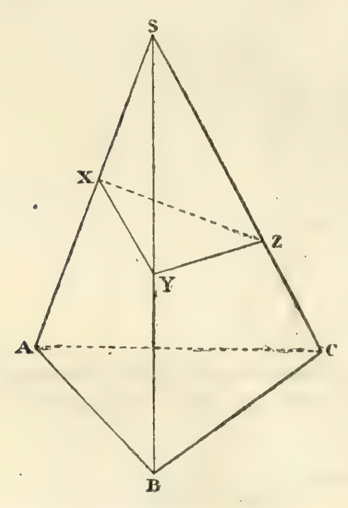
Solution par MM. Vail et E. Beudant, élèves de l'école Albert-le-Grand à Arcueil.

Soient a, b, c, *les trois arêtes du sommet d'un tétraèdre; on demande de mener un plan qui détache un tétraèdre dont le*

volume soit le $\frac{1}{8}$ *du volume du tétraèdre donné et qui coupe* SA, SB, SC *aux points* X, Y, Z, *de telle sorte que l'on ait*

$$\frac{SX}{AX} = \frac{BY}{SY} = \frac{CZ}{ZS}.$$

Soient SX $= x$, SY $= y$, SZ $= z$ et AS $= a$, BS $= b$, SC $=$ C :



on demande de mener un plan tel que l'on ait

$$\frac{SX}{AX} = \frac{BY}{SY} = \frac{CZ}{SZ}$$

ou, en remplaçant par les valeurs

$$\frac{x}{a - x} = \frac{b - y}{y} = \frac{c - z}{z},$$

d'où l'on tire

$bx + ay = ab,$

$$\text{d'où } y = \frac{ab - x\,b}{a} \qquad (\alpha)$$

$cz + az = ac,$

$$\text{d'où } z = \frac{ac - cx}{a} \qquad (\beta)$$

Or, deux tétraèdres qui ont un angle solide égal sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle.

On a donc
$$\frac{T}{\frac{1}{8}T} = \frac{abc}{xyz};$$

d'où
$$8\,xyz = abc$$

en remplaçant y et z, par leurs valeurs (α) et (β),

on a
$$8x\,\frac{(ab - bx)}{a}\;\frac{(ac - cx)}{a} = abc$$

ou en ordonnant : $8x^3 - 16ax^2 + 8a^2x - a^3 = 0$

Posons $2x = X$, l'équation précédente devient

$$X^3 - 4aX^2 + 4a^2X - a^3 = 0.$$

Si l'on fait $X = a$ dans ce polynôme, on voit qu'il s'annule ; il est donc divisible par $X - a$:

Donc $$(X - a)(X^2 - 3aX + a^2) = 0.$$

Pour que ce produit soit égal à o, il faut que $X - a = 0$ ou que $X^2 - 3aX + a^2 = 0$.

L'équation $X^2 - 3aX + a^2 = 0$ donne

$$X = \frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{5})$$

et comme $$X = 2x,$$

on a $$x = \frac{a}{4}(3 \pm \sqrt{5}).$$

Connaissant x, on tirera facilement les valeurs de y et de z.

NOTA. — Ont résolu MM. Fievet, à Lille ; Berthelot, à Châteauroux.

QUESTION 393

Solution par M. BARON, élève à Sainte-Barbe.

On considère un triangle ABC, *et sur la base* BC *de ce triangle on prend un point* M ; *par ce point on fait passer un cercle* Δ *tangent à* AB *en* B *et un autre* Δ′ *tangent à* AC *en* C.

On demande de démontrer que :

1° *Si* M *est le point de contact du cercle inscrit au triangle, les deux cercles* ΔΔ′ *ont une tangente commune parallèle à* BC *et égale à la moitié de* BC

Fig. 1.

Soient (fig. 1) les cercles BOM, COM.

Les centres de cercles seront sur KO, K′O′ perpendiculaires au milieu de BM et CM.

Bω étant bissectrice de l'angle B, les arcs BH, HM sont égaux ; donc H est sur la perpendiculaire KO et situé au milieu de Bω.

De même H′ est sur K′O′ et au milieu de ωC ; donc la parallèle HH′ à BC, égale à $\frac{1}{2}$ BC, est perpendiculaire à la fois à HO, H′O′, et par suite tangente aux deux cercles.

2° *Si* M *est le milieu de* BC, *les deux cercles sont vus du point* A *sous le même angle.*

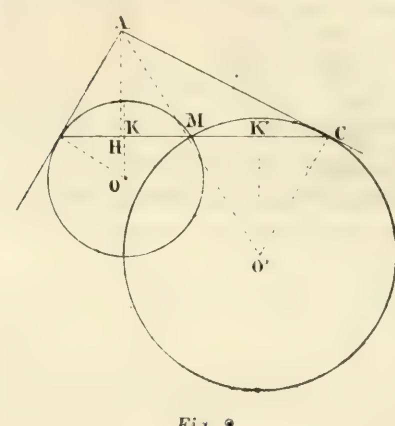


Fig. 2.

Il suffit de montrer (fig. 2) que les angles BAO, CAO′ sont égaux.

Or, les angles BOK, B sont égaux.

Les angles CO′K′, C sont égaux.

Dans les triangles rectangles ABH BOK on a

$$\frac{AB}{BO} = \frac{AH}{BK}.$$

Dans les triangles AHC, K′CO′ rectangles on a

$$\frac{AC}{CO'} = \frac{AH}{K'C}$$

Or
$$BK = K'C = \frac{1}{4} BC,$$

donc on a

$$\frac{AB}{BO} = \frac{AC}{CO'}.$$

Donc les triangles AOB, AO′C sont semblables et les angles BAO, CAO′ sont égaux.

Fig. 3

3° *Si* M *est le symétrique du pied de la hauteur par rapport au milieu de* BC, *les deux cercles ont la ligne de leurs centres paralèlle à* BC (fig. 3).

Les deux triangles ABH, BOK sont semblables (voir 2°), de même K'CO' et ACH.

On a donc $\dfrac{AH}{BK} = \dfrac{BH}{KO}$ et $\dfrac{AH}{CK'} = \dfrac{CH}{K'O'}$;

d'ailleurs $$\frac{CH}{BH} = \frac{BK}{DK'}.$$

En divisant les deux premières proportions membre à membre, on a $$\frac{CK'}{BK} = \frac{BH}{CH} \times \frac{K'O'}{KO}$$

ou $$1 = \frac{K'O'}{KO}.$$

Donc OO' est parallèle à BC et égale à sa moitié.

4° *Si le point* M *est le symétrique du pied de la bissectrice par rapport au milieu de* BC, *les deux cercles sont égaux.*

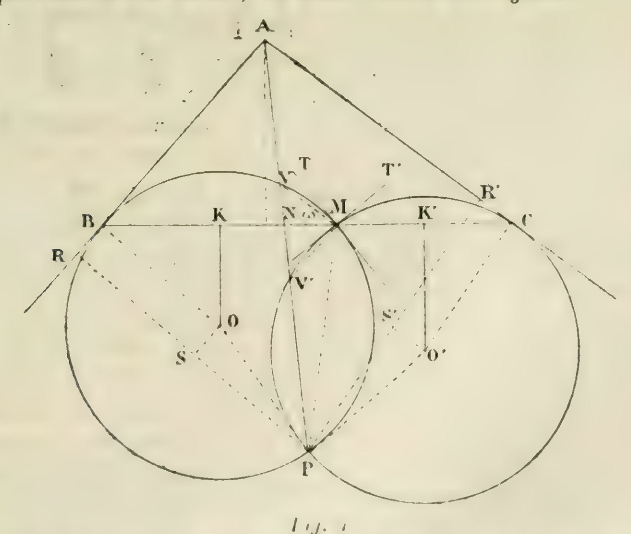


Fig. [illegible]

De la similitude des triangles ABH, BOK; ACH, CO'K'; je déduis

$$\frac{BO}{AB} = \frac{BK}{AH}, \quad \frac{O'C}{AC} = \frac{K'C}{AH},$$

$$\frac{BO}{O'C} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BK}{K'C}.$$

D'ailleurs $$\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BN} = \frac{BK}{K'C}.$$

Donc $$\frac{BO}{O'C} = 1,$$

et les deux cercles sont égaux.

Dans ce cas particulier, les deux cercles V *et* V′ *se coupent sur la bissectrice de l'angle* BAC.

Il suffit de démontrer que P est équidistant de AB et AC,

on a $$BMP = \frac{BOP}{2}.$$

$$PMC = \pi - BMP = \pi - \frac{CO'P}{2}, \quad BMC = \frac{CO'P}{2}.$$

De l'égalité de BOP, COP, il résulte que les deux triangles rectangles SOP, S′O′P ont SOP = S′O′P et OP = O′P, d on c SP = S′P et PR = R′P. Donc le point P est sur la bissectrice.

Les deux cercles se coupent sous un angle égal à l'angle BAC.

Je mène les tangentes MT, MT′; l'angle TMT′ est le supplément de la somme (B + C), donc il est égal à l'angle A.

Si par M *on mène des cordes parallèles aux côtés du triangle, savoir : dans* Δ *une corde parallèle à* AC *et dans* Δ′ *une corde parallèle à* AB, *ces cordes sont égales et leur longueur commune est* AC — AB.

Soient V, V′ les points où la bissectrice rencontre les deux cercles. Je joins MV, MV′.

Arc BRP = 2 ang BMP = A + 2C.

Arc BRP — arc BV = A,

donc arc BV = 2C,

donc l'angle VMB, qui a pour mesure $\frac{BV}{2}$, est égal à C

et VM est la parallèle à AC.

De même MV′ est parallèle à AB.

L'angle VMM′ est égal à (B + A).

L'angle MV′P a pour valeur $P - \frac{A}{2}$,

donc $MV'V = \frac{AB}{2} = MVV'$, donc VM = V′M.

D'ailleurs, on a $\frac{VM}{NC - N} = \frac{AC}{NC}$,

$$\frac{AC}{NC} = \frac{AB}{NB} = \frac{AC - AB}{NC - NB};$$

donc $VM = AC - AB$; c. q. f. d.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Pigeaud, à Châteauroux; Hoover, à Dayton (Etats-Unis).

BIBLIOGRAPHIE

Traité de Géométrie descriptive, *par M.* **Breithof**, *professeur de Geometrie descriptive à l'Université de Louvain.* — Louvain, librairie Peeters Ruelens.

L'intéressant ouvrage que nous signalons à nos lecteurs nous montre d'abord ce qu'est l'enseignement de la Géométrie descriptive en Belgique, et à ce point de vue déjà il devait appeler notre attention; mais nous devons nous hâter d'ajouter que c'est là son moindre mérite.

M. Breithof nous présente les principes fondamentaux des méthodes principales usitées en Géométrie descriptive pour l'étude et la représentation des figures de l'espace, et nous fait connaître des méthodes que nous avons toujours regretté de ne pas voir introduites dans notre enseignement secondaire, telles par exemple que les projections obliques, les projections centrales et la perspective cavalière; nous ne voyons pas de raison pour ne pas parler de ces procédés, aussi bien que de la méthode des deux plans de projection, et de celle des plans cotés, enfin introduite dans les programmes de Saint-Cyr. Cette lacune nous empêche d'analyser ici l'une des parties fort attrayantes de l'ouvrage de M. Breithof, parce que nous sommes certains que nous ne pourrions pas dans un article bibliographique être compris de nos lecteurs dans l'exposé succinct de ces méthodes, si utiles pour la pratique; nous regrettons de ne pouvoir parler de ces procédés, et nous abordons l'étude de la partie de l'ouvrage se rapportant à notre enseignement classique.

Dans la première partie, consacrée à l'étude de la ligne droite et du plan, M. Breithof examine toutes les questions relatives à ces deux figures avec un soin très minutieux, que nous considérons comme absolument nécessaire au début de l'étude de la Géométrie descriptive, si l'on veut être assuré de bien faire accepter cette science par les élèves, en leur montrant la généralité absolue des méthodes. Si nous joignons à cela que l'auteur a eu bien soin de ne développer complètement que les questions présentant une certaine difficulté, de façon à forcer les élèves au travail personnel, nous aurons montré les avantages que présente la première partie du traité de M. Breithof.

Cette première partie se termine par une étude approfondie de la méthode des projections cotées, étude faite avec le même soin qui a présidé à la rédaction de la méthode des deux plans de projection.

La seconde partie, qui s'adresse aux élèves ayant déjà étudié la Géométrie descriptive, ne possède pas de moindres qualités. L'auteur commence par

étudier au point de vue géométrique les surfaces qu'il groupe en trois classes: surfaces réglées, surfaces de révolution, surfaces du second degré; pour chaque classe, M. Breithof signale les principales surfaces utiles; puis il rappelle que certaines surfaces du second degré appartiennent à deux classes. En parlant des surfaces développables, il a eu soin de dire comment se fait le développement. Puis, l'auteur s'occupe des plans tangents, en prenant les surfaces dans le même ordre que précédemment, ce qui l'amène à parler des paraboloïdes et hyperboloïdes de raccordement, après avoir étudié les plans tangents à ces deux surfaces particulières; la considération des surfaces de révolution l'amène à étudier le plan tangent à la sphère et le plan tangent au tore; un autre chapitre est consacré à l'étude du plan tangent aux surfaces du second degré; enfin cette théorie des surfaces tangentes l'amène à l'étude du plan tangent à plusieurs surfaces, puis à l'étude des surfaces enveloppes et des surfaces canaux.

L'ouvrage se termine — pour la partie que nous avons à étudier — par l'étude très détaillée des intersections de surfaces commençant d'abord par les sections planes. Nous devons signaler principalement le chapitre où l'auteur traite d'une manière générale de l'intersection de deux surfaces, et des questions qu'entraîne cette étude.

Nous avons laissé de côté, pour la signaler maintenant, une étude qui se trouve distribuée dans l'ouvrage, de la théorie des ombres propres et des ombres portées dans les différents cas qui se présentent dans la pratique et qui se ramènent aux questions de plans tangents et d'intersections de surfaces; en outre, l'auteur aborde, toutes les fois que l'occasion s'en présente, les applications aux arts des problèmes de Géométrie descriptive.

Ce résumé très rapide des divers points abordés par M. Breithof dans son Traité de Géométrie descriptive suffira, nous l'espérons du moins, pour montrer l'intérêt que présente cet excellent ouvrage; il se rapproche beaucoup de nos programmes français, et n'en est que plus utile à consulter pour ceux qui veulent apprendre véritablement la Géométrie descriptive, et nous croyons en particulier qu'il sera fort intéressant pour les professeurs appelés à enseigner cette science.

A. M.

Le Rédacteur-Gérant,

J. KŒHLER.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 5978-2

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

LEÇON I

DROITES ET PLANS PARALLÈLES

On appelle *plan* la surface engendrée par une droite assujettie à passer par un point fixe et à rencontrer constamment une droite fixe, extérieure à ce point (*).

La droite mobile s'appelle *génératrice;* la droite fixe *directrice.*

Théorème I. — *Deux plans* P, Q *qui ont une droite commune* AB *et un point commun* O, *extérieur à cette droite, coïncident* (fig. 1).

En effet, soit M un point quelconque de P; la génératrice de P passe, à un certain moment par M, et rencontre AB en un point D.

D'autre part, la génératrice de Q occupe aussi à un certain moment la position OD, et les génératrices ayant deux points communs O et D coïncident.

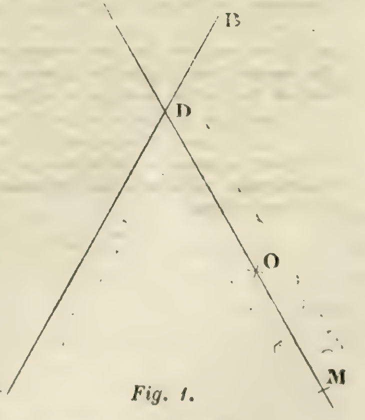


Fig. 1.

Ainsi le point M appartient au second plan Q.

Corollaire I. — *Trois points non en ligne droite déterminent un plan et un seul.*

Corollaire II. — *Deux droites qui se coupent déterminent un plan et un seul.*

(*) Cette définition, qui possède l'avantage de mettre immédiatement sous les yeux l'image de l'objet défini, est en outre conforme aux idées générales que l'on donne plus tard sur la génération des surfaces réglées.

Théorème II. — *Toute droite qui a deux points* M, M′ *dans un plan est tout entière dans ce plan* (fig. 2).

Considérons la génératrice dans les deux positions particulières OM, OM′ qui rencontrent la directrice AB en C et C′; les deux plans OAB, MBA coïncident, d'après le théorème I; or, la génératrice MC en tournant autour de M occupera dans son mouvement la position MDM′, c'est-à-dire que la droite MM′ est tout entière dans le plan OAB.

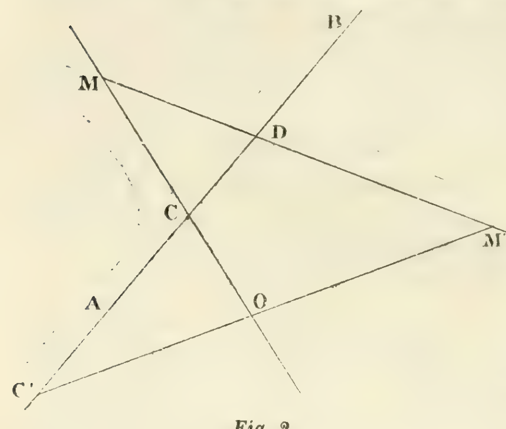


Fig. 2.

Théorème III. — *L'intersection de deux plans est une droite.*

Soient A et B deux points communs à ces plans, la droite AB étant tout entière dans chacun d'eux appartient à leur intersection; d'autre part ces deux plans ne peuvent avoir aucun point commun extérieur à cette droite, sans quoi ils coïncideraient. Donc la droite AB constitue à elle seule tous les points communs aux deux plans.

Définition. — *Deux droites de l'espace sont dites* parallèles, *lorsque, situées dans un même plan, elles ne peuvent se rencontrer.*

Il résulte immédiatement de cette définition que deux droites parallèles déterminent un plan, et que par un point donné on peut mener une parallèle à une droite donnée et une seule.

Théorème IV. — *Si deux droites sont parallèles, tout plan* P *mené par l'une d'elles* AB *ne peut rencontrer l'autre droite* A′B′.

Appelons Q le plan des deux droites parallèles, AB, A′B′

(fig. 3); si A'B', située dans le plan Q, rencontrait le plan P, ce point serait commun aux deux plans P et Q, par conséquent situé sur leur intersection AB ; ainsi A'B' rencontrerait AB, ce qui est contradictoire; donc le plan P ne peut rencontrer A'B'.

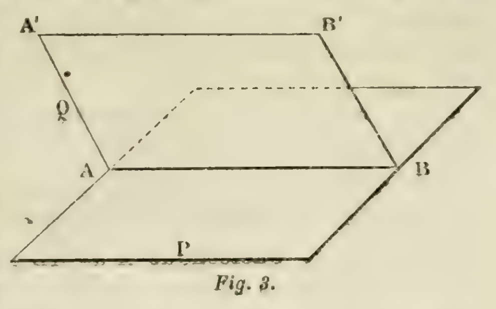


Fig. 3.

Définition. — *Une droite* A'B' *et un plan* P *qui n'ont aucun point commun sont dits* parallèles.

D'après cette définition, le théorème précédent peut être énoncé ainsi :

Toute droite A'B' *parallèle à une droite* AB *d'un plan est parallèle à ce plan.*

Théorème V. — *Si une droite* A'B' *et un plan* P *sont parallèles, tout plan* Q *mené par cette droite rencontre le premier suivant une droite parallèle à la première.*

En effet, ces deux droites sont dans le même plan Q, et elles ne peuvent se rencontrer, puisque la droite A'B' n'a aucun point commun avec le plan P, par suite aucun point commun avec AB, droite située dans ce plan P.

Théorème VI. — *L'intersection* AB *de deux plans* P *et* Q *parallèles à une droite* A'B' *est parallèle à celle-ci* (fig. 4).

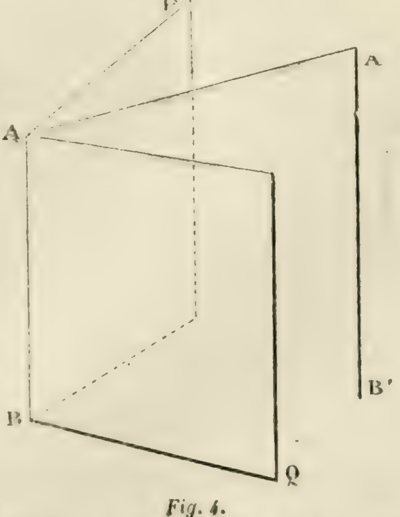


Fig. 4.

En effet, le plan mené par A'B' et le point A commun aux deux plans P et Q ren-

contre le premier plan suivant la droite passant par A et parallèle à A′B′, d'après le théorème précédent ; ce même plan rencontre donc le deuxième plan Q suivant la même droite ; par conséquent, la droite menée par A, parallèlement à A′B′, n'est autre que l'intersection des deux plans P et Q, ce qui démontre le théorème.

Théorème VII. — *Par une droite* AB *on peut mener un plan parallèle à une autre droite quelconque* CD *et un seul* (fig. 5).

Par un point quelconque A de AB menons la parallèle AE à CD ; le plan BAE est parallèle à la droite CD et c'est

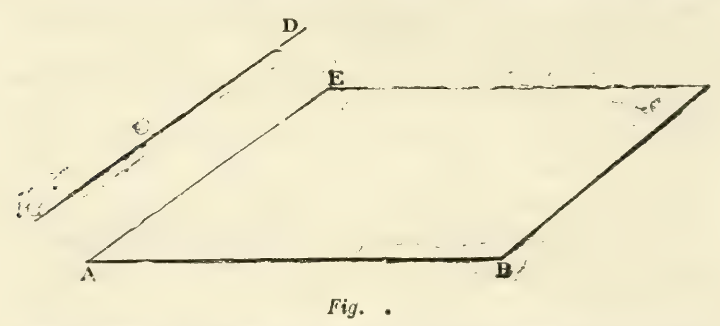


Fig. .

le seul ; car s'il existait un second plan passant par AB et parallèle à CD, l'intersection AB de ces deux plans serait, d'après le théorème précédent, parallèle à CD, ce qui est contradictoire, puisque CD est une droite quelconque par rapport à AB.

Théorème VIII. — *Deux droites* AB, A′B′ *parallèles à une troisième* CD *sont parallèles entre elles* (fig. 6).

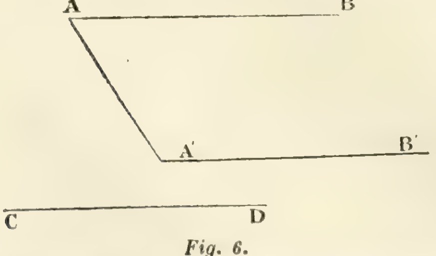


Fig. 6.

Par la droite AA′ joignant deux points quelconques de AB et A′B′ menons le plan parallèle à la droite CD, ce plan contiendra AB et A′B′; ces deux droites sont donc dans un même

plan; d'ailleurs elles ne peuvent se rencontrer puisque par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite CD.

Théorème IX. — *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles et de même sens sont égaux et leurs plans ne peuvent se rencontrer.*

Menons dans le premier plan une droite *quelconque* AC *(fig. 7)*, joignons BB′ et par A et C menons les parallèles AA′, CC′ à BB′. La figure ABA′B′ est un parallélogramme, donc AA′ est égale et parallèle à BB′; par la même raison CC′ est égale et parallèle à BB′ : donc les deux droites AA′, CC′ égales et parallèles à une troisième BB′ sont égales et parallèles; donc la figure ACC′A′ est un parallélogramme ; par suite AC, A′C′ sont égales et parallèles. De l'égalité de ces deux droites résulte celle des triangles ABC, A′B′C′ comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, donc angle ABC = angle A′B′C′.

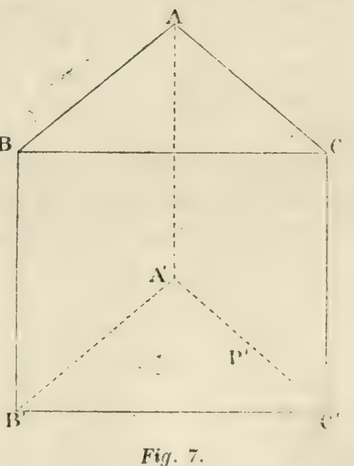


Fig. 7.

Du parallélisme des deux mêmes droites AC, A′C′, résulte que la droite *quelconque* AC du plan du premier angle est parallèle au plan du second angle; ces deux plans ne peuvent donc avoir aucun point commun.

Définition. — *Deux plans qui n'ont aucun point commun sont appelés parallèles.*

Corollaire I. — *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux, ou supplémentaires.*

Corollaire II. — *Deux droites parallèles comprises entre plans parallèles sont égales.*

Corollaire III. — *Deux droites parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles sont égales.*

Corollaire IV. — *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième* ACC'A' *sont parallèles.*

Théorème X. — *Par un point donné* B, *on peut mener un plan parallèle à un autre et un seul.*

Par le point B menons les parallèles BA, BC à deux droites quelconques B'A', B'C' qui se coupent dans le plan donné; le plan des deux droites BA, BC est parallèle au premier, d'après le théorème précédent, et c'est le seul, car s'il en existait un second, le plan BCC'B' rencontrerait celui-ci suivant une droite BC_1 parallèle à B'C', et on aurait deux droites BC, BC_1 parallèles à B'C', ce qui est contradictoire.

Théorème XI. — *Deux plans* Q, Q' *parallèles à un troisième* P *sont parallèles entre eux* (fig. 8).

Car si par une droite *quelconque* AB du premier plan, on mène un plan rencontrant le second suivant A'B' et le troisième suivant CD, les deux droites AB, A'B' sont parallèles comme parallèles à une troisième CD; donc AB est parallèle au second plan, par suite les deux plans Q, Q' ne peuvent avoir aucun point commun, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles.

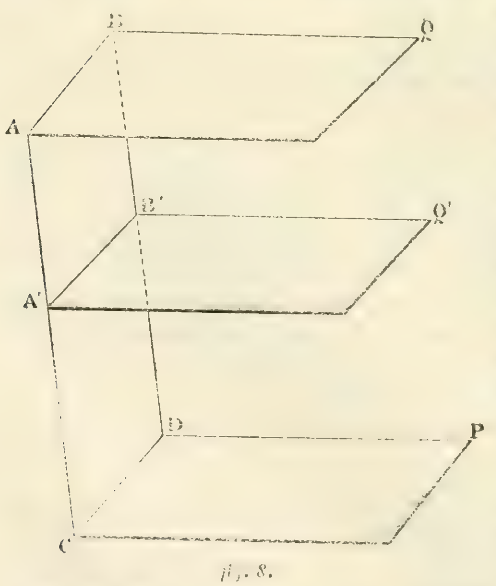


Fig. 8.

Corollaire. — *Si deux plans* Q, Q' *sont parallèles, toute droite parallèle à* Q *est aussi parallèle à* Q' *ou située dans celui-ci.*

ÉTUDE DES DIFFÉRENTES FIGURES FORMÉES PAR TROIS PLANS DISTINCTS

L'intersection de trois plans est généralement un point : car les deux premiers se coupant suivant une droite, celle-ci rencontre généralement le troisième plan en un point, qui est donc commun aux trois plans.

Il peut arriver que cette droite soit ou parallèle au troisième plan, ou tout entière dans ce troisième plan ; dans le premier cas, les trois plans se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles ; et dans le second cas, les trois plans passent par une même droite.

Enfin, si les deux premiers plans sont parallèles, le troisième plan rencontrera les deux autres suivant des droites parallèles, ou sera parallèle aux deux premiers.

(A suivre.)

NOTE SUR LA DIFFÉRENCE

ENTRE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

Par M. **Bourget.**

On déduit facilement de la théorie élémentaire des maxima et minima le théorème général suivant :

Théorème. — *La moyenne arithmétique de plusieurs quantités positives, dont deux au moins sont différentes, est toujours supérieure à leur moyenne géométrique.*

Mais on peut aussi démontrer directement ce théorème et en faire la base d'une suite de théorèmes sur les maxima et les minima. C'est ce que nous allons montrer dans cette note.

1° Soient a, b deux quantités positives différentes, on a l'identité $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$
le second membre est toujours positif; donc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ est

toujours supérieur à ab, donc

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{ab};$$

le théorème est donc vrai pour deux quantités. Si $a = b$, l'inégalité se change en égalité.

2° Supposons le théorème vrai pour $n - 1$ quantités dont deux au moins sont différentes, $a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$, je dis qu'il est vrai pour n.

Posons $\qquad S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$

et $\qquad P_{n-1} = a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$.

Par hypothèse, nous avons

$$\left(\frac{S_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} > P_{n-1}.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $S_n - S_{n-1} = a_n$, il viendra

$$(S_n - S_{n-1})\left(\frac{S_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} > P_n.$$

Posons $$\frac{S_n}{n} = x\frac{S_{n-1}}{n-1},$$

nous en déduirons

$$\frac{S_n}{nx} = \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{nx - n + 1};$$

par suite l'inégalité précédente deviendra

$$\left(\frac{S_n}{n}\right)^n \frac{nx - n + 1}{x^n} > P_n.$$

Remarquons maintenant que le polynôme

$$x^n - nx + n - 1$$

s'annule pour $x = 1$, il est donc divisible par $x - 1$; le quotient obtenu est aussi divisible par le même facteur ; on le vérifiera aisément ; donc

$$x^n - (nx - n + 1) = (x - 1)^2[x^{n-2} + 2x^{n-3} + 3x^{n-4} + \ldots + (n-2)\,x + n - 1]$$

Il résulte de là que, si x est différent de l'unité, la fraction

$$\frac{nx - n + 1}{x^n}$$

est inférieure à l'unité; donc.

$$\left(\frac{S_n}{n}\right)^n > P_n.$$

Si $x = 1$, ce qui peut arriver sans que a_1, a_2 ... a_{n-1} soient égaux entre eux, comme dans l'exemple suivant :

$$\frac{9+7+5+3}{4} = \frac{9+7+5+3+6}{5},$$

nous avons encore la même inégalité, puisque la fraction $\frac{nx-n+1}{x^n}$ se réduit à l'unité.

Si donc le théorème est vrai pour $n-1$ quantités positives dont deux au moins sont différentes, il est vrai pour n quantités. Or il est vrai pour deux, donc il l'est pour trois, quatre, etc. Donc il est général.

Les deux moyennes deviennent égales, si les n quantités sont égales.

On peut déduire de là le théorème suivant :

Théorème. — *Si* x, y, z... α, β, γ... *sont des nombres positifs quelconques rationnels, tels que les rapports*

$$\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}$$

ne soient pas tous égaux, on a l'inégalité

$$\left(\frac{x+y+z\ldots}{\alpha+\beta+\gamma\ldots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots$$

En effet : 1° les nombres α, β, γ... étant rationnels, on peut les réduire au même dénominateur et poser

$$\alpha = \frac{p}{\mu} \quad \beta = \frac{q}{\mu} \quad \gamma = \frac{r}{\mu}\ldots$$

$p, q, r\ldots \mu$ étant entiers.

2° Considérons maintenant p nombres égaux à $\frac{x}{\alpha}$, q nombres égaux à $\frac{x}{\beta}$, r nombres égaux à $\frac{z}{\gamma}$ ... et appliquons-leur le théorème précédent, nous aurons

$$\left(\frac{\frac{px}{\alpha}+\frac{qy}{\beta}+\frac{rz}{\gamma}+\ldots}{p+q+r\ldots}\right)^{p+q+r\ldots} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{p}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{q}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{r}$$

Remplaçons p, q, r ... par leurs valeurs et extrayons la racine μ des deux membres nous avons enfin

$$\left(\frac{x+y+z\ldots}{\alpha+\beta+6\ldots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma} > \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}$$

C. Q. F. D.

Dans un autre article nous ferons connaître une séric d'autres théorèmes s'appuyant encore sur le premier.

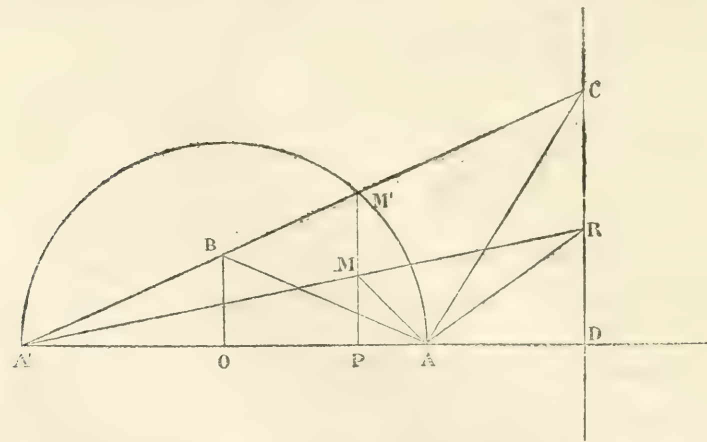
N. B. — Ces théorèmes intéressants sont dus à M. Besso (*Annuario del R. Instituto Tecnico di Roma 1879*).

(*A suivre.*)

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE POINT PAR POINT
AU MOYEN D'UNE ÉQUERRE
PAR LE PROCÉDÉ DE M. DE LONGCHAMPS

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

Soit AA' le grand axe de l'ellipse, B l'une des extrémités du petit axe ; joignons AB, élevons AC perpendiculaire sur



AB jusqu'à sa rencontre avec A'B au point C, enfin de ce point C abaissons une perpendiculaire CD sur le grand axe. La construction indiquée par M. de Longchamps (*) pour

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, t. VI. p. 49.

construire une ellipse point par point au moyen d'une équerre (les sommets seuls étant connus), est la suivante par le point A′ on mène une transversale qui rencontre CD au point R; ayant joint RA, au point A on élève à RA une perpendiculaire qui rencontre A′R au point M.

Ce point M est un point de l'ellipse et cette propriété peut se démontrer, comme nous allons l'indiquer, élémentairement.

Les triangles semblables, AOB, ACD donnent

$$\frac{AD}{CD} = \frac{b}{a},$$

a, b désignant comme toujours le grand axe et le petit axe de l'ellipse.

On a aussi, dans les triangles semblables A′CD, A′OB,

$$\frac{A'D}{CD} = \frac{a}{b}$$

et de ces deux proportions on déduit

$$\frac{AD}{A'D} = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Abaissons maintenant sur AA′ la perpendiculaire MP, les triangles semblables AMP, ARD donnent

$$\frac{MP}{AP} = \frac{AD}{DR}. \qquad (2)$$

D'autre part on a, en considérant les triangles semblables

A′MP, A′RD $$\frac{MP}{A'P} = \frac{RD}{A'D}, \qquad (3)$$

et, par suite, en multipliant (2) et (3) membre à membre,

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP \, . \, A'P} = \frac{AD}{A'D},$$

et, d'après (1), $$\frac{\overline{MP}^2}{AP \, . \, A'P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Si l'on décrit un demi-cercle sur AA′ comme diamètre et si l'on prolonge MP jusqu'à sa rencontre en M′ avec ce cercle,

on aura $$\overline{M'P}^2 = AP \, . \, A'P,$$

donc, $$\frac{MP}{M'P} = \frac{b}{a};$$

de cette proposition et d'un théorème connu on déduit que

le lieu décrit par le point M est l'ellipse dont les axes sont, en grandeur et en position, les droites OA et OB.

QUESTION 354

Solution, par M. Perrier, élève au Lycée de Lons-le-Saunier.

Mener par le point P *pris dans l'intérieur d'un cercle une corde qui soit divisée en moyenne et extrême raison pour le point* P.

Soit CD la corde demandée, AB le diamètre, on doit avoir (*).

$$\overline{PC}^2 = PD \,.\, CD = PD\,(PD + PC) = \overline{PD}^2 + PD \,.\, PC. \quad (1)$$

Posons $PB = m$, $PA = n$, $PC = x$

L'égalité (1) devient en tenant compte de la relation

$$PD \,.\, PC = m \,.\, n$$

$$x^4 - mnx^2 - m^2n^2 = 0\,;$$

d'où
$$x = \sqrt{\frac{mn\,(1 \pm \sqrt{5})}{2}}\,;$$

on prendra le signe $+$ devant $\sqrt{5}$.

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait

$$m \leq \sqrt{\frac{mn\,(1 + \sqrt{5})}{2}} \leq n$$

ou
$$m \leq \frac{n}{2}\,(1 + \sqrt{5}),\ \frac{m}{2}\,(1 + \sqrt{5}) \leq n.$$

La seconde inégalité devient

$$m \leq \frac{2n}{\sqrt{5} + 1} \quad \text{ou} \quad m \leq \frac{n}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$$

elle contient la première.

La seule condition de possibilité est donc

$$m \leq \frac{n}{2}\,(\sqrt{5} - 1).$$

La valeur de x se construit facilement.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fiévet, de Lille ; Joly, de Tarbes ; Hellot, à Rouen.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTION 362

Solution par MM. Jacquemet et Vail (École Albert-le-Grand, à Arcueil).

Deux cercles donnés se coupent en un point A; *mener par le point* A *une sécante rencontrant les deux cercles en* B *et* C *de telle manière que l'on ait* $AB \times AC = l^2$.

Soient O′ et O les deux cercles donnés et soit CB la sécante demandée.

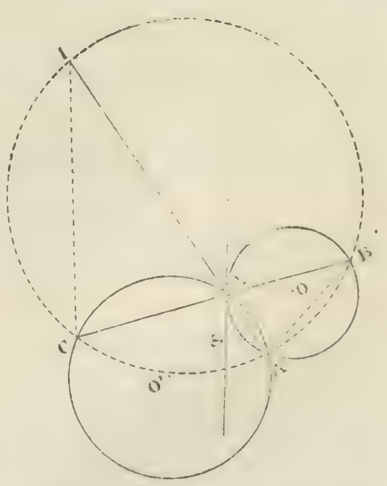
On a donc $$CB \times AB = l^2.$$

Faisons passer un cercle par A′, C et B;

on a $$A'A \times AI = CA \,.\, AB.$$

D'où $$A'A \times AI = l^2; \quad \text{ou } AI = \frac{l^2}{A'A}.$$

AI est donc une troisième proportionnelle à A′A et l, et est déterminée. Mais les angles CIA′ et CBA′ sont égaux comme ayant même mesure. Or, si l'on mène en A la tangente AT au cercle O, l'angle TAA′ = l'angle ABA′ comme ayant même mesure. Par suite TAA′ = CIA′, et CI est parallèle à TA. D'où l'on déduit la construction suivante : on prolongera A′A d'une longueur AI égale à $\frac{l^2}{A'A}$, puis par I on mènera une parallèle IC à TA tangente en A au cercle O. On détermine ainsi le point C. Joignant CA, on prolongera jusqu'en B, et la sécante CB répondra à la question.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Sauviat, du lycée de Nantes; Verdier, pensionnat de Passy.

QUESTION 363

Solution par M. Sauviat, élève au Lycée de Nantes.

On donne une corde AB. *Trouver sur le prolongement de cette corde un point* P *tel que si on mène* PH *tangente au cercle et que des points* A *et* B *on abaisse des perpendiculaires* AC *et* BD *sur la tangente* PH, *on ait*

$$AB \times BD = l^2.$$

Menons IH perpendiculaire sur AP. Les triangles HIP, BDP, ACP donnent

$$\frac{BD}{IH} = \frac{BP}{HP} \text{ et } \frac{AC}{IH} = \frac{AP}{HP}.$$

D'où, en multipliant membre à membre et remarquant que

$$AP \times PB = \overline{PH}^2,$$

$$BD \times AC = IH^2 = l^2.$$

HI étant connu, la construction est immédiate. Il y a deux solutions symétriques par rapport au milieu de AB.

QUESTION 364

Solution par M. H. Bourget, au Collège d'Aix.

On donne un demi-cercle AB *et les tangentes en* A *et* B*; par un point fixe* P, *pris sur le diamètre* AB, *on mène une droite* PQ, *qui rencontre la circonférence en* Q*; et par ce point* Q, *on mène à* PQ *la perpendiculaire* MQN *rencontrant en* M *la tangente* AM *et en* N *la tangente* BN. *Démontrer que le produit* AM . BN *reste constant quand* PQ *tourne autour du point* P.

Menons PM, PN, AQ et QB.

Les triangles MAP, PNB sont semblables comme ayant leurs côtés opposés respectivement perpendiculaires.

On a
$$\frac{AM}{AP} = \frac{PB}{NB},$$
d'où
$$AM.BN = AP.BA = \text{constante}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Fievet, à Lille ; Dupuy, à Grenoble ; Gino Loria, à Mantoue (Italie) ; Pigeaud, à Châteauroux ; Sauviat, à Nantes.

QUESTION 366

Solution par M. Goyheneix, élève au Lycée de Tarbes.

Étant donnés deux cercles et une droite, trouver sur cette droite un point P *tel que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient également inclinées sur la droite.*

Soit C′ le cercle symétrique de C par rapport à MN. Par P menons PB′ tangente à ce cercle. Les angles BPN, NPB′ sont égaux, par suite APM = NPB′. PB′ est donc le prolongement de AP et la question est ramenée à trouver la tangente commune aux cercles O et C′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Delcambre, collège Chaptal ; Baron, à Sainte-Barbe ; Verdier, à Passy ; Provost, au Mans ; Sauviat, à Nantes.

QUESTION 367

Solution par M. Goyheneix, élève au Lycée de Tarbes, et par M. W. Hoover, de Dayton (États-Unis d'Amérique).

Par le centre d'un cercle et par un point P *faire passer un cercle tel que la corde commune ait une longueur donnée.*

Soit O′ le cercle demandé. Menons OA, OB, OP, AP.

On connaît les éléments du triangle OAB. Or $\widehat{OBA} = \widehat{OPA}$. Donc pour résoudre le problème il suffit de faire en P, avec OP, un angle OPA égal à l'angle OBA. Le cercle circonscrit au triangle OAP répond à la question.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Delcambre, au collège Chaptal ; Vail, école Albert-le-Grand, à Arcueil ; Fiévet, à Lille ; Baron, à Sainte-Barbe ; Hellot, à Rouen ; Sauviat, à Nantes ; Provost, au Mans ; Pigeaud, à Châteauroux.

QUESTION 18

Solution par M. H. Bourget, à Aix.

Si trois nombres entiers ont une somme égale à zéro, la somme de leurs cubes est égale à leur triple produit, et la somme de leurs cinquièmes puissances est divisible par cinq fois leur produit.

(G. L.)

Soient A, B, C, les trois nombres donnés.

1° D'après l'hypothèse, on a identiquement :

$$A^3 + B^3 - (A + B)^3 = A^3 + B^3 + C^3,$$

ou, développant $(A + B)^3$,

$$-3AB(A + B) = A^3 + B^3 + C^3;$$

mais $(A + B) = -C;$

donc $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC,$ c. q. f. d.

2° De même on a :

$$A^5 + B^5 - (A + B)^5 = A^5 + B^5 + C^5,$$

ou, développant $(A + B)^5$ et réduisant,

$$-5AB(A^3 + B^3) - 10A^2B^2(A + B) = A^5 + B^5 + C^5;$$

mais $-(A^3 + B^3) = C^3 - 3ABC$ et $-(A + B) = C;$

donc $5AB(C^3 - 3ABC) + 10A^2B^2C = A^5 + B^5 + C^5$

ou enfin $A^5 + B^5 + C^5 = 5ABC(C^2 - AB),$ c. q. f. d.

Nota.— La même question a été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Chapon, à Châteauroux; Germain, à Belley.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Comment doit-on choisir le coefficient numérique m, pour que la division de $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ par $x + y + z$ puisse s'effectuer sans reste. Donner le quotient de cette division. *(Nancy.)*

— On a un polygone régulier ABCD... d'un nombre quelconque de côtés; on partage chaque côté dans un rapport $\frac{x}{y}$; on joint deux à deux les points de division. On demande : 1° de prouver que le polygone ainsi formé est semblable au polygone donné; 2° de trouver le rapport $\frac{x}{y}$ pour lequel l'aire de ce polygone est minima. *(Bastia.)*

— De tous les parallélipipèdes rectangles de même surface, quel est celui de volume maximum? *(Ajaccio.)*

— Étant données les distances α, β, γ des trois sommets d'un triangle rectangle au centre du cercle inscrit, trouver la relation qui lie ces trois éléments. *(Cahors.)*

— Connaissant sin a, calculer $\cos \frac{1}{7} a$. — Discuter. Appliquer au cas où $\sin a = \frac{1}{3}$. *(Bordeaux.)*

— Résoudre un triangle connaissant les angles et le périmètre $2p$; application $A = 30° 23' 20''$; $C = 128° 47' 30''$; $2p = 27063{,}05$. *(Toulouse.)*

— Deux corps pesants partent au même instant d'une hauteur h; le premier, sans vitesse initiale, suit un plan faisant avec l'horizon un angle α; le second suit un plan incliné d'un angle β et arrive en même temps que le premier; quelle est sa vitesse initiale? *(Poitiers.)*

— Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{3x}{2}. \quad \textit{(Brest.)}$$

— Un particulier prête à une compagnie 10.000 francs à intérêts composés, au taux annuel de 5 0/0, sous la condition qu'au bout de 10 ans on commencera à lui rembourser sa créance, au moyen de dix annuités égales, se succédant d'année en année, après le payement desquelles la dette se trouvera éteinte. Quel est le montant de l'annuité? *(Lille.)*

— Connaissant dans un triangle rectangle les deux segments p et q déterminés sur l'hypoténuse par la bissectrice de l'angle droit, évaluer par des formules aussi simplifiées que possible : 1° les trois côtés du triangle ; 2° la hauteur menée du sommet de l'angle droit, la bissectrice de cet angle et la tangente trigonométrique de l'angle formé par ces deux droites. *(Lille.)*

— On donne dans un triangle ABC deux côtés b et c et la médiane h issue du sommet A. Quelles sont les conditions pour que le triangle soit possible? calculer le côté c et les angles dans l'hypothèse particulière où $b = 13$, $c = 3$, $h = 7$. *(Besançon.)*

— Déterminer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant la somme a de ces deux côtés et la différence b des segments determinés sur l'hypoténuse par la hauteur; conditions de possibilité. *(Besançon.)*

— 1. Trouver le maximum de

$$3 \sin x + 4 \cos x$$

Trouver le maximum de $\frac{2ax + b}{x^2 + 1}$ lorsque a et b sont des nombres donnés; déterminer les valeurs qu'il faut donner à a et b pour que le maximum soit égal à 4 et le minimum à -1.

3. Trouver l'angle de deux droites qui rencontrent la ligne de terre en un même point.

4. Résoudre les deux équations

$$\sin x \sin y = a$$
$$\cos x \cos y = b;$$

trouver en particulier tous les angles qui répondent à la question lorsque $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$.

5. Trouver toutes les valeurs de l'arc x qui satisfont à l'égalité

$$\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

6. On donne un cercle O de rayon a, et un point A, à une distance b du centre; on demande de mener par le point A une sécante AMN, de telle manière que le rapport $\frac{AM}{AN}$ soit égal à un rapport donné. Calculer les longueurs AM, AN, et l'angle OAM.

7. On a une sphère de rayon R, traversée par un cylindre de révolution indéfini, de rayon $\frac{R}{2}$, dont l'axe passe par le centre de la sphère; on demande le volume commun au cylindre et à la sphère.

8. Trouver l'angle de deux droites dont les projections horizontales se coupent et dont les projections verticales sont parallèles.

9. Trouver l'angle de deux plans qui ont leurs traces horizontales parallèles.

10. Trouver le rayon de la sphère inscrite dans un tétraèdre régulier dont l'arête est a. *(Paris, mars 1882.)*

— 1. Une sphère massive étant donnée, trouver son rayon.

2. Etudier les variations de l'expression

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 7x + 9},$$

lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

3. Volume du segment sphérique.

4. Les trois points ABC sont en ligne droite. Sur AC, AB, BC comme diamètres on décrit des demi-circonférences et on fait tourner la figure autour de AC comme axe. Le triangle curviligne formé par les trois demi-circonférences AIC, ADB, BEC engendre un volume équivalent au volume du cylindre qui a pour base le cercle décrit par BI perpendiculaire à AC et pour hauteur $\frac{1}{2}$ AC.

Établir cette proposition et trouver le maximum du volume engendré par le triangle curviligne lorsque le point B varie de position sur AC.

(Marseille, mars 1882.)

CONCOURS

1. Soit un carré ABCD; par deux sommets opposés A et C de ce carré on mène d'un même côté par rapport au plan du carré les droites AK, CL perpendiculaires à ce plan. On prend sur AK un point A′ dont la distance au centre du carré est égale au côté du carré, et sur CL un point C′ dont la distance au point A′ est égale au double côté du carré. 1° Démontrer que la droite A′C′ est perpendiculaire au plan BDA′. 2° Former, en appelant a le côté du carré, l'expression du volume de chacun des tétraèdres A′ABD, C′CBD et C′A′BD.

2. Soient, sur une droite indéfinie, deux points fixes A et B, dont la distance est de 10 mètres. Deux mobiles parcourent cette droite dans le sens AB,

et arrivent en même temps, l'un en A avec une vitesse de 3 mètres par seconde, l'autre en B avec une vitesse de v mètres par seconde. Le mouvement du premier mobile est uniformément accéléré; sa vitesse s'accroît de 1 mètre par seconde; le mouvement du deuxième mobile est uniforme. On demande : 1° dans combien de secondes après le passage simultané du premier mobile en A et du deuxième en B le premier mobile aura rejoint le second; 2° quelle condition doit remplir la vitesse v du deuxième mobile pour que la rencontre ait lieu à une distance du point B inférieure à 10 mètres; 3° à quelle distance du point B aura lieu la rencontre, si $v = 4$ mètres.

(Concours général. Seconde, 1881.)

— 1. Mesure du temps ; jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

2. Un tronc de cône est tel que sa hauteur est moyenne proportionnelle entre les diamètres de ses deux bases. On propose : 1° de démontrer qu'on peut inscrire une sphère à ce tronc de cône ; 2° la hauteur h étant donnée, de déterminer les rayons des deux bases de manière que la surface totale du tronc de cône soit équivalente à un cercle de rayon a. — Discussion.

(Concours général Rhétorique, 1881.)

— Dans un triangle ABC dont l'angle A est connu ainsi que la direction des droites AD, AE, qui divisent cet angle en trois parties égales, on donne de plus les segments BD, CE que ces droites déterminent sur la base BC ; calculer d'après ces données les éléments du triangle, et construire ce triangle géométriquement. On examinera en particulier le cas où l'angle A est droit.

(Concours académique. Bordeaux 1872.)

— Etant donné un cercle de rayon r et sur le prolongement du diamètre BB' un point A dont la distance au centre O est d; de ce point A on mène une sécante AMM' formant un angle x avec la ligne AO ; soient p et p' les angles que les rayons OM, OM' menés aux points d'intersection M et M' forment avec le diamètre BB'. On demande : 1° de calculer $\mathrm{tg}\frac{1}{2}p$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}p'$ en fonction des données r, d, x et de discuter ces expressions ; 2° de démontrer que le produit $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,p\;\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,p'$ est constant quel que soit x; 3° de déterminer le minimum de la somme $\left(\mathrm{tg}^2\frac{p}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{p'}{2}\right)$.

(Concours académique d'Aix 1875.)

— 1. Un nombre entier positif A est égal à la puissance n^e d'un nombre premier p, multipliée par un autre nombre premier q, et la somme des diviseurs de A, différents et distincts de A, l'unité comprise, est égale au nombre A. On demande de démontrer en établissant et en discutant l'identité

$$q + 1 = p^n (p - 2q)$$

que l'un des deux facteurs premiers est égal à 2, et qu'on aura

$$A = 2^n (2^{n+1} - 1).$$

2. On donne deux trapèzes ayant leurs côtés parallèles deux à deux dans deux plans différents et qui déterminent les bases d'un solide à six faces planes dont la hauteur serait égale à la distance des deux bases. On demande l'expression du volume de ce solide. On fera voir que le produit des demi-sommes des bases par la hauteur diffère de la mesure véritable du solide de la pyramide triangulaire de même hauteur dont la base aurait pour dimensions la différence des hauteurs et la différence des bases moyennes des deux trapèzes donnés.

(Concours académique. Clermont, 1876.)

— 1. Soient deux cercles de même centre O et de rayons r et R. Soit AB une tangente fixe au plus petit cercle. D'un point quelconque C du plus grand cercle on mène à l'autre deux tangentes qui rencontrent AB aux deux points A et B ; on joint ces deux points au centre O. On demande d'exprimer au moyen de r, R et de l'angle CAB : 1° l'angle AOB ou son sinus ; 2° la surface du triangle AOB ; 3° le volume engendré par le triangle AOB tournant autour de AB.

2. En prolongeant les quatre côtés d'un rectangle jusqu'à la rencontre d'une droite donnée, on a obtenu quatre points A, B, C, D. On donne ces quatre points et on demande de rétablir la figure, sachant que le rectangle est semblable à un rectangle donné. *(Concours académique. Nancy, 1874.)*

— Calculer les angles d'un quadrilatère circonscriptible au cercle, au moyen des côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et du rayon r ; les côtés étant donnés, trouver les limites entre lesquelles r doit être compris pour que le quadrilatère soit possible, et le nombre des solutions correspondant à chaque valeur de r ; signaler les principales propriétés de la figure quand r est le plus grand possible. *(Concours académique. Nancy, 1873.)*

QUESTIONS

A L'USAGE DES CANDIDATS A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR

Trouver trois nombres sachant que la différence entre leurs différences est 5, que leur somme est 44, et que leur produit est 1950.

— Diviser 26 en trois parties telles que leurs carrés aient des différences égales, et que la somme de leurs carrés soit égale à 300.

— La somme de quatre nombres est 44 ; la somme des produits du premier par le second, et du troisième par le quatrième est 250 ; en multipliant le premier par le troisième, et le second par le quatrième, on a pour la somme des produits 234 ; enfin les produits du premier par le quatrième, et du second par le troisième ont pour somme 225. Trouver ces nombres.

— Le n^e terme d'une progression arithmétique est $\frac{3n - 1}{6}$; trouver le premier terme, la raison et la somme des n premiers termes.

— Dans une progression arithmétique, les termes de rang p, q, r, sont respectivement a, b, c ; démontrer que l'on a

$$a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0.$$

— Dans une progression géométrique décroissante, dont le premier terme est 1, on prend le premier terme et ensuite les termes de p en p ; soit P la somme de la progression ainsi formée ; soit de même Q la somme de la progession formée en prenant le premier terme et ensuite les termes de q en q. Démontrer l'égalité $P^q(Q - 1)^p = Q^p(P - 1)^q$.

— Déterminer les côtés d'un triangle, connaissant la base b, la hauteur h et la différence d des deux autres côtés.

— Déterminer les côtés d'un triangle, connaissant la somme $2s$ des deux côtés, la hauteur h abaissée du sommet sur le troisième côté, et la différence $2d$ des segments qu'elle détermine sur ce troisième côté.

— Si dans un triangle, sin A, sin B, sin C, sont en progression arithmétique, il en est de même de cotg $\frac{A}{2}$, cotg $\frac{B}{2}$, cotg $\frac{C}{2}$.

— Dans un triangle quelconque, on pose

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos A\,; \quad y + \frac{1}{y} = 2 \cos B\,;$$

démontrer que l'on a $$bx + \frac{a}{y} = c.$$

— Dans un triangle, on pose $b - a = nc$; prouver que l'on a

$$\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = n \cos \frac{C}{2}; \quad \operatorname{cotg} \frac{B - A}{2} = \frac{1 + n \cos B}{n \sin B}.$$

— r est le rayon du cercle inscrit dans un triangle dont les côtés sont a, b, c ; h, k, l sont les distances de son centre aux sommets du triangle. Démontrer que l'on a $$\frac{hkl}{r} = \frac{2abc}{a + b + c}.$$

— r est le rayon du cercle inscrit dans un triangle ABC; r_1, r_2, r_3 sont les rayons des cercles inscrits entre ce cercle et les cotés du triangle; démontrer la relation $$\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = r.$$

— Trouver le rapport de la surface d'un triangle à la surface du triangle qui a pour sommets les points de rencontre de chacune des bissectrices du triangle donné avec le côté opposé.

— Les cotés d'un triangle sont en progression arithmétique; sa surface est à celle du triangle équilatéral de même périmètre dans le rapport de 3 à 5. Trouver le rapport des côtés de ce triangle et le plus grand angle.

— On donne un cercle O et un diamètre; trouver sur ce diamètre un point M tel que la surface engendrée par la tangente menée du point M au cercle tournant autour du diamètre soit équivalent à la surface de la sphère engendrée par le cercle.

— Dans un trapèze, on donne la surface, les diagonales, et la différence des carrés des côtés opposés et l'on demande les côtés et les angles du trapèze.

— Trouver la condition pour que, α étant une racine de l'équation $x^2 + px + q = 0$, $\frac{1}{\alpha}$ soit une racine de $x^2 + p'x + q' = 0$.

— Si dans une progression arithmétique le 10e terme est moyen proportionnel entre le 4e et le 15e, le 12e terme est moyen proportionnel entre le 9e et le 16e.

— Si S_1, S_2 ... S_n, sont les sommes des n premiers termes de n progressions arithmétiques dont le premier terme est l, et dont les raisons sont respectivement 1, 2, 3 ... n, ces sommes sont aussi en progression arithmétique et leur somme est $$\frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2.$$

— Trouver l'inclinaison d'un plan de longueur l, sachant qu'un mobile partant du repos et parcourant ce plan incliné, acquiert une vitesse v à la base du plan.

— Des forces P et Q agissent en un point O; soit R leur résultante; une transversale quelconque rencontre OP en L, OQ en M, et OR en N. Démontrer la relation $$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}.$$

— Deux forces P et Q sont telles que leur résultante R est égale à P. Démontrer que, si l'on double la force P, la nouvelle résultante sera à angle droit sur Q.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Trigonométrie élémentaire, *à l'usage des aspirants au Baccalauréat ès sciences, et des candidats aux écoles du gouvernement, par* **M. Rebière,** professeur au Lycée Saint-Louis. — Paris, librairie Germer-Baillière.

Ce cours de Trigonométrie s'adresse principalement aux candidats à l'École Saint-Cyr; aussi l'auteur a-t-il eu soin de bien montrer à ces candidats que l'on interroge très fréquemment sur cette partie du programme, comment se manient les formules de trigonométrie. — Nous avons eu plaisir à lire la collection fort intéressante de problèmes qu'il a mise à la suite de chaque chapitre et de chaque livre. La plupart de ces questions proviennent d'examens, ce qui évidemment engagera les élèves à les faire pour s'exercer aux genres de problèmes que l'on peut leur demander dans leurs épreuves; elles offrent en outre un autre avantage: M. Rebière a pris surtout des questions donnant lieu à d'intéressantes transformations de formules, ou des résultats simples, qui viennent se graver dans la mémoire des élèves studieux. Enfin, cet ouvrage vient continuer l'intéressant cours de mathématiques élémentaires que publie en ce moment la librairie Germer-Baillière, et nous sommes certains que nos lecteurs tireront un réel avantage de sa lecture.

QUESTIONS PROPOSÉES

21. — On donne un cercle de centre O, un diamètre AB, et les tangentes Δ, Δ' aux extrémités de ce diamètre. Une tangente variable Δ'' au cercle rencontre Δ en C, et Δ' en D. Par le point C, on mène une parallèle à AB, parallèle qui rencontre le rayon OD en un point I dont on demande le lieu géométrique quand Δ'' roule sur le cercle O.

(G. L.)

22. — On partage une droite fixe AB en deux parties par un point mobile C; sur chacun des segments AB, BC on construit des triangles équilatéraux ADC, CEB; on demande:

1° Le lieu géométrique du milieu du côté DE du triangle CDE;

2° Le lieu de son centre de gravité;

3° Le lieu du point de concours des hauteurs;

4° Le lieu du centre du cercle circonscrit;

5° De déterminer le point C de façon que la somme des

volumes engendrés par les deux triangles tournant autour de AB soit minima.

23. — Sur une tangente à la sphère O, on prend deux points S et S′ tels que OS — OS′ = R. Ces deux points sont les sommets de deux cônes circonscrits à la sphère. Déterminer la position des points S et S′ de façon que le volume compris entre les deux cônes et la sphère soit égal à un volume donné.

24. — On donne deux triangles OAB, OCD qui ont un angle O commun. 1° Mener par les points A et B deux parallèles AE, BF qui coupent respectivement OB en E, OA en F de façon que EF soit parallèle à CD; déterminer comment varie la longueur EF lorsque la direction de CD varie. — 2° Le problème étant supposé résolu, on mène BD, qui rencontre AE en G, et AC qui rencontre BF en H; démontrer que GH est parallèle à CD; — 3° démontrer que deux parallèles à AE menées par C et D interceptent sur les deux côtés connus une droite parallèle à AB.

25. — Quatre points A, B, C, D, étant situés sur une circonférence, démontrer que la droite qui joint les milieux des arcs opposés AD, BC coupe à angle droit celle qui joint les milieux des autres arcs AB, DC. — Voir ce qui arrive si trois des points A,B,C,D, se confondent en un seul.

26. — Un quadrilatère étant donné, on propose de construire un second quadrilatère, dont les côtés soient respectivement parallèles aux côtés du premier, également distants de ceux-ci, et tels que l'aire comprise entre les périmètres des deux polygones soit équivalente à un carré donné.

27. — n étant un nombre entier, démontrer que

$(2n+1)^5 - 2n - 1$ est divisible par		240
$3^{2n+2} - 8n - 9$	—	64
$3^{2n+3} + 40n - 27$	—	64
$3^{2n+1} + 2^{2n+2}$	—	7
$3^{2n+2} + 2^{6n+1}$	—	11
$3^{4n+2} + 4^{3n+3}$	—	17
$3 . 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$	—	17

(Wolstenholme.)

28. — Déterminer x et y, d'après les équations

$$x(1 + \sin^2\theta - \cos\theta) - y\sin\theta\,(1 + \cos\theta) = c\,(1 + \cos\theta)\,;$$
$$y(1 + \cos^2\theta) - x\sin\theta\cos\theta = c\sin\theta,$$

et éliminer θ entre ces deux équations. *(Wolstenholme.)*

29. — Les diagonales $2a$ et $2b$ d'un losange sont vues sous des angles α et β d'un point dont la distance au centre est c; prouver que l'on a

$$b^2(a^2 - c^2)^2 \operatorname{tg}^2\alpha + a^2(b^2 - c^2)^2 \operatorname{tg}^2\beta = 4a^2b^2c^2.$$

(Wolstenholme.)

30. — Trois cercles A, B, C se touchent deux à deux, et une tangente commune à A et B est parallèle à une tangente commune à A et C; prouver que si a,b,c, sont les rayons, et p,q, les distances des centres de B et C au diamètre de A qui est normal aux deux tangentes parallèles, on a

$$pq = 2a^2 = 8bc.$$ *(Wolstenholme.)*

31. — Déterminer le minimum du rapport de la somme des volumes engendrés par un triangle rectangle tournant successivement autour des côtés de l'angle droit, au volume engendré en tournant autour de l'hypoténuse, en supposant que le périmètre du triangle soit constant, les côtés étant variables. *(Lauvernay.)*

32. — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$(ab' - ba')\,x^2 + 2\,(ac' - ca')\,x + (bc' - cb') = 0,$$

aient une racine commune est que l'une ou l'autre de ces équations ait ses racines égales. *(Lauvernay.)*

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 7448-2.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. LAUVERNAY, professeur au collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 73.)

LEÇON II

DU QUADRILATÈRE GAUCHE

Théorème I. — *Deux droites quelconques sont coupées par trois plans parallèles en segments proportionnels* (fig. 9).

Soient A, B, C les points de rencontre de la première droite avec chacun des trois plans; D, E, F ceux de la seconde droite

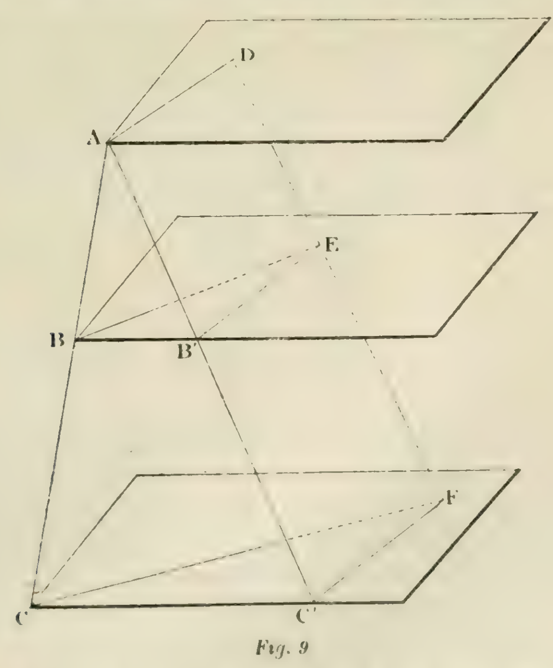


Fig. 9

avec ces mêmes plans; menons par A la parallèle AB'C' à la droite DEF. Les intersections du plan CAC' avec les

plans parallèles BB'E, CC'F étant parallèles, on a :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}.$$

Or AB' = DE et B'C' = EF, comme parallèles comprises entre plans parallèles ; donc à l'égalité précédente on peut substituer la suivante : $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Définition. — On appelle *quadrilatère gauche* tout quadrilatère ADFC dont les quatre côtés ne sont pas dans un même plan. Si l'on remarque que, dans le théorème précédent, le plan BB'E est parallèle aux deux côtés opposés AD, CF du quadrilatère gauche, ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, partage proportionnellement les deux autres côtés.

Réciproquement. — *Toute droite* BE *qui divise proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, est dans un plan parallèle à la fois aux deux autres côtés.*

En effet, par AD menons le plan parallèle à CF, et par CF menons le plan parallèle à AD ; ces deux plans sont parallèles entre eux, et si par le point B on mène le plan parallèle à ceux-ci, il rencontre DF en un point E' tel que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE'}{E'F} ;$$

or par hypothèse $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

et par comparaison $\frac{DE'}{E'F} = \frac{DE}{EF}$.

donc les deux points E, E' coïncident, c'est-à-dire que BE est dans un plan parallèle aux deux côtés opposés AD, CF.

Théorème II. — *Si une droite* BE *est assujettie à rencontrer deux droites fixes* ABC, DEF *en restant constamment parallèle à un plan donné, le lieu du point* M *de cette droite divisant le segment* BE *dans un rapport constant* K, *est une droite située dans un plan parallèle aux deux droites fixes* (fig. 10).

Soient AD, CF deux positions de la droite mobile et μ, μ' les points de ces droites tels que

$$\frac{A\mu}{D\mu} = \frac{C\mu'}{F\mu'} = K\,;$$

la droite $\mu\mu'$, qui, d'après la réciproque précédente, est dans un plan parallèle aux deux côtés opposés AC, DF, est le lieu de M.

En effet, BE, étant parallèle à un plan fixe, qui lui-même est parallèle aux deux droites AD, CF, divise les côtés opposés AC, DF en segments proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{BC}{BA} = \frac{EF}{ED}.$$

Soit H le point de rencontre des droites $B\mu$, CD ; d'après le théorème des transversales on a

$$\frac{A\mu \,.\, DH \,.\, BC}{D\mu \,.\, CH \,.\, BA} = 1.$$

relation qui peut être remplacée par la suivante :

$$\frac{C\mu' \,.\, DH \,.\, EF}{F\mu' \,.\, CH \,.\, ED} = 1$$

d'après les égalités précédentes ; donc

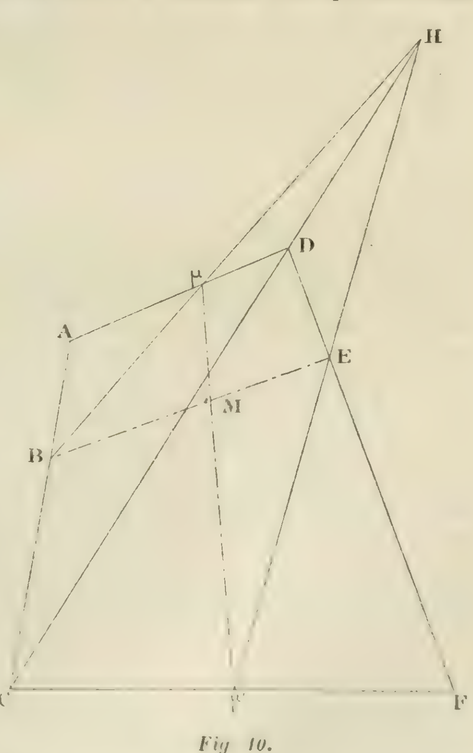


Fig 10.

les trois points μ', E, H sont en ligne droite ; les deux droites $B\mu$, $E\mu'$ étant dans un même plan, les deux autres droites $\mu\mu'$, BE de ce plan se rencontrent en un point M, et qui est tel que

$$\frac{BM}{ME} = \frac{A\mu}{\mu D} = K.$$

Donc le lieu de M est la droite $\mu\mu'$.

Corollaire I. — *Si une première droite pp' partage proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche et qu'une seconde droite* BE *partage aussi proportionnellement les deux autres côtés opposés, ces deux droites sont dans un même plan et chacune d'elles est partagée par l'autre en deux segments proportionnels aux segments des côtés qu'elle ne rencontre pas.*

Corollaire II. — *Dans tout quadrilatère gauche, les trois droites joignant les points milieux des côtés opposés et les milieux des deux diagonales concourent en un point qui est le milieu de chacune d'elles.*

LEÇON III

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

Définition. — Imaginons deux droites M, N dans l'espace, et sur chacune d'elles une direction adoptée comme *direction positive* ; si par un point O arbitrairement choisi dans l'espace on mène à ces deux directions deux demi-droites parallèles OM', ON', on peut rabattre la demi-droite OM' sur ON' par deux rotations, et ces rotations sont mesurées par deux angles dont la somme est égale à 4 droits. L'un d'eux α est donc plus petit que deux droits, et c'est cet angle α, unique et bien déterminé, qu'on nomme l'*angle des deux directions données*. On a vu, en effet, que tous les angles M'ON' qu'on pouvait ainsi former étaient égaux. Si α est égal à zéro ou à π, les deux droites sont parallèles; parallèles et de même direction si $\alpha = 0$; parallèles et de directions opposées si $\alpha = \pi$; enfin si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les directions données sont dites *rectangulaires*.

On nomme *faisceau de plans* la figure formée par plusieurs plans passant par une *même droite*, qu'on appelle *axe* du faisceau.

Lemme. — *Si l'on fait tourner un faisceau autour de l'axe de façon que l'un des plans se superpose à son prolongement, chacun des autres plans se superposera à son prolongement.*

Il suffit de démontrer cette proposition pour un faisceau de deux plans P et Q *(fig. 11)*.

Menons dans chacun de ces plans OA, OB perpendiculaires à l'axe OS, et soit M le plan de ces deux droites ; faisons tourner le faisceau autour de l'axe OS de façon que la portion de plan SOA vienne sur son prolongement: la droite OA, située dans le plan P et perpendiculaire à OS, coïncidera avec OA′ perpendiculaire à OS, c'est-à-dire avec son prolongement, et OB avec OB′; car si la portion SOB du plan Q ne venait pas sur son prolongement, elle viendrait en SOB_1 tel que l'angle BOB_1 égale deux droits, puisque cet angle est dans les mêmes conditions que l'angle AOA′ qui vaut deux droits, et on aurait deux droites OB_1, OB′, prolongements de la même droite OB, ce qui est impossible.

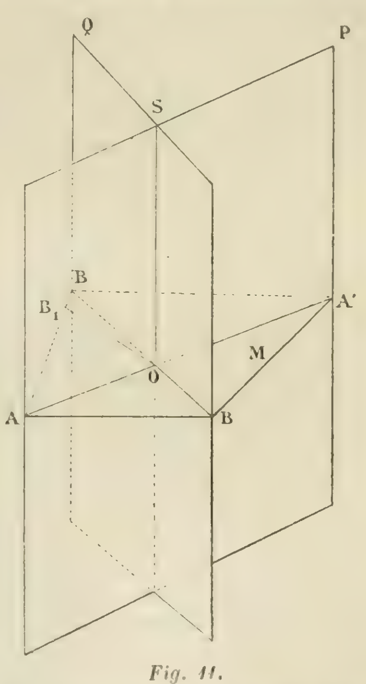


Fig. 11.

Théorème I. — *Le lieu des perpendiculaires menées d'un point* O *d'une droite* OS *sur cette droite est un plan* (fig. 12).

Par la droite OS menons deux plans quelconques, et dans chacun d'eux élevons les perpendiculaires AOA′, BOB′ sur OS; soit P le plan de ces deux perpendiculaires. Par OS menons arbitrairement un troisième plan Q, qui rencontre le plan P suivant la droite COC′ ; dans le plan Q il existe une seule droite perpendiculaire à OS et passant par O, qui est COC′.

En effet, faisons tourner le faisceau des trois plans, passant par OS, jusqu'à ce que la portion SOA du premier plan s'applique sur son prolongement; la droite OA de ce plan viendra sur son prolongement OA′; de même OB coïncidera avec OB′ ; par conséquent, après la rotation, le plan P des

deux droites OA, OB est superposé à lui-même; donc la droite OC située dans le plan P sera encore dans ce plan, et comme elle est en même temps sur le prolongement du plan Q, elle coïncidera avec OC′; or OC′ est le prolongement de OC; par suite, les angles adjacents SOC, SOC′ coïncidents sont égaux, et leurs côtés non communs étant en ligne droite, SO est perpendiculaire sur COC′.

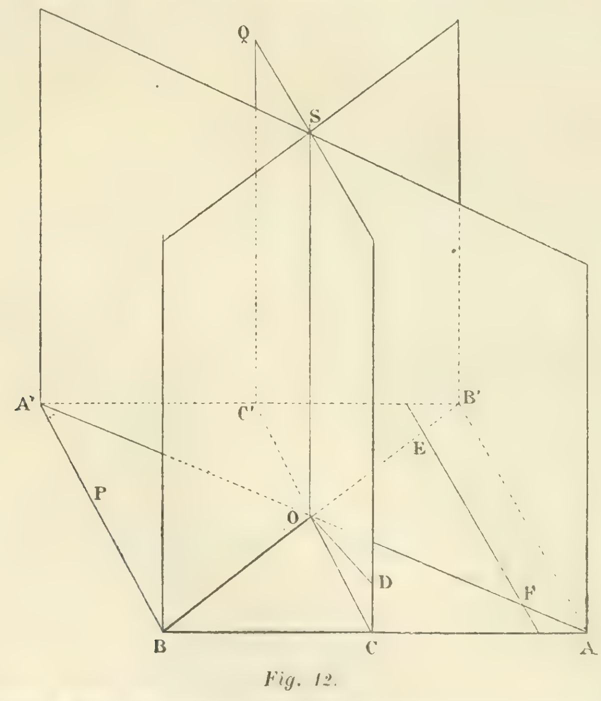


Fig. 12.

D'autre part, toute droite OD, extérieure au plan P, ne peut être perpendiculaire à SO, car le plan SOD rencontrant le plan P suivant une droite OC perpendiculaire à SO, on aurait dans un même plan SOD deux perpendiculaires passant par le point O sur une même droite OS. Donc le plan P constitue à lui seul le lieu de toutes les perpendiculaires menées par O sur la droite OS.

Corollaire I. — *Toute droite* OS *perpendiculaire à deux*

droites OA, OB *d'un plan est perpendiculaire à une droite quelconque* EF *de ce plan.*

Car, si par le point O on mène la parallèle OC à EF, cette droite située dans le plan P est perpendiculaire à SO.

Définition. — Une droite et un plan sont dits *perpendiculaires*, lorsque cette droite est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.

Corollaire II. — *Par un point d'une droite on peut mener un plan perpendiculaire à celle-ci et un seul.*

Corollaire III. — *Le lieu des points équidistants des extrémités d'une droite est le plan élevé perpendiculairement à cette droite par son milieu.*

Théorème II. — *Le lieu des perpendiculaires menées d'un point* E *extérieur à une droite* S_1O_1 *sur cette droite est un plan.*

Menons par le point O de la droite SO le plan P perpendiculaire à celle-ci, et transportons cette figure de manière que la droite SO coïncide avec la direction S_1O_1 et faisons-la glisser, SO restant en coïncidence avec S_1O_1, jusqu'à ce que le plan P passe par le point E ; ce plan occupe alors une position P_1 qui est perpendiculaire à la droite S_1O_1; d'après le corollaire I, toute droite EF menée dans ce plan P_1 est perpendiculaire à S_1O_1 ; d'autre part toute droite ED extérieure à ce plan est oblique par rapport à S_1O_1: car sa parallèle O_1D_1, qui est également intérieure à ce plan, est oblique par rapport à S_1O_1. Donc ce plan P_1 constitue à lui seul le lieu de toutes les perpendiculaires que l'on peut mener par le point E sur S_1O_1.

Corollaire I. — *Par un point* E, *extérieur à une droite, on peut mener un plan perpendiculaire à cette droite et un seul.*

Corollaire II. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles* et réciproquement.

Corollaire III. — *Toute droite* OS *perpendiculaire à deux droites quelconques* EF, EG *qui se coupent dans un plan est perpendiculaire à ce plan* (*).

(*) Pour abréger ce travail, nous omettrons les démonstrations de quelques propositions très simples et auxquelles ne touche pas particulièrement l'exposition que nous faisons ici des théorèmes du Ve livre.

Si les deux droites étaient parallèles, la propriété précédente n'aurait généralement pas lieu.

Il résulte de ce corollaire que pour démontrer la perpendicularité entre une droite et un plan, il suffit d'établir que la droite est perpendiculaire à deux droites qui se coupent situées dans ce plan, ou encore qu'elle est perpendiculaire à une droite *quelconque* de ce plan.

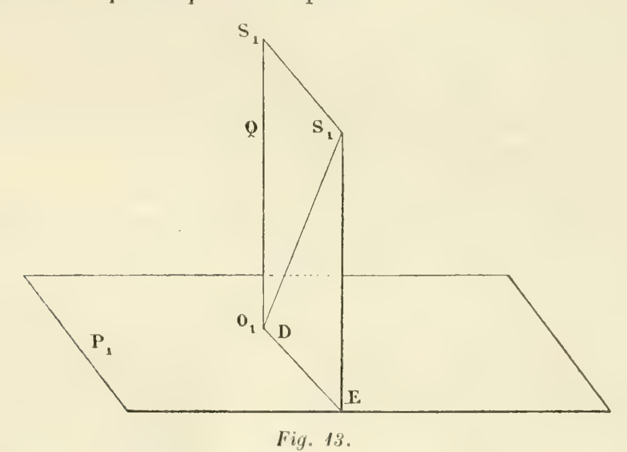


Fig. 13.

Théorème III. — *Par un point donné* O_1 *on peut mener*

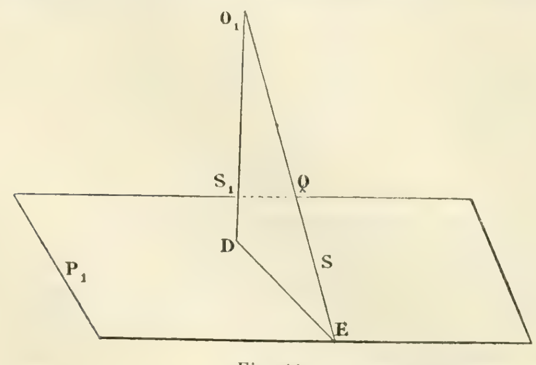


Fig. 14.

une droite perpendiculaire à un plan P_1 *et une seule* (fig. 13 et 14).

Comme précédemment, construisons le plan P perpendiculaire à la droite SO; transportons cette figure de façon que les deux plans P et P_1 coïncident, et faisons glisser P sur P_1 jusqu'à ce que SO passe par le point O_1; cette droite SO occupe alors une position S_1O_1 perpendiculaire au plan P_1 et c'est la seule; car s'il en existait une seconde O_1S', le plan Q de ces deux droites rencontrerait P_1 suivant une droite DE, à laquelle on pourrait mener dans ce même plan Q d'un même point O_1 deux perpendiculaires ce qui est impossible.

Définition. — Toute droite non perpendiculaire et non parallèle à un plan est dite *oblique* à ce plan.

Théorème IV. — *Le lieu des points équidistants de trois autres est une droite perpendiculaire au plan de ces trois points.*

Soit O le point du plan P des trois points A, B, C (*fig. 15*) également distant de ceux-ci; par O élevons la perpendiculaire OS au plan P; tout point S de cette droite appartient au lieu, car les triangles rectangles SOA, SOB, SOC sont égaux, comme ayant les côtés de l'angle droit égaux; donc SA = SB = SC. D'ailleurs tout point M extérieur à cette droite ne peut faire partie du lieu, car si l'on avait

$$MA = MB = MC,$$

le plan MOS serait à la fois perpendiculaire sur les trois droites AB, BC, CA et en leurs milieux (corollaire III du théorème I), ce qui est impossible.

Fig. 15.

Théorème V. — *Si l'on a trois obliques égales* SA, SB, SC *s'écartant également d'une droite* SO, *la droite* SO *est perpendiculaire au plan* ABC.

Soit O le point de rencontre du plan ABC avec SO, les trois triangles OSA, OSB, OSC, ayant un angle égal (savoir les

angles en S) compris entre un côté commun SO et les côtés égaux SA, SB, SC par hypothèse, sont égaux ; donc

$$OA = OB = OC.$$

Les deux points S et O étant également distants des trois points A, B, C, la droite qui les joint est le lieu des points également distants de A, B et C ; donc, d'après le théorème précédent, cette droite SO est perpendiculaire au plan des trois points A, B, C.

Corollaire. — *Le lieu des points d'un plan situés à égale distance d'un point* S *est une circonférence ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.*

THÉORÈME DES TROIS PERPENDICULAIRES

Théorème VI. — *Si du pied* O *de la perpendiculaire à un plan* P, *on abaisse la perpendiculaire* OA *sur une droite quelconque* AB *du plan toute droite joignant le pied* A *de cette seconde perpendiculaire à un point* S *de la première est perpendiculaire sur la droite* AB *du plan* (fig. 16).

En effet, la droite AB, étant située dans le plan P perpendiculaire à SO, est perpendiculaire sur SO et sur OA par hypothèse, par suite au plan SOA de ces deux droites et par conséquent sur la droite AS de ce plan.

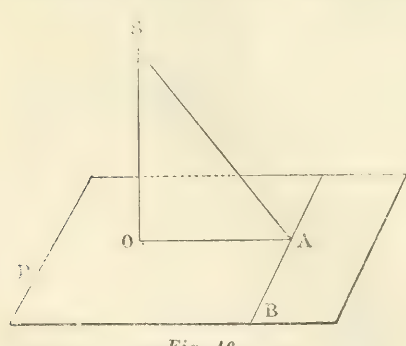


Fig. 16.

Corollaire. — *Si d'un point* S *extérieur à un plan, on abaisse la perpendiculaire* SA *sur une droite quelconque* AB *de ce plan, la droite qui joint le pied* A *au pied* O *de la perpendiculaire abaissée de* S *sur le plan est perpendiculaire sur la droite* AB *du plan.*

Théorème VII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle* L *à ce plan est perpendiculaire à la droite, et* RÉCIPROQUEMENT *toute perpendiculaire à cette droite est parallèle au plan.*

Par le pied O de la perpendiculaire OS au plan, menons la parallèle OC à la droite L; cette droite OC est située dans le plan, puisque celui-ci est parallèle à L ; donc OC étant perpendiculaire sur OS, sa parallèle L est aussi perpendiculaire sur OS. Réciproquement, soit la droite L perpendiculaire à OS; menons le plan passant par L et le pied O, il coupe le premier suivant une droite OC perpendiculaire à OS; donc les deux droites L et OC, situées dans un même plan différent du premier et perpendiculaires sur la même droite OS sont parallèles ; donc L est parallèle au premier plan.

Théorème VIII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan, et* RÉCIPROQUEMENT *deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Soit OS perpendiculaire au plan P, par conséquent à une droite quelconque EF de ce plan *(fig. 17)*, sa parallèle O'S' est aussi perpendiculaire à EF, par conséquent au plan P.

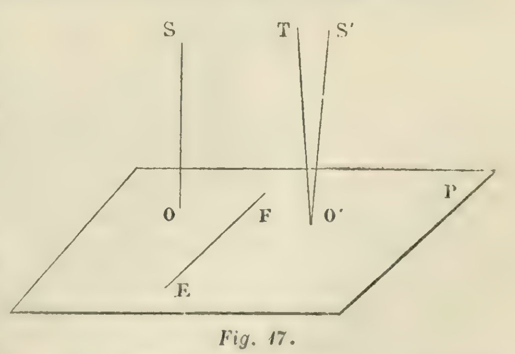


Fig. 17.

Réciproquement, les deux droites OS, O'S' perpendiculaires au même plan P sont parallèles: car s'il en était autrement, soit O'T la parallèle à OS, d'après le théorème direct, O'T serait perpendiculaire au plan P, et on aurait au point O' deux perpendiculaires O'S', O'T à un même plan P, ce qui est impossible.

(A suivre.)

NOTE

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SYMÉTRIQUES

Par M. **P. Barrieu**, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.

On sait que, si l'on désigne par S_1, S_2, S_3 ... les sommes des puissances semblables des racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$S_1 = -p$$
$$S_2 = p^2 - 2q$$
$$S_3 = -p^3 + 3pq$$
$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2$$
$$S_5 = -p^5 + 5p^3q - 5pq^2.$$

Dans ses *Questions d'algèbre* M. Desboves a appliqué ces formules à la résolution des systèmes de la forme

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^m + y^m = b \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étendre cette méthode à des cas autres que ceux traités dans cet excellent ouvrage, et de montrer par quelques exemples l'emploi qu'on en peut faire pour la résolution des équations symétriques.

M. Lauvernay, dans son *Traité d'algèbre*, a bien indiqué, d'une manière générale, la solution d'un système de deux équations symétriques dont l'une donne S_1, et l'autre S_m : il a prouvé qu'on pouvait traiter élémentairement la question, dans le cas où m ne dépasse pas 5. Nous nous proposons en outre de montrer comment on peut arriver à résoudre des systèmes de trois équations symétriques au moyen de cette méthode.

I. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + mx^2y + mxy^2 + y^3 = b \end{cases}$$

(Vacquant, *Leçons d'Algèbre*, p. 330).

Le système peut s'écrire

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 + mxy(x + y) = b \end{cases}$$

Il est évident que x et y peuvent être considérés comme racines de l'équation

$$X^2 + pX + q = o, \qquad (1)$$

à la condition de déterminer p et q de telle sorte que ces racines satisfassent aux relations

$$\begin{cases} S_1 = a & (2) \\ S_3 + mqS_1 = b & (3) \end{cases}$$

On aura donc, pour déterminer p et q, les relations

$$\begin{cases} -p = a & (4) \\ -p^3 + 3pq - mpq = b & (5) \end{cases}$$

L'équation (4) donne

$$p = -a \qquad (6)$$

et en portant cette valeur dans l'équation (5) on a

$$a^3 - 3aq + maq = b\,;$$

d'où

$$q = \frac{a^3 - b}{a(3 - m)}. \qquad (7)$$

On a donc pour déterminer x et y l'équation

$$X^2 - aX + \frac{a^3 - b}{a(3 - m)} = o.$$

II. — *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = mz \\ x^2 + y^2 = nz^2 \\ x^3 + y^3 = a^3 - z^3 \end{cases}$$

(Baccalauréat ès sciences. Montpellier 1880.)

En considérant x et y comme racines de l'équation

$$X^2 + pX + q = o, \qquad (1)$$

on a, pour déterminer p, q et z, les trois relations

$$\begin{cases} -p = mz \\ p^2 - 2q = nz^2 \\ -p^3 + 3pq = a^3 - z^3. \end{cases}$$

Les deux premières donnent

$$p = -mz, \qquad (2)$$

$$m^2z^2 - 2q = nz^2,$$

d'où

$$q = \frac{(m^2 - n)\,z^2}{2}, \qquad (3)$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$m^3z^3 - \frac{3m(m^2 - n)}{2}\,z^3 = a^3 - z^3.$$

d'où $$(2 + 3mn - m^3)z^3 = 2a^3. \qquad (4)$$

z étant fourni par cette équation, on aura x et y par l'équation $$X^2 - mzX + \frac{(m^2 - n)z^2}{2} = 0.$$

III. — *Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant son périmètre* 2p, *et sachant que la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit en tournant autour de l'hypoténuse est équivalente à l'aire d'un cercle de rayon* a.

(Bos, *Éléments d'Algèbre*, p. 342.)

Les équations du problème sont

$$\begin{cases} xy\,(x + y) = a^2z \\ x + y + z = 2p \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

En considérant x et y comme racines de l'équation :

$$X^2 + PX + Q = 0, \qquad (1)$$

nous aurons pour déterminer P, Q et z les relations

$$\begin{cases} -PQ = a^2z & (2) \\ -P + z = 2p & (3) \\ P^2 - 2Q = z^2 & (4) \end{cases}$$

L'équation (3) donne

$$P = z - 2p. \qquad (5)$$

Cette valeur portée dans l'équation (4) donne

$$(z - 2p)^2 - 2Q = z^2,$$

d'où $$Q = \frac{(z - 2p)^2 - z^2}{2} = 2p\,(p - z). \qquad (6)$$

Enfin en portant ces valeurs de P et Q dans l'équation (2) on a, pour déterminer z,

$$2p\,(2p - z)\,(p - z) = a^2z,$$

d'où $$2pz^2 - (6p^2 + a^2)\,z + 4p^3 = 0; \qquad (7)$$

z étant ainsi déterminé par l'équation (7), on aura, pour déterminer x et y, l'équation

$$X^2 + (z - 2p)X + 2p(p - z) = 0.$$

IV. — *Résoudre le système*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 21 \\ xy + xz + yz &= -2 \end{aligned}$$

(Lauvernay, *Algèbre*, p. 217.)

En considérant y et z comme les racines de l'équation

$$U^2 + pU + q = 0,$$

les coefficients p et q devront satisfaire aux équations

$$x - p = 7,$$
$$x^2 + p^2 - 2q = 21,$$
$$px + q = 2.$$

En éliminant p et q entre ces trois équations, nous déterminerons x; or nous éliminons immédiatement q en doublant la troisième équation et l'ajoutant à la seconde; nous avons ainsi

$$(x + p)^2 = 25,$$

d'où

$$px + p = \pm 5;$$

d'autre part

$$x - p = 7.$$

Donc nous avons les deux systèmes de valeurs

$$x = 6, \quad p = -1;$$
$$x = 1, \quad p = -6.$$

Nous en tirons toujours

$$q = 8.$$

Donc y et z seront les racines de l'une ou l'autre des équations

$$U^2 - U + 8 = 0,$$
$$U^2 - 6U + 8 = 0.$$

La première donne des valeurs imaginaires pour y et z: la seconde donne les valeurs 4 et 2, qui seules sont acceptables.

V. — *Éliminer* x *entre*

$$\sin x + \cos x = m, \qquad (1)$$
$$\sin^3 x + \cos^3 x = n. \qquad (2)$$

Nous joindrons à ces deux relations la relation

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad (3)$$

Cela étant, si l'on considère $\sin x$ et $\cos x$ comme racines de l'équation

$$X^2 + pX + q = 0, \qquad (4)$$

on aura, entre p, q, m, n, les trois relations

$$\left\{\begin{aligned} -p &= m \\ p^2 - 2q &= 1 \\ -p^3 + 3pq &= n \end{aligned}\right.$$

Les deux premières donnent

$$p = -m,$$
$$q = \frac{m^2 - 1}{2}$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$m^3 - \frac{3m(m^2 - 1)}{2} = n;$$

d'où $$m^3 - 3m + 2n = 0.$$

C'est la relation demandée.

Ces exemples suffiront à bien faire comprendre la méthode. Elle consiste dans la substitution des inconnues p et q aux inconnues x et y. Son principal avantage réside dans l'abaissement immédiat du degré par rapport à q, ce qui simplifie notablement les équations et permet d'éviter les artifices de calcul exigés par la méthode ordinaire.

QUESTION 2

Solution par M. L. GERMAIN, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

Démontrer que le polynôme

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)\, x^n + (p - 1)\, x^{n-1} + (p - 1)\, x^{n-2} + \ldots + (p - 1)\, x + p$$

est exactement divisible par $x^2 - (p + 1)\, x + p$.

(G. de Longchamps.)

Je remarque d'abord que le polynôme donné peut se mettre sous forme finie. En effet, on peut écrire

$$A = (nx^{n+1} - (1 + np)\, x^n + (p - 1)\, x\, (x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1) + p. \qquad (1)$$

Or $(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)$ n'étant autre chose que le quotient de $x^{n-1} - 1$ par $x - 1$, l'égalité ci-dessus devient

$$A = nx^{n+1} - (1 + np)\, x^n + (p - 1)\, x \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + p. \qquad (2)$$

Je remarque, en second lieu, que le diviseur donné $x^2 - (p + 1)\, x + p$ est le produit de $(x - p)$ par $(x - 1)$, p et 1 étant les racines du trinôme $x^2 - (p + 1)\, x + p$ égalé à zéro.

Ceci posé, le polynôme A, mis sous la forme (2), est divisible par $x - p$, puisqu'il s'annule pour $x = p$. Remplaçant en effet x par p, on a

$$A = np^{n+1} - (1 + np)\,p^n + \frac{(p-1)\,p\,(p^{n-1} - 1)}{p-1} + p$$

ou $A = np^{n+1} - np^{n+1} - p^n + p^n - p + p = 0.$

Le polynôme A, mis sous la forme (I), est divisible par $x - 1$, puisqu'il s'annule pour $x = 1$.

Remplaçant en effet x par 1, on a

$$A = n - 1 - np + (p - 1)(n - 1) + p = 0.$$

Le polynôme A, étant divisible par $x - p$ et $x - 1$, est divisible par leur produit $(x - p)(x - 1)$, c'est-à-dire par le trinôme $x^2 - (p + 1)\,x + p$:

c. q. f. d.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Bourget, à Aix; Masserand, à Passy; Blessel, à Paris; Godefroy, à Lyon; Euverte, au lycée Louis-le-Grand, à Paris; Berthelot, à Châteauroux.

QUESTION 4

Solution par M. Sarrazin, à l'Institution Sainte-Marie, à Besançon

Démontrer que si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

L'équation $x^2 + px + q = 0$

donne $$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Puisque les racines de cette équation sont réelles, on a

$$p^2 \geq 4q. \qquad (m)$$

L'équation

$$x^2 + px + q + (x + a)(2x + p)$$

donne $$x = \frac{-(p + a) \pm \sqrt{p^2 - ap + a^2 - 3q}}{3}.$$

équation qui donnera pour x des valeurs réelles si

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0. \qquad (n)$$

De l'inégalité (m) on tire pour valeur maximum de q :

$q = \frac{p^2}{4}$, valeur essentiellement positive ; si donc, en remplaçant q par $\frac{p^2}{4}$ dans l'inégalité (n), cette inégalité est satisfaite, il sera *a fortiori* vrai de dire, quelle que soit d'ailleurs la valeur de q, que

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0,$$

c'est-à-dire que l'équation proposée a ses valeurs réelles.

En remplaçant q par $\frac{p^2}{4}$ dans l'inégalité (n) elle devient

$$p^2 - 4ap + 4a^2 \geq 0$$

ou

$$(p - 2a)^2 \geq 0,$$

inégalité qui est toujours satisfaite, puisqu'un carré est toujours positif.

Par suite l'inégalité

$$p^2 - ap + a^2 - 3q \geq 0$$

est toujours satisfaite; donc l'équation proposée a ses racines réelles, quelle que soit la valeur de a.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Millischer (Institution Sainte-Marie), à Besançon ; Puig, à Montpellier ; Savey, à Belley ; Godefroy, à Lyon ; Bourget à Aix ; Fiévet à Lille ; Euverte, au lycée Louis-le-Grand, à Paris ; Vazon, au collège Rollin.

QUESTION 9

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

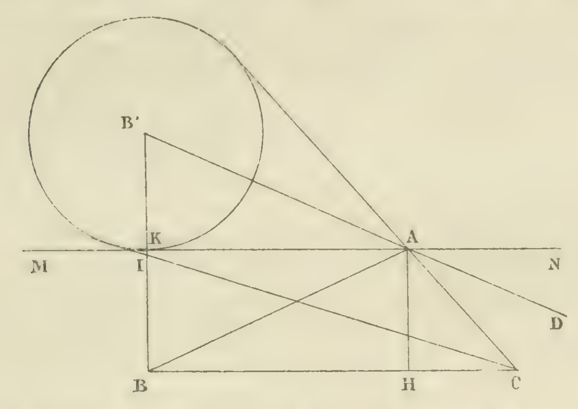
Construire géométriquement un triangle dont on connaît la base, la hauteur, et sachant que l'un des angles à la base est double de l'autre.

Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle dont on connaît la base BC, la hauteur AH, et dont l'angle ACB est double de l'angle ABC.

Le sommet A du triangle est situé sur une parallèle MN à BC, menée à une distance AH; l'angle NAC est égal au double de l'angle MAB; donc le problème est ramené au problème connu suivant :

Étant donnés une droite MN *et deux points* B C *du même côté, trouver sur cette droite un point* A *tel que l'angle* NAC *soit le double de l'angle* MAB.

Pour cela, on prend le point B′ symétrique du point B par rapport à MN; et de ce point comme centre, avec BK



comme rayon, on décrit une circonférence à laquelle on mène une tangente par le point C; le point A où elle coupe MN est le point qui répond à la question.

Donc en joignant les points B et C au point A on a le triangle ABC.

Par le point C on peut mener une autre tangente qui coupe MN au point I; le point I répond aussi à la question proposée dans le problème auxiliaire, mais ne répond pas à la condition exigée par le triangle.

Il n'y a donc qu'une solution.

Nota. — La même question a été résolue par M. Deville, à Lorient.

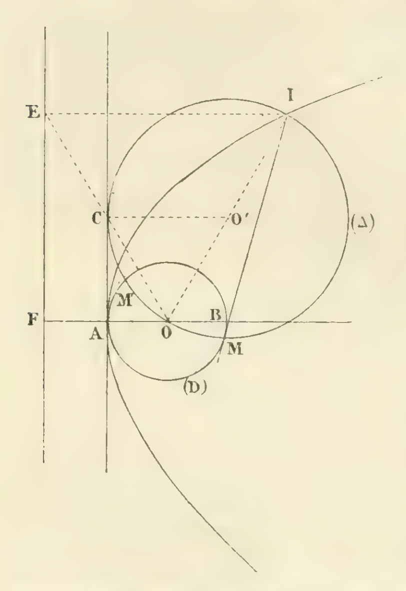
QUESTION 16

Solution par M. H. Bourget, à Aix.

On considère un cercle D *: soient* AB *un diamètre,* AC *la tangente au point* A *: par le centre* O *de* D*, on mène une infinité de cercles* Δ *tangents à* AC*; soit* M *un des points communs à*

D *et* Δ; *la tangente en* M *au cercle* D *rencontre* Δ *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

Tirons OI; cette ligne passe évidemment au point O′, puisque le triangle OIM est rectangle; des points O′ et I abaissons sur AC des perpendiculaires; soit C le pied de la perpendiculaire abaissée du point O′. Menons OC et prolongeons cette ligne jusqu'en F à la rencontre de la perpendiculaire abaissée du point I.



Il est aisé de voir que les triangles OO′C, OIE sont semblables : or

$$O'C = OO';$$

donc $OI = EI = 2OO'$.

Par suite le lieu géométrique du point I est une parabole ayant pour directrice une parallèle à AC menée par E et pour foyer le point O.

On voit que le sommet est en A et que le demi-paramètre $FO = 2AO$.

Remarques. — 1° Le lieu du centre O′ est une parabole confocale à la première.

2° Si, au lieu de M, on avait pris M′, le second point d'intersection, le lieu eût été la même parabole.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Finat, à Moulins; Germain, à Belley; R. et P. Godefroy, à Lyon; Puig, à Montpellier; Pigeaud, à Châteauroux; Quintard, à Arbois.

DIPLOME D'ÉTUDES DES REALSCHÜLEN

1. La somme des termes d'une proportion continue est 39; la somme de leurs carrés est 741. Quelle est la proportion ?

2. De quel point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle faut-il abaisser des perpendiculaires sur les deux autres côtés pour que le rectangle ainsi formé donne, en tournant autour d'un des côtés du triangle, le cylindre du plus grand volume possible?

3. Dans une ellipse $a^2 = 3b^2$; deux diamètres conjugués se rencontrent sous un angle de 120°. Quels angles forment-ils avec le grand axe?

4. Quelle est l'inclinaison d'un plan, si une sphère met quatre fois plus de temps à le parcourir qu'elle n'en mettrait à tomber de sa hauteur h?

(Berlin, 1876.)

— 1. Partager le nombre 23 en trois parties, de telle façon que 3 fois la première, 8 fois la deuxième et 11 fois la troisième fassent une somme égale à 200.

2. Circonscrire à un cône droit ayant le rayon r, et la hauteur h, un autre cône, de telle façon que le sommet du premier soit le centre de la base du deuxième, la base du premier une section circulaire du deuxième, et le volume du second un minimum. Quel est ce volume?

3. Une pyramide régulière à base hexagonale a un volume $v = 2400$; l'arête latérale $s = 22$; calculer la hauteur et l'arête de base.

4. Résoudre le système

$$x + y = 9u$$
$$x^2 + y^2 = 82u$$
$$x^3 + y^3 = 378u$$

5. Trouver le centre de gravité d'un segment de cercle, également pesant en tous ses points, dont le rayon et l'angle au centre sont respectivement

$$r = 12, \qquad \alpha = 60°.$$

6. Résoudre les équations

$$x + y = 4; \quad u + v = 10; \quad x^2 + u^2 = 130; \quad y^2v^2 = 54.$$

7. La surface d'un triangle isoscèle est 42; le rayon du cercle inscrit est $\frac{14}{3}$; calculer la valeur de chaque côté.

8. On donne un triangle isoscèle. Une parabole est située dans son plan de telle façon que son axe est sur la médiane relative à la base, qu'elle passe par les extrémités de la base, et qu'elle partage le triangle en deux parties égales. Où se trouve le sommet, et quel est le paramètre de cette courbe? Quelle est l'équation d'une tangente à la courbe passant par un sommet du triangle?

9. Une pyramide régulière à base carrée est circonscrite à une sphère de rayon r; la hauteur de la pyramide est égale à la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Trouver le volume et la surface de la pyramide, ainsi que l'angle dièdre de deux faces latérales.

10. On superpose les plans de deux ellipses égales, de façon que le centre de chacune d'elles tombe sur l'un des foyers de l'autre. Déterminer l'angle sous lequel elles se coupent. Appliquer la formule à deux cercles.

11. De combien de minutes le dernier rayon du soleil couchant sous la latitude géographique φ disparait-il plus tard au sommet d'une montagne dont l'altitude est h, qu'il ne le fait au pied de cette montagne sur le rivage et au niveau de la mer? On supposera que le jour de l'expérience la déclinaison du soleil est d et son rayon apparent ρ. Appliquer la formule trouvée au cas où $h = 3710$ m., $\varphi = 28° 7'$, $\delta = 23° 27'$, $\rho = 34' 54''$.

12. Quel doit être, dans un ellipsoïde de révolution, le rapport de l'axe au diamètre équatorial, pour que le cylindre inscrit dont la section méridienne est un carré, soit la plus grande partie possible du volume de l'ellipsoïde.

13. La spirale d'Archimède est engendrée par un point qui pendant que le rayon r tourne d'une vitesse angulaire uniforme, s'avance uniformément sur ce rayon, en partant du centre, de sorte que le premier tour achevé, il arrive à l'extrémité de r, et continue ensuite à s'avancer uniformément sur le prolongement de ce rayon.

1° Quelle est l'étendue de la surface comprise entre la première spire et la position primitive du rayon r?

2° Quelle est l'étendue de la surface qui s'ajoute au second tour?

3° Quelle est la longueur de la $(k + 1)^e$ spire?

14. Un corps parcourt un plan incliné d'une longueur $a = 0^m,8$ et d'une inclinaison $\alpha = 10°$, puis il parcourt encore une distance $s = 1^m,52$, sur un plan horizontal de même matière et de même nature, jusqu'à ce que le frottement arrête son mouvement. Déterminer le coefficient de frottement.

(*Berlin*, *1880*.)

ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

1881

Énoncer et démontrer la règle à suivre pour extraire la racine m^e d'un polynôme.

Application. — Extraction de la racine cubique de

$$8a^6 - 48a^5b + 120a^4b^2 - 160a^3b^3 + 120a^2b^4 - 48ab^5 + 8b^6.$$

— Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre $2p$ et la surface m^2.

— Les quotients d'un nombre N par a, b, c, sont premiers entre eux: démontrer que N est le plus petit commun multiple de a, b, c.

— Déterminer l'angle C d'un triangle sphérique à l'aide des formules.

$$\text{cotg}\, c \sin b = \frac{\sin (C + \varphi)}{\cos \varphi} \text{cotg}\, A;$$

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{\cos b}{\text{cotg}\, A}$$

si $a = 70° 48' 20''$, $b = 116° 44' 48''$, $A = 59° 51' 22''$.

— Dans le plan d'une hyperbole donnée se meut une droite qui reste à une distante constante du centre. — Des points d'intersection de la droite et de la courbe on mène à cette courbe des tangentes qui se coupent en M. Lieu des points M.

— Résoudre $\sin x + \sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

1882.

Deux trains vont en sens inverse l'un de l'autre, le premier avec une vitesse de 18 kilom. à l'heure, l'autre avec une vitesse de 24 kilom. Un voyageur placé dans le premier observe qu'il a fallu 13'' au second pour passer. Quelle était la longueur du train.

— Deux courriers partent d'un même point: le premier qui a a jours d'avance marche avec une vitesse V, l'autre marche avec une vitesse V' le premier jour, V' — r le second jour, V' — $2r$ le troisième jour ... Après combien de temps vont-ils se rencontrer? Discussion.

— Trouver les arcs satisfaisant à

$$\text{tg } x \text{ cotg } 2x = \text{tg } 2x \text{ cotg } x.$$

— Mesure de la surface d'un triangle, d'un polygone sphérique.

— On donne un cercle dans lequel on mène deux cordes parallèles AB, CD, l'une AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre CD égale au côté de l'hexagone. Exprimer la surface de cercle comprise entre ces droites AB, CD.

QUESTIONS PROPOSÉES

33. — Trouver les côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; que si l'on augmente chaque côté de 50 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 17 mètres, et que si chaque côté croît de 60 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 20 mètres. *(The Educat. Times.)*

34. — Par un point P, pris sur le prolongement de la base BC d'un triangle ABC, mener une sécante rencontrant AC en Q et AB en R, de telle façon que le produit AR $\times$ CQ soit minimum. *(The Educat. Times.)*

35. — Soit K le point de rencontre des hauteurs d'un triangle, P un point du cercle circonscrit; la ligne PK rencontre en Q la droite de Simson relative au point P; démontrer que si le point P se déplace sur la circonférence, le lieu du point Q est le cercle des neufs points du triangle.

(The Educat. Times.)

36. — On considère deux droites rectangulaires AB, AC, et au point A on mène un cercle Δ tangent à la droite AB. Soit D le second point de rencontre de Δ avec AC; si, par un point fixe P de AB, on mène une tangente à Δ, cette

droite rencontre la parallèle à AB, menée par le point D, en un point I dont on demande le lieu géométrique quand on fait varier le cercle Δ. (*G. L.*)

37. — On considère une droite AB, et par deux points fixes A et B pris sur cette droite, on mène des cercles tangents à cette droite et tangents entre eux. A ces cercles, on mène une tangente commune extérieure; trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de cette tangente commune. (*G. L.*)

38. — On considère un cercle de centre O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD; soit Δ la tangente au point A et M un point quelconque de Δ, supposé mobile sur cette droite; de ce point M on peut mener au cercle proposé une seconde tangente MQ. Ayant projeté le point M en P sur le diamètre CD, on joint P au point de contact Q, et d'un point fixe S, pris dans l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur PQ. Démontrer que le lieu des pieds de ces perpendiculaires est un cercle. (*G. L.*)

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que la solution de chaque question doit être mise sur une feuille à part portant le numéro de la question, le nom de l'auteur de la solution, l'établissement auquel il appartient et l'énoncé complet de la question. Les figures, s'il y a lieu, doivent être faites à part, avec beaucoup de soin ; enfin, nous prions nos correspondants de soigner la rédaction et l'écriture de leurs solutions.

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 9820-2.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite*, voir p. 97.)

DES PROJECTIONS — PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES

Définition. — On appelle *projection* d'un point A sur un plan le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan, et *distance* du point A au plan la longueur A*a* de

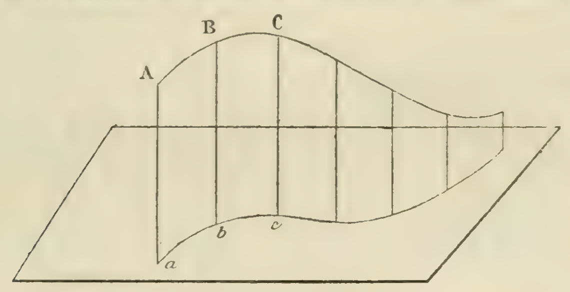


Fig. 18.

cette perpendiculaire. Cette distance est plus petite que toute longueur comptée à partir de A sur une droite quelconque limitée au plan.

On appelle *projection* d'une ligne quelconque ABC... sur un plan le lieu des projections *a*, *b*, *c*... des points de cette ligne (*fig. 18*).

Théorème I. — *La projection d'une droite sur un plan est une droite.*

Soient *a*, *b* (*fig. 19*) les projections de deux points A, B de la droite ; menons la droite *ab* ; si par C on mène la parallèle C*c* à B*b*, cette droite est située dans le plan des deux parallèles

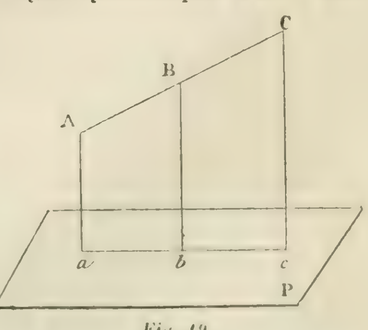


Fig. 19

Aa, Bb et est perpendiculaire au plan P comme parallèle à Bb. Donc c est la projection de C.

Théorème II. — *Les projections des deux droites parallèles sur un même plan sont parallèles* (fig. 20).

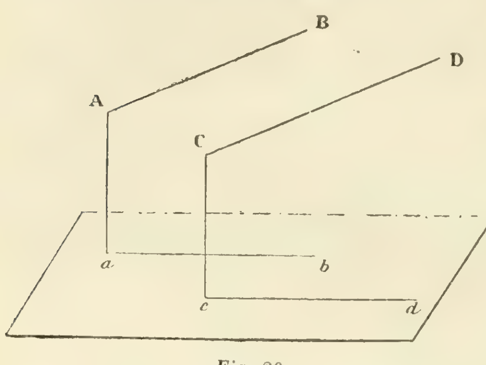


Fig. 20.

En effet, les angles BAa, DCc ayant leurs côtés parallèles, savoir AB et CD par hypothèse, et Aa, Bb comme perpendiculaires au même plan, ont leurs plans parallèles ; donc leurs intersections ab, cd avec un même plan sont parallèles.

La réciproque n'a pas lieu.

Théorème III. — *Si les projections de deux droites sur*

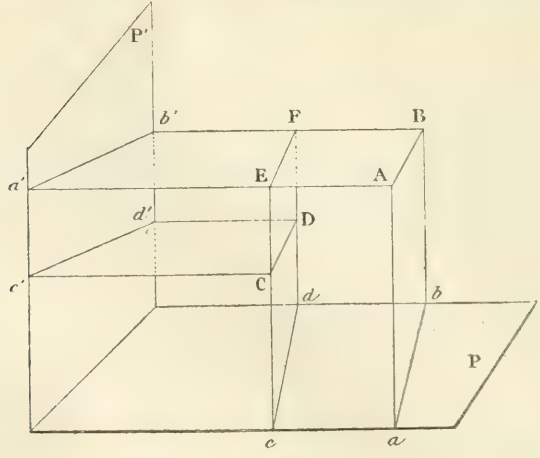


Fig. 21.

deux plans qui se coupent sont respectivement parallèles, ces deux droites sont parallèles (fig. 21).

Soient *ab cd*, projections des deux droites AB, CD sur le plan P, parallèles entre elles, de même *a'b'*, *c'd'* parallèles; les deux angles *b'a'*A, *d'c'*C, ayant leurs côtés parallèles, ont leurs plans parallèles; donc les droites d'intersection CD, EF de ces plans avec un troisième CD*dc* sont parallèles; on démontrerait de même que AB et EF sont parallèles : donc les deux droites AB, CB parallèles à une troisième EF sont parallèles entre elles.

Théorème IV — *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *sa projection* ab *sur un plan quelconque* Q *est perpendiculaire à l'intersection* CD *des deux plans* (fig 22).

En effet CD étant dans le plan P est perpendiculaire à AB; étant dans le plan Q, elle est aussi perpendiculaire à B*b*, projetante du point B; donc CD est perpendiculaire au plan AB*b* de ces deux droites, et par suite à la droite *ab* de ce plan.

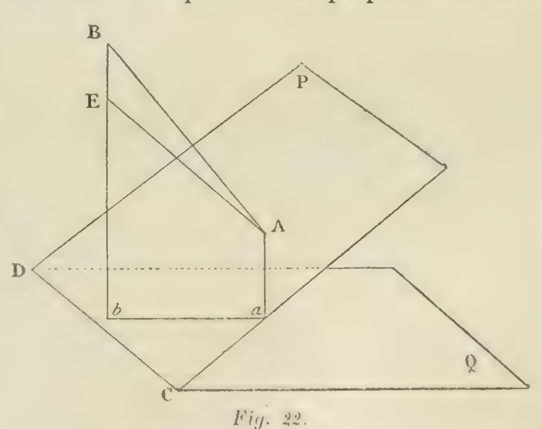


Fig. 22.

La réciproque n'a pas lieu, car toute droite telle que AE menée dans le plan AB*ba* a même projection *ab* que AB et ne saurait être perpendiculaire au plan P.

Théorème V. — *Si les projections d'une droite sur deux plans qui se coupent sont respectivement perpendiculaires aux intersections de ceux-ci avec un troisième plan, cette droite est perpendiculaire à ce troisième plan.*

Soit *ab*, projection de AB, perpendiculaire à CD, intersection du plan P avec le plan CDD' (*fig. 23*), de même *a'b'* perpendiculaire à CD'; CD étant perpendiculaire sur *ab* par hypothèse et sur A*a* par construction, est perpendi-

culaire au plan Aab de ces deux droites, par conséquent sur AB qui est dans ce plan; ainsi AB est perpendiculaire sur CD; on démontrerait de même que AB est perpendiculaire à CD′; donc AB, perpendiculaire à deux droites CD, CD′ d'un plan, est perpendiculaire à ce plan.

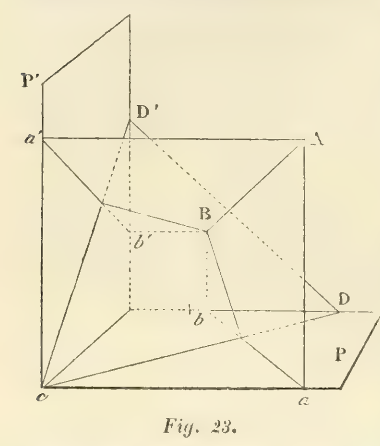


Fig. 23.

Théorème VI. — *Si une droite est oblique à un plan* P, *l'angle aigu qu'elle forme avec sa projection sur le plan est le plus petit des angles qu'elle fait avec toute autre droite passant par son pied dans le plan* (fig. 24).

En effet, soit Ba la projection de BA; prenons sur la droite quelconque BC, située dans le plan P, la longueur BC = Ba et menons AC; les deux triangles ABa, ABC ont deux côtés égaux et les troisièmes côtés inégaux; or la perpendiculaire Aa est moindre que l'oblique AC, donc l'angle ABa est moindre que l'angle ABC.

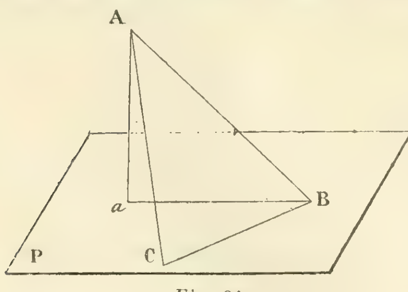


Fig. 24.

Définition. — Cet angle *minimum* que fait une droite avec sa projection sur un plan est appelé l'*angle de la droite et du plan.*

Théorème VII. — *La droite d'un plan qui fait le plus grand angle possible avec un second plan est perpendiculaire à l'intersection des deux plans.*

Soit BC l'intersection de deux plans P et Q *(fig. 25)*; menons dans le second plan AB perpendiculaire à l'intersection et une droite quelconque AC, puis la perpendiculaire Aa au plan P; aB est perpendiculaire sur BC, d'après le

corollaire du théorème des trois perpendiculaires; donc elle est moindre que l'oblique aC. Faisons tourner le triangle

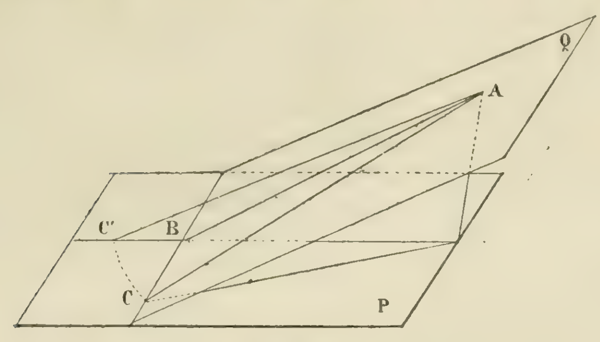


Fig. 25.

rectangle AaC autour de Aa pour l'amener dans le plan du triangle rectangle AaB ; aC prendra la direction de aB et C viendra en un point C′ situé au delà de B par rapport au point a, puisque $a\text{C} > a\text{B}$; or l'angle aBA extérieur au triangle ABC′ est égal à la somme des deux angles BC′A, BAC′; donc l'angle a BAest supérieur à l'angle C′ ou à son égal aCA.

Définition. — La droite AB perpendiculaire à BC, est appelée *ligne de plus grande pente du plan* Q *par rapport au plan* P.

Théorème VIII. — *Étant données deux droites* AB, CD *non situées dans le même plan, il existe une droite et une seule rencontrant chacune d'elles à angle droit et qui est la plus courte distance de ces deux droites* (fig. 26).

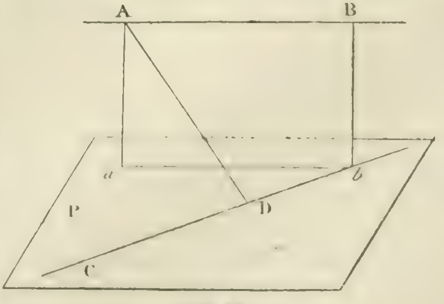


Fig. 26.

Par l'une des droites CD, menons le plan parallèle à AB ; soit P ce plan : d'un point quelconque A de la première abais-

sons la perpendiculaire A*a* sur ce plan et par *a* menons la parallèle *ab* à AB. Cette droite est située dans le plan P et rencontre CD en un point *b*, par lequel on mène la parallèle *b*B à *a*A. Cette droite *b*B, qui rencontre les deux premières, est en outre perpendiculaire à chacune d'elles, comme parallèle à *a*A perpendiculaire au plan P, par suite à CD et *ab* ou à sa parallèle AB. Toute autre droite AB rencontrant les deux premières ne peut être perpendiculaire au plan P, et par suite aux droites CD, AB, puisqu'elle est distincte de B*b* ou de A*a*; et d'autre part l'oblique AD est supérieure à A*a* ou à son égale B*b*.

Définition. — Cette droite B*b* perpendiculaire à chacune des droites proposées, les rencontrant et qui est celle de longueur minima parmi toutes celles que l'on peut mener entre ces deux droites, est appelée la *perpendiculaire commune* aux deux droites, et sa longueur représente la plus courte distance des deux droites.

Corollaire. — *Lorsqu'une droite* AB *est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan* P *qui ne lui sont pas parallèles est constante et représentée par la distance* Aa *d'un point quelconque de cette droite au plan* P.

ANGLES DIÈDRES

Définitions.— On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux plans limités à leur intersection OC; ces deux plans sont appelés les *faces* du dièdre et leur intersection OC *arête* de l'angle dièdre.

Pour désigner un dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; mais si plusieurs dièdres ont même arête, pour désigner chaque dièdre, on emploie au moins quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux pour l'arête, en ayant soin d'énoncer ces dernières entre les deux autres.

On nomme *dièdres adjacents* deux angles dièdres tels que AOCD, BOCD qui ont même arête OC, une face commune COD et les deux autres faces situées de part et d'autre de a face commune.

Deux dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre.

Théorème I. — *Par l'arête d'un dièdre, on peut mener un plan et un seul formant deux angles dièdres adjacents égaux* (fig. 27).

Soit le dièdre AOCB; imaginons un plan passant par l'arête OC qui, superposé d'abord à la face AOCA′, tourne autour de OC dans le sens de la flèche jusqu'à ce qu'il se superpose à la face BOCB′; ce plan engendre ainsi deux séries de dièdres, tels que AOCD, BOCD; les dièdres de la première série vont constamment en croissant de zéro au

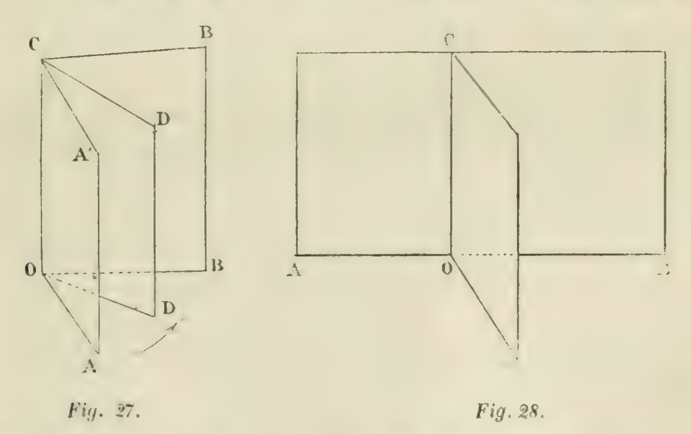


Fig. 27.

Fig. 28.

dièdre AOCB, tandis que ceux de la seconde série vont constamment en décroissant du dièdre BOCA à zéro, par conséquent entre les mêmes limites; donc pour une certaine position de ce plan et une seule les deux dièdres adjacents formés avec les faces du premier sont égaux.

Définition. — Le plan qui, mené par l'arête d'un dièdre, divise celui-ci en deux autres égaux entre eux, est appelé *plan bissecteur* du dièdre.

Corollaire. — *Par une droite* OC *d'un plan on peut mener un plan et un seul formant deux angles dièdres adjacents* AOCD, BOCD *égaux* (fig. 28).

Définitions. — Un plan OCD est dit *perpendiculaire* sur

un autre ABC lorsque les deux angles adjacents AOCD, BOCD qu'il forme avec celui-ci sont égaux; si ces deux angles adjacents sont inégaux, les deux plans sont dits *obliques* l'un par rapport à l'autre.

On nomme *dièdre droit* tout dièdre AOCD dont une face est perpendiculaire sur l'autre. Un dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à un dièdre droit.

Deux dièdres dont la somme est un dièdre droit sont dits *complémentaires*, et deux dièdres dont la somme vaut deux dièdres droits sont dits *supplémentaires*.

Les théorèmes qui suivent, analogues à ceux de la géométrie plane, se démontrent de la même manière que ceux-ci.

Tous les angles dièdres droits sont égaux.

Tout plan qui en rencontre un autre forme avec celui-ci deux dièdres adjacents supplémentaires, et réciproquement, si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, les faces non communes sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux. Les plans bissecteurs de deux dièdres supplémentaires sont perpendiculaires entre eux.

Théorème II. — *Deux plans parallèles rencontrent un dièdre suivant des angles rectilignes égaux.*

En effet, ces angles rectilignes sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens, d'après ce théorème que les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.

Théorème III. — *L'angle déterminé par un plan perpendiculaire à l'arête d'un dièdre est le plus grand parmi tous angles rectilignes déterminés par les plans sécants rencontrant les deux faces du dièdre du même côté par rapport à ce plan perpendiculaire à l'arête.*

On distingue deux cas, suivant que le plan perpendiculaire à l'arête détermine un angle obtus ou aigu.

1° Soit aOb l'angle obtus déterminé dans le dièdre CO *(fig. 29)* par un plan perpendiculaire à l'arête, et AOB celui

déterminé par un plan quelconque tel que les deux intersections OA, OB soient situées du même côté par rapport au plan *aob*. Menons par un point quelconque A de OA le plan parallèle à *aob*, qui rencontre le côté OB en B, et menons les perpendiculaires A*a*, B*b* sur O*a*, O*b*; enfin de O abaissons la perpendiculaire O*d* sur *ab*, son pied *d* est nécessairement situé entre *a* et *b*, puisque l'angle *aob* est obtus; par *d* menons la parallèle *d*D à O*c*; *ab*, étant perpendiculaire à O*d* et *d*D (comme perpendiculaire à O*c*), est perpendiculaire au plan de ces deux droites et par suite à OD, située dans ce plan; donc AB, parallèle à *ab*, est perpendiculaire à OD; or l'oblique OD par rapport à D*d* est supérieure à la perpendiculaire O*d*; alors si l'on transporte le triangle AOB dans le plan du triangle *aob*, de manière que les bases AB, *ab* coïncident, D s'appliquera sur *d* et le sommet O du triangle AOB sera l'extérieur du triangle *aob*; donc l'angle *aob* est supérieur à l'angle AOB.

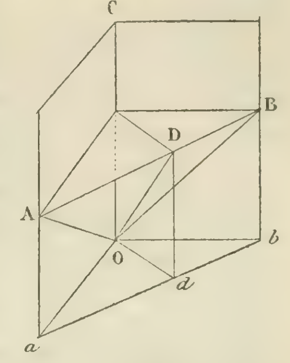


Fig. 29.

2° L'angle *a*O*b* est aigu; la démonstration précédente s'applique, si le pied de la perpendiculaire menée de O sur *ab* est entre *a* et *b*. S'il en est autrement, prenons OA = OB *(fig. 30)* et menons les parallèles A*a*, B*b*, jusqu'à leur rencontre avec le plan de l'angle *a*O*b* perpendiculaire à l'arête OC, l'angle OAS étant obtus, puisque le triangle AOB est isoscèle, on a

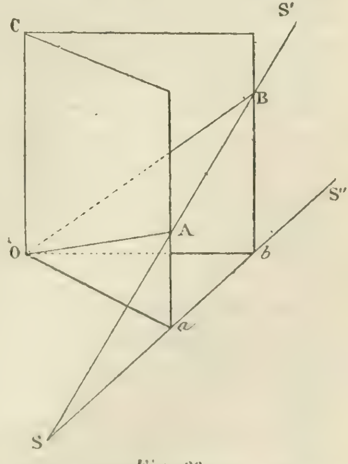


Fig. 30.

$$OAS < OaS \text{ ou } 90^\circ + \frac{AOB}{2} < 180^\circ - Oab,$$

de même

$$OBS' < ObS'' \text{ ou } 90^\circ + \frac{AOB}{2} < 180^\circ - Oba;$$

ajoutant, on a

$$180^\circ + AOB < 180^\circ + 180^\circ - (Oab + Oba)$$

ou

$$AOB < aOb.$$

Remarques. — 1° Si AB était parallèle à ab, le pied de la perpendiculaire menée de O sur ab serait au milieu de cette droite ; par conséquent d'après le premier cas, la propriété a encore lieu.

2° Le théorème a encore lieu, si OA coïncide avec Oa.

Corollaire. — *Si l'on mène un plan sécant de façon que les deux droites d'intersection avec les faces du dièdre soient de part et d'autre du plan* aOb, *l'angle ainsi déterminé est supérieur à l'angle* aOb.

Définition. — L'angle *maximum* déterminé dans un dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête parmi tous ceux déterminés par des plans sécants remplissant la condition indiquée par le théorème III, est appelé l'*angle plan correspondant au dièdre*. On sait d'ailleurs, d'après le théorème II, que la grandeur de cet angle est constante, quelle que soit la position du plan sécant, perpendiculaire à l'arête.

Pour construire cet angle plan, il suffit évidemment d'élever dans chacune des faces du dièdre, par un point quelconque O de son arête, les perpendiculaires à cette arête.

Théorème IV. — *Si deux dièdres sont égaux, leurs angles plans correspondants sont égaux, et réciproquement, si les angles plans correspondants à deux dièdres sont égaux, ceux-ci sont égaux.*

Théorème V. — *Le rapport de deux dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Soient D, D' deux dièdres ; α, α' les angles plans correspondants ; d'après le dernier théorème, on a l'égalité de rapports

$$\frac{D}{D'} = \frac{\alpha}{\alpha'},$$

c'est-à-dire que si l'on prend pour unité d'angle dièdre le second dièdre D' et pour unité d'angle plan, l'angle α' correspondant à ce dièdre, le *nombre* $\frac{D}{D'}$ qui mesure le premier dièdre, est *le même* que le nombre $\frac{\alpha}{\alpha'}$ mesurant son angle plan correspondant; d'où le corollaire suivant servant à mesurer les dièdres :

Tout dièdre a même mesure que l'angle plan correspondant, en prenant pour unité d'angle dièdre celui auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan; ce qu'on énonce souvent ainsi d'une manière abrégée, mais incorrecte : *Tout dièdre a pour mesure son angle plan.*

On a pris pour unité d'angle plan l'angle droit, le dièdre correspondant est pris pour unité de dièdre, et est appelé *dièdre droit* d'après le théorème suivant, qui établit que la construction du dièdre formé par deux plans perpendiculaires entre eux donne lieu identiquement à la même figure que celle du dièdre déterminé par la condition que son angle plan correspondant soit droit.

Théorème VI. — *Le dièdre formé par deux plans perpendiculaires entre eux a son angle plan correspondant droit, et* RÉCIPROQUEMENT *si un dièdre a son angle plan correspondant droit, ses deux faces sont perpendiculaires entre elles.*

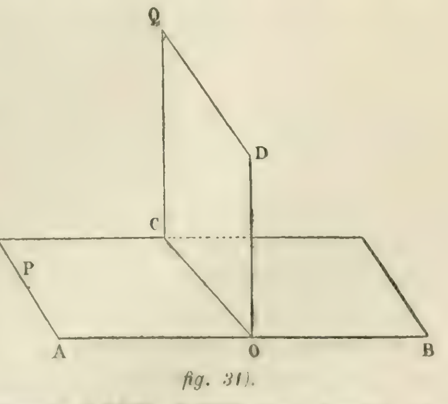


fig. 31).

En effet, si les deux plans P et Q *(fig. 31)* sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire si les deux dièdres adjacents AOCD, BOCD sont égaux, les angles plans correspondants AOD, BOD, déterminés par le plan ABD perpendiculaire à l'arête OC, sont aussi égaux; or ces deux angles adjacents égaux ont leurs côtés non com-

muns OA, OB en ligne droite; donc ils sont droits, donc les deux dièdres correspondants sont droits.

Réciproquement, soit le dièdre AOCD dont l'angle plan correspondant AOD est droit, prolongeons la face AOC au delà de l'arête, on formera un nouveau dièdre BOCD également droit; or, ces deux dièdres égaux sont adjacents et leurs faces non communes sont le prolongement l'une de l'autre; donc la face commune OCD est perpendiculaire au plan ABC.

Théorème VII. — *Si deux plans sont perpendiculaire entre eux, toute droite menée dans l'un perpendiculaire à leur intersection, est perpendiculaire à l'autre plan.*

Théorème VIII. — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan qui passe par cette droite ou qui lui est parallèle, est perpendiculaire au premier, et* réciproquement *si deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite perpendiculaire au premier est située dans l'autre ou lui est parallèle.*

Théorème IX. — *L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce troisième.*

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

Étant donnée la fraction du second degré

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b},$$

dans laquelle a *et* b *sont supposés connus, on demande de déterminer* p *et* p' *de telle façon que cette fraction devienne maxima pour* $x = \alpha$, *et minima pour* $x = \beta$.

On sait que la recherche du maximum et du minimum de la fraction du second degré revient à la détermination des valeurs qu'il faut donner à l'indéterminée y dans l'équation

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b} = y \qquad (1)$$

pour que cette équation ait deux racines égales; lorsque ces valeurs de y sont déterminées, on obtient les valeurs

de x correspondantes, par l'équation

$$x = -\frac{p - p'y}{2(1-y)};$$

dans laquelle on remplace y par l'une des valeurs précédemment trouvées.

Inversement, de l'équation que nous venons d'écrire, nous pouvons déduire pour y la valeur

$$y = \frac{2x + p}{2x + p'}. \qquad (2)$$

et, si nous remplaçons dans l'équation (1), ou dans l'équation (2), x par la valeur qui donne à la fraction ses valeurs limites, nous devons trouver pour y deux nombres égaux ; donc les valeurs de x qui font passer la fraction par un maximum ou un minimum sont les racines de l'équation obtenue en égalant les deux valeurs de y précédemment écrites, c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + b} = \frac{2x + p}{2x + p'} \qquad (3)$$

ou $$x^2(p - p') + 2x(a - b) + ap' - bp = 0. \qquad (4)$$

D'après l'énoncé, cette équation doit avoir pour racines α et β ; nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{2(b-a)}{p-p'} &= \alpha + \beta; \\ \frac{ap' - bp}{p - p'} &= \alpha\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ces deux équations nous détermineront p et p'.

La seconde devient $\quad p'(a + \alpha\beta) = p(b + \alpha\beta)$,

ce qui donne $\quad \dfrac{p}{a + \alpha\beta} = \dfrac{p'}{b + \alpha\beta} = \dfrac{p - p'}{a - b}$.

Donc, en vertu de la première de ces équations, nous avon

$$p = \frac{-2(a + \alpha\beta)}{\alpha + \beta};$$

$$p' = \frac{-2(b + \alpha\beta)}{\alpha + \beta}.$$

Exemple. — Soit la fraction

$$\frac{x^2 + px + 5}{x^2 + p'x + 3};$$

cherchons les valeurs à donner à p et p' pour que les valeurs limites correspondent, l'une à $x = 2$, l'autre à $x = -3$;
on trouve $\alpha + \beta = -1$: $\alpha\beta = -6$
et par suite $p = -2$; $p' = -6$;
la fraction est donc $\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 6x + 3}$;
il est facile de vérifier que, effectivement, ses valeurs limites correspondent bien aux valeurs de x indiquées dans l'énoncé.

Dans le calcul précédent, nous avons admis que b était différent de a. Si nous examinons l'hypothèse de $a = b$, l'équation qui détermine x devient

$$(x^2 - a)(p - p') = 0.$$

Si alors les valeurs données pour x ne sont pas les racines de l'équation $x^2 - a = 0$, nous trouvons forcément $p = p'$; dans ce cas, la fraction devient

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + px + a},$$

et, comme elle a pour valeur l'unité, quel que soit x, nous n'avons donc pas une fonction véritable.

Si les valeurs correspondant aux limites sont précisément $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, nous trouvons pour p et p' des valeurs indéterminées; en effet, considérons la fraction

$$\frac{x^2 + px + a}{x^2 + p'x + a} = y,$$

les valeurs du maximum et du minimum sont données par les racines de l'équation

$$(p - p'y)^2 - 4a(1 - y)^2 = 0 ;$$

la valeur correspondante de x est

$$x = -\frac{(p - p'y)}{2(1 - y)} = \pm\sqrt{a},$$

et cela, quels que soient p et p'. On comprend donc bien comment les formules que nous avons obtenues nous donnent des valeurs indéterminées pour ces deux inconnues.

Étant donnée la fraction

$$\frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q'}.$$

déterminer p, q, p′, q′ *de façon que pour* $x = \alpha$ *la fraction prenne la valeur maxima* α', *et que pour* $x = \beta$ *elle prenne la valeur minima* β'.

Nous avons, comme précédemment, entre les coefficients, les deux équations $$\frac{2(q'-q)}{p-p'} = \alpha + \beta,$$
$$\frac{qp'-pq'}{p-p'} = \alpha\beta;$$
de plus, la valeur limite y correspondant à $x = \alpha$ devant être α', nous avons $$\alpha' = \frac{2\alpha + p}{2\alpha + p'},$$
et de même $$\beta' = \frac{2\beta + p}{2\beta + p'}.$$

Ces deux dernières équations donneront facilement p et p'; en chassant les dénominateurs, nous obtenons en effet les deux équations très simples
$$\begin{aligned} p - p'\alpha' &= 2\alpha(\alpha' - 1), \\ p - p'\beta' &= 2\beta(\beta' - 1); \end{aligned} \qquad (6)$$
lorsque p et p' sont ainsi déterminées, nous pourrons très facilement obtenir q et q'; en effet, en divisant membre à membre les deux premières relations, nous avons l'équation homogène $$\frac{2(q'-q)}{qp'-pq'} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta};$$
cette relation donne facilement
$$\frac{q}{2\alpha\beta + p'(\alpha+\beta)} = \frac{q'}{2\alpha\beta + p'(\alpha+\beta)} = \frac{q'-q}{(p'-p)(\alpha+\beta)} = -\frac{1}{2}$$
donc
$$q = -\frac{2\alpha\beta + p(\alpha+\beta)}{2}; \quad q' = -\frac{2\alpha\beta + p'(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (7)$$

Exemple. — Proposons-nous de déterminer les coefficients de la fraction $$\frac{x^2 + px + q}{x^2 + p'x + q'}$$
de façon que pour $x = 3$ elle atteigne un maximum 4, et que pour $x = 1$ elle atteigne un minimum 5; nous aurons ici $$\alpha = 3, \qquad \alpha' = 4;$$
$$\beta = 1, \qquad \beta' = 5;$$
et les équations (6) deviennent

$$p - 4p' = 18.$$
$$p - 5p' = 8;$$

nous en tirons facilement

$$p' = 10, \qquad p = 58;$$

puis, les équations (7) nous donnent, tout calcul fait,

$$q = -119; \qquad q' = -23,$$

et la fraction cherchée est

$$\frac{x^2 + 58x - 119}{x^2 + 10x - 23};$$

il sera facile de reconnaître que d'abord les valeurs α' et β' sont bien égales, respectivement à 4 et à 5, et que les valeurs correspondantes de x sont 3 et 1; la fraction répond donc bien à l'énoncé.

QUESTION 10

Construire un triangle dont on connait la base, un angle à la base, et la somme du côté opposé et de la hauteur du triangle.

(Hallowell.)

Supposons le problème résolu : soit ABC le triangle demandé, dans lequel nous connaissons la base BC, l'angle en B, et la somme de la hauteur AD du côté CA et opposé à l'angle B.

Prolongeons DA, au delà du point A, d'une longueur AE égale à AC ; alors DE est égal à la somme donnée. Par le point E, menons EF parallèle à BC, jusqu'au point F où EF rencontre BA.

Les triangles semblables AEF, ABD, donnent

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

et par suite

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{ED}.$$

Joignons le point F au point C, et par le point B menons BH parallèle à AC jusqu'à la rencontre en H avec FC; les triangles semblables FAC, FBH donnent

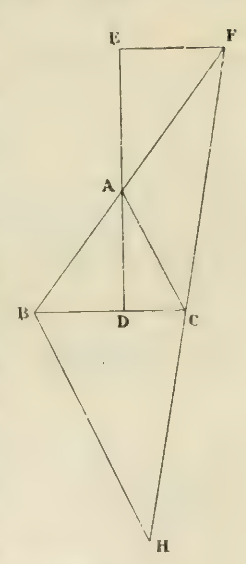
$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BH};$$

donc

$$\frac{AC}{BH} = \frac{AE}{ED},$$

et comme AC = AE, il en résulte que BH = ED.

Nous en déduisons la construction suivante :



Nous menons une parallèle EF à BC, distante de BC d'une longueur égale à la somme donnée de la hauteur et du côté AC, jusqu'au point F où elle rencontre le côté BA, connu de direction. Nous joignons le point F au point C; de B comme centre avec un rayon égal à la somme donnée, nous décrivons un arc de cercle qui rencontre FC en un point H; par le point C nous menons une parallèle à BH; cette parallèle rencontre BF au point A; le triangle ABC est le triangle demandé.

Si, au lieu de la somme, on avait la différence, il suffirait de prendre la longueur AE au-dessus du point A; on continuerait la construction de la même manière.

NOTA. — La question a été résolue par MM. Paul Godefroy, à Lyon; Pigeaud, à Châteauroux.

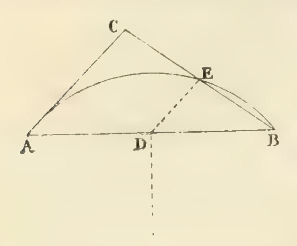
QUESTION 11

Solution par M. G. PIGEAUD, élève au Lycée de Châteauroux.

Construire géométriquement un triangle, connaissant un angle, l'un des côtés adjacents et l'angle que fait le côté opposé à l'angle donné avec la médiane.

Soit AB le côté donné. En A faisons un angle égal à l'angle donné du triangle. L'angle de la médiane et du

troisième côté ayant pour extrémités A et B, a son sommet sur le segment capable de cet angle décrit sur AB comme corde.



D'autre part, cet angle se trouve sur la parallèle à AC menée par le milieu D de AB. Il est en E. Joignant BE et prolongeant, on a en ABC le triangle cherché.

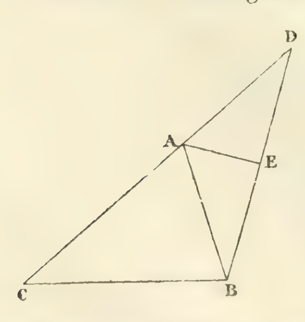
NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Sarrazin, intitution Sainte-Marie, Besançon; Paul et René Godefroy, à Lyon; Deville, canonnier au régiment d'artillerie de marine à Lorient ; G. Berthelot, au lycée de Châteauroux ; Puig, au lycee de Montpellier ; Masserand, Broutin, pensionnat de Passy. Vail, Lenoir, école Albert-le-Grand (Arcueil).

QUESTION 12

Solution par DEROME, élève au lycée de Valenciennes.

Construire un triangle dont on connait la base, la différence des angles à la base et la somme des deux autres côtés.

Soit ABC le triangle cherché, BC la base, $B - C = \alpha$ la différence des angles à la base.



Prolongeons AC d'une longueur $AD = AB$; alors CD représente la somme des côtés AB et AC.

Le triangle ABD étant isoscèle, $ABD = ADB$. Or

$$A + B + C = 180^o$$

et $B - C = \alpha$; on en déduit

$$B + \frac{A}{2} = 90^o + \frac{\alpha}{2};$$

et comme CAB est extérieur au triangle ABD, on a

$$\frac{A}{2} = ABD.$$

Donc $$CBD = B + ABD = 90^o + \frac{\alpha}{2}.$$

De là la construction suivante : sur la base donnée, en B faire un angle égal à $1^d + \frac{\alpha}{2}$; de C comme centre avec la somme donnée décrire un arc de cercle qui coupera BD en D, et sur le milieu E de BD élever une perpendiculaire qui rencontre CD en A. ABC est le triangle cherché.

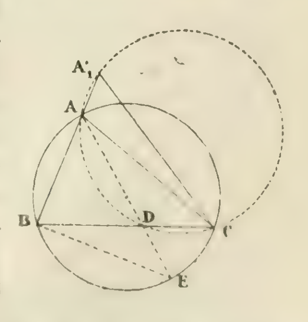
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Patrice Mahon ; Puig, au Lycée de Montpellier.

QUESTION 13

Solution par MM. Paul et René Godefroy, élèves au Lycée de Lyon.

Construire géométriquement un triangle connaissant la base, un angle à la base et le point de la base par lequel passe le diamètre du cercle circonscrit.

Soit ABC le triangle cherché, AE le diamètre du cercle circonscrit passant par le point donné D, BC la base donnée, B l'angle à la base également donné. Joignons BE. L'angle EBC est égal à l'angle CAD comme ayant même mesure, et cet angle étant complémentaire de l'angle donné est connu. Donc le sommet A se trouvera à l'intersection de la droite BA et du segment capable de 90 — B décrit sur CD comme corde.



Ce segment coupera généralement BA en deux points A et A' qui répondront à la question.

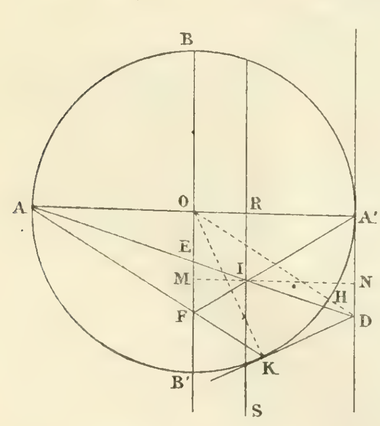
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Derome au lycée de Valenciennes ; Lenoir, Vail, école d'Arcueil

QUESTION 17

Solution par M. L. Germain, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

On considère un cercle Δ *et deux diamètres rectangulaires* AA′, BB′; *par le point* A, *on mène une transversale* δ, *qui rencontre la tangente en* A′ *au point* D, *et le diamètre* BB′ *au point* E. *Par le point* D *on peut mener au cercle une seconde tangente* DK, *touchant le cercle au point* K; *la droite* AK *rencontre* BB′ *en un point* F. *Trouver le lieu de l'intersection de* δ *et de* A′F *quand* δ *tourne autour de* A. (G. L.)

Soit I le point d'intersection. Je joins OD, OK; la droite OD bissectrice de l'angle A′OK divise l'arc A′K en deux parties A′H, HK égales; les triangles rectangles OA′D, AOF sont donc égaux, puisque AO = OA′ et que l'angle A′OD, qui a pour mesure A′H, égale l'angle OAF qui a pour mesure la moitié de l'arc A′K; donc OF = A′D.



Mais les triangles semblables AOE, AA′D donnent

$$\frac{OE}{A'D} = \frac{AO}{AA'} = \frac{1}{2}, \quad \text{donc } EF = OE = \frac{A'D}{2}.$$

Les triangles semblables EIF, DIA′ donnent aussi

$$\frac{IM}{IN} = \frac{DF}{A'D} = \frac{1}{2}.$$

Le point I est donc à une distance du diamètre BB′ égale au tiers du rayon du cercle Δ.

Donc le lieu géométrique des points I est une droite RS,

menée parallèlement à BB′ et à une distance de ce diamètre égale au tiers du rayon du cercle.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Montpellier; Deville, à Lorient; Chaillot, à Nantes;

QUESTION 19

Solution par M. PUIG, élève au Lycée de Montpellier.

On considère un cercle de centre O *et un diamètre* AA′; *soit* M *un point mobile sur la circonférence; on fait passer par* MOA *un cercle* Δ, *et par* MOA′ *un cercle* Δ′.

Démontrer :

1° *Que ces cercles se coupent orthogonalement;*

2° *Que* r, r′ *étant leurs rayons,* R *le rayon du cercle donné, on a*

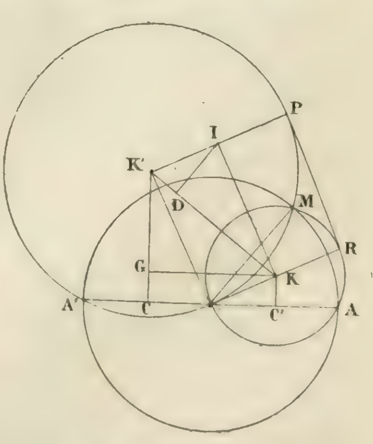
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{4}{R^2};$$

3° *Que la projection de la tangente commune sur la ligne des centres a une longueur constante et égale à* R.

Soient K, K′ les centres des deux cercles MOA, MOA′.

1° Il faut prouver que l'angle K′MK est droit :

L'angle K′OK est droit comme formé par deux droites OK′, OK, bissectrices de deux angles supplémentaires. Or, les deux triangles MK′K, OK′K sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; donc l'angle K′MK, égal à l'angle KOK′, est droit; et les deux cercles se coupent orthogonalement.



2°
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{4}{R^2}:$$

Le triangle KMK′ étant rectangle, on a

$$r^2 + r'^2 = KK'^2.$$

Menons KG parallèle au diamètre AA′ :

Le triangle rectangle KGK′ donne

$$KK'^2 = KG^2 + K'G^2.$$

Or $$KG = OC' + OC = R\ ;$$

$$K'G = K'C' - KC = \sqrt{r'^2 - \frac{R^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}\ ;$$

donc on aura

$$r^2 + r'^2 + r'^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} + r^2 - \frac{R^2}{4} - 2\sqrt{\left(r'^2 - \frac{R^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right)}\ ;$$

d'où on a $$\frac{R^2}{2} = 2\sqrt{\left(r'^2 - \frac{R^2}{4}\right)\left(r^2 - \frac{R^2}{4}\right)}.$$

et en élevant au carré

$$\frac{R^4}{4} = 4\left[r'^2 r^2 - \frac{R^2}{4}(r^2 + r'^2) + \frac{R^4}{16}\right]$$

ou $$4r'^2 r^2 = R^2(r^2 + r'^2)$$

et en divisant les deux membres par $R^2 r^2 r'^2$, on a

$$\frac{4}{R^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

3° Soit PR la tangente commune aux deux circonférences; sa projection sur la ligne des centres KK′ est KD.

Le triangle rectangle KIK′ donne

$$KD = \frac{KI^2}{KK'} = \frac{KK'^2 - K'I^2}{KK'} = \frac{r^2 + r'^2 - (r - r')^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = \frac{2rr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

En élevant les deux membres de cette égalité au carré,

on aura $$KD^2 = \frac{4r^2 r'^2}{r^2 + r'^2}$$

ou $$\frac{4}{KD^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

Si on compare cette égalité à l'égalité

$$\frac{4}{R^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}$$

on voit que $$\frac{4}{KD^2} = \frac{4}{R^2}$$

ou $$KD = R.$$

Donc la projection de la tangente commune aux deux circonférences est constante et égale à R.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Depierres, à Pontarlier; Deville, à Lorient; Pigeaud, à Châteauroux; Vazon, au collège Rollin, Chaillot, à Nantes.

QUESTION 28

Solution par M. Jacquemet. École d'Arcueil.

Déterminer x *et* y *d'après les équations*

$$x(1 + \sin^2\theta - \cos\theta) - y\sin\theta(1 + \cos\theta) = c(1 + \cos\theta)$$

$$y(1 + \cos^2\theta) - x\sin\theta\cos\theta = c\sin\theta$$

et éliminer θ *entre ces deux équations.* (Wolstenholme.)

La seconde équation donne

$$x = \frac{y(1 + \cos^2\theta) - c\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}. \qquad \text{(A)}$$

Substituant dans la première et réduisant, il vient

$$y(1 - \cos\theta) = c\sin\theta.$$

d'où

$$y = \frac{c\sin\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Portant cette valeur de y dans la relation (A) on a après réductions

$$x = c\,\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

et que

$$\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2},$$

on a

$$x = c\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}$$

$$y = c\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2};$$

il suit de-là que $y^2 - cx = 0$.

Nota. — A résolu la même question, M. Varnier, élève au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

39. — On donne deux droites rectangulaires OA, OB, et deux autres droites Δ, Δ', parallèles à OA. Soit M un point pris sur Δ, et supposé mobile sur cette droite ; élevons au point M, à OM, une perpendiculaire qui rencontre OA au point A ; joignons celui-ci au point C, point de rencontre de Δ' et de OM, et sur cette droite AC abaissons de O une perpendiculaire OI. Démontrer que le lieu du point I est une circonférence. (G. L.)

40. — Trouver le lieu des points tels que si de ces points on mène des tangentes à une parabole, elles forment avec une droite fixe un triangle isoscèle. (G. L.)

41. — On considère une parabole P, et par un point M, pris sur cette courbe, on mène une normale qui rencontre l'axe au point Q. Sur MQ comme diamètre, on décrit un cercle C, et l'on demande le lieu géométrique décrit par le point de concours de la normale MQ avec la polaire du sommet de la parabole par rapport à C. (G. L.)

42. — On considère une parabole P; d'un point M, mobile sur cette courbe, on abaisse une perpendiculaire MA sur son axe. O étant le sommet de la courbe, on imagine une ellipse ayant pour axes, en grandeur et en position, OA et MA. Trouver le lieu des foyers de cette ellipse. (G. L.)

43. — Trouver le maximum du produit $x^m y^n$, sachant que les variables positives x et y sont liées par la relation

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = K.$$

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 13734 2.

LE CINQUIÈME LIVRE

Par M. **Lauvernay**, professeur au Collège Rollin.

(*Suite et fin*, voir p. 121.)

ANGLES POLYÈDRES

Définitions. — On appelle *angle polyèdre* la figure formée par plusieurs plans passant par un même point S et limités à leurs intersections successives SA, SB, ... (*fig. 32*). Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, ... sont les *arêtes*, les angles ASB, BSC, ... formés par deux arêtes consécutives, sont appelées *faces* et les plans de deux faces consécutives forment les *dièdres de l'angle polyèdre*. — Le plus simple des angles polyèdres est celui formé par trois plans ; on l'appelle *angle trièdre*. Un trièdre est dit *rectangle*, *birectangle* ou *trirectangle* selon qu'il a un, deux ou trois dièdres droits.

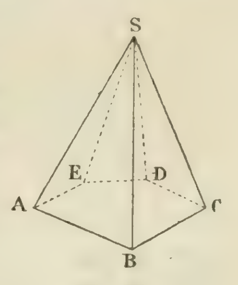


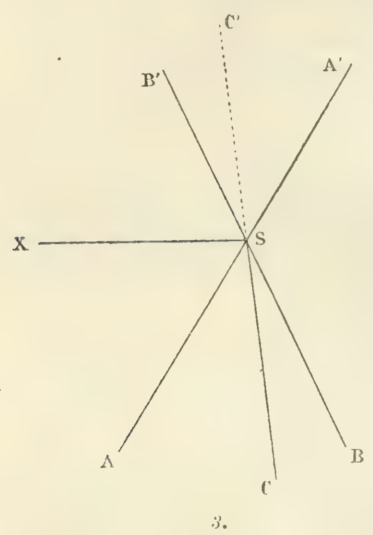
Fig. 32.

On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté du plan indéfini de l'une quelconque de ses faces ; il est *concave* dans le cas contraire. — Dans tout ce qui suit, il ne sera question que d'angles polyèdres convexes.

La section d'un angle polyèdre convexe par un plan rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet est un polygone convexe.

Si l'on prolonge au delà du sommet toutes les arêtes d'un angle polyèdre, on forme un second angle polyèdre, appelé *symétrique* du premier, dont les faces sont égales à celles du premier, et les dièdres égaux à ceux du premier, comme opposés par l'arête ; mais ces deux angles polyèdres ne sont pas superposables. Pour le montrer, il suffit de considérer deux trièdres symétriques (*fig. 33*).

Pour fixer les idées, supposons la face ASB située dans le plan du tableau et l'arête SC en avant, son prolongement SC′ sera en arrière. Si les deux trièdres étaient superposables, nécessairement les deux faces égales ASB, A′SB′ coïncideront; or il n'y a que deux moyens de superposer deux angles plans égaux, soit en mettant SA sur SA′ et SB sur SB′, soit SA sur SB′ et SB sur SA′.



3.

Dans le premier cas, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de la perpendiculaire menée par S au plan de la face ASB; A′SB′ coïncidera avec ASC, mais l'arête SC′ qui fait un angle *obtus* avec la partie antérieure de l'axe de rotation ne peut coïncider avec SC, qui fait nécessairement un angle *aigu* avec cette même partie de l'axe.

Dans le second cas, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de la bissectrice SX de l'angle B′SA, l'angle B′SA′ coïncidera avec son égal ASB; mais l'arête SC′ qui fait, par exemple, un angle obtus avec la portion SX de l'axe ne pourra coïncider avec SC qui fait au contraire avec SX un angle aigu.

Remarque. — La superposition aurait lieu si le trièdre avait deux dièdres égaux; car, dans le second mode de rotation, le dièdre SB′ étant égal au dièdre SB, si on suppose ce dernier égal au dièdre SA, la face C′SB′ viendra dans le plan de la face ASC, par conséquent SC′ sera quelque part dans la face ASC par la même raison, elle sera aussi dans la face BSC; donc SC′ sera à leur intersection, c'est-à-dire sur SC.

Si on appelle *trièdre isoscèle* tout trièdre qui possède deux dièdres égaux, la remarque précédente démontre le théorème suivant:

Dans tout trièdre isoscèle, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.

Car dans la superposition précédente, on voit que l'on a

$$B'SC' = ASC;$$

or $$B'SC' = BSC,$$

donc $$ASC = BSC.$$

Réciproquement. — *Si dans un trièdre, deux faces sont égales, celui-ci est isoscèle.*

Soit ASC = BSC, plaçons le trièdre SA'B'C' de façon que la face B'SC' coïncide avec son égale ASC, les dièdres SC',SC étant égaux, le plan A'SC' coïncide avec BSC, et dans ces plans SA' avec SB, puisque A'SC' = ASC = BSC; donc les deux trièdres coïncident; SB' étant sur SA, ce dièdre SA est égal au dièdre SB.

Théorème I. — *Dans tout trièdre, la somme des trois dièdres est comprise entre six droits et deux droits.*

La première partie est évidente, puisque chaque dièdre est inférieur à deux droits.

Sur les trois arêtes prenons les longueurs SA, SB, SC, égales entre elles *(fig. 34)* et joignons AB, BC, CA; les angles SAB, SAC sont nécessairement aigus, les triangles ASB, ASC étant isoscèles; par conséquent le plan mené par A perpendiculairement à l'arète SA laisse du même côté les deux droites AB, AC; donc l'angle dièdre A est supérieur à l'angle BAC (th. III, dièdres). Comme il en est de même pour les deux autres dièdres, la somme des trois dièdres est supérieure à la somme des angles du triangle ABC, c'est-à-dire à deux droits.

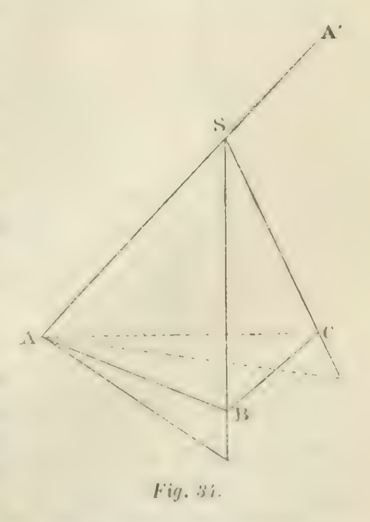


Fig. 34.

Théorème II. — *Dans tout trièdre, chaque dièdre augmenté*

de deux droits donne une somme supérieure à celle des deux autres.

Considérons le trièdre SA′BC dont l'arête SA′ est le prolongement de l'arête SA du trièdre SABC ; par conséquent les deux dièdres SA, SA′ de ces trièdres sont égaux ; d'après le théorème précédent appliqué au trièdre SA′BC on a

$$\text{dièdre SA}' + \text{A}'\text{SBC} + \text{A}'\text{SCB} > 2 \text{ dr}$$

ou $$\text{dièdre SA} + 2 \text{ dr} - \text{ASBC} + 2 \text{ dr} - \text{ASCB} > 2 \text{ dr}$$

et par transposition SA + 2 dr + ASBC + ASCB.

Théorème III. — *Dans tout angle polyèdre, la somme des dièdres est supérieure à autant de fois deux droits qu'il y a de faces moins deux.*

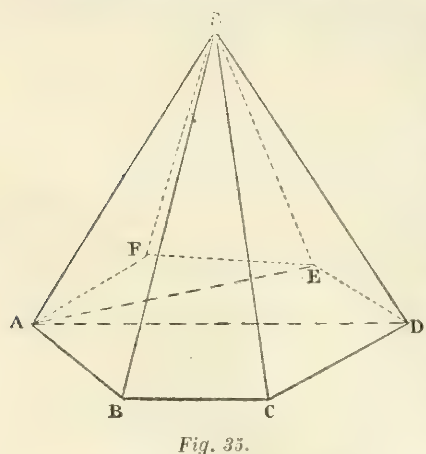


Fig. 35.

Menons le plan ABCD (*fig. 35*) rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet, et par l'arête SA et chacune des arêtes non situées dans les faces adjacentes menons des plans qui décomposent l'angle polyèdre en $n - 2$ trièdres, si l'angle polyèdre possède n faces ; or si on considère ces trièdres, on a les $n - 2$ inégalités

$$\text{CSAB} + \text{ASBC} + \text{BSCA} > 2 \text{ dr}$$
$$\text{DSAC} + \text{ASCD} + \text{CSDA} > 2 \text{ dr}$$

. . . . , ...

. . . .

ajoutant on a :

Somme des dièdres de l'angle polyèdre $> 2 \text{ dr } (n - 2)$

Théorème IV. — *Dans tout trièdre la somme des trois faces est inférieure à quatre droits.*

Prenons SA = SB = SC (*fig. 36*) et soit O le point de concours des perpendiculaires menées par les milieux α, β, γ

des côtés du triangle ABC sur ces côtés ; les droites $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ sont respectivement perpendiculaires à BC, AC, BA, car SO est perpendiculaire au plan ABC (th. V, dr. et plans perp.). Les triangles BCO, BCS ayant même base BC et la hauteur αO étant inférieure à αS, oblique par rapport à OS, on a

$$BSC < BOC$$

de même $CSA < COA$

$$ASB < AOB$$

ajoutant membre à membre ces inégalités, on voit que la somme des trois faces est inférieure à la somme des angles formés autour du point O, c'est-à-dire à quatre droits.

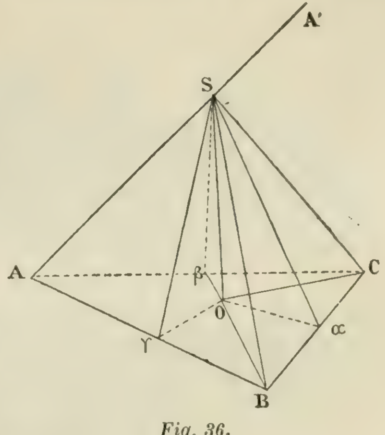


Fig. 36.

Si le point O était à l'extérieur, la même inégalité a lieu *à fortiori*, puisque la somme des deux angles AOB, BOC est représentée par le troisième AOC, qui est évidemment inférieur à deux droits.

Théorème V. — *Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des deux autres.*

Soit SA′ le prolongement de AS, d'après le théorème précédent appliqué au trièdre SA′BC on a

$$A'SB + A'SC + BSC < 4^{dr};$$

or

$$2^{d} = A'SB + ASB,$$
$$2^{d} = A'SC + ASC.$$

ajoutant cette inégalité et ces égalités membre à membre, on a, après réductions : $BSC < ASB + ASC$.

Théorème VI. — *La somme des faces d'un angle polyèdre est moindre que quatre droits.*

Menons le plan ABC *(fig. 35)* rencontrant toutes les arêtes d'un même côté du sommet; si *n* est le nombre des faces de l'angle polyèdre, nous formons ainsi *n* trièdres ayant leurs sommets en A,B,C..., et d'après le théorème précédent on a

les n inégalités
$$\begin{aligned} BAF &< BAS + FAS \\ ABC &< ABS + CBS \\ &\cdots \\ EFA &< EFS + AFS \end{aligned}$$

et identiquement

Somme des angles en S = somme des angles en S.

Ajoutant ces inégalités et l'égalité membre à membre, on a, en observant que le second membre contient la somme des trois angles des n triangles ayant leur sommet commun en S ;

Somme des angles du polygone ABC ... + somme des angles en S < $2n^{dr}$.

ou $2n^{d} - 4^{d}$ + somme des angles en S < $2n^{d}$

d'où par transposition :

somme des angles en S < 4^{dr}.

Trièdres supplémentaires.

Lemme. — *Si, par un point de l'arête d'un dièdre, on élève les perpendiculaires à chacune des faces en dirigeant celles-ci du côté de l'autre face, l'angle de ces deux droites est supplémentaire de l'angle plan correspondant du dièdre.*

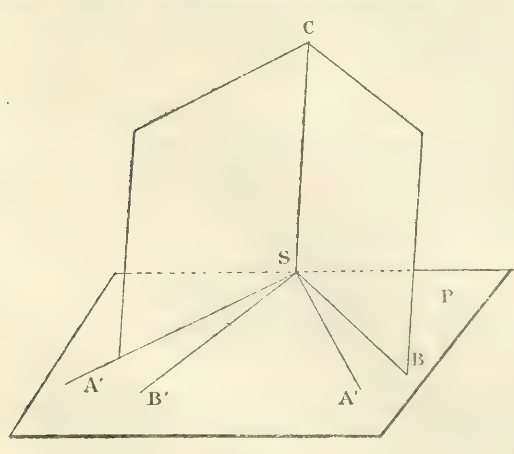


Fig. 37.

Soit le plan P perpendiculaire à l'arête SC du dièdre *(fig. 37)*, l'intersection de ce plan avec le dièdre détermine l'angle plan ASB correspondant, et contient les perpendiculaires SA', SB' à chacune des faces ; ces droites sont toutes deux dans l'intérieur, ou à l'extérieur de l'angle ASB, selon que celui-

ci est obtus ou aigu; or on a évidemment

$$1^{d} = ASB' + B'SA'$$

et par construction

$$1^{d} = B'SB.$$

Ajoutant, il vient

$$2^{dr} = ASB' + B'SB + B'SA' = ASB + B'SA.$$

Théorème. — *Si par le sommet d'un trièdre, on mène la perpendiculaire à chacune des faces, en dirigeant celle-ci du côté de la troisième arête, on forme un second trièdre dont les faces et les dièdres sont supplémentaires des dièdres et des faces du premier.*

En effet, l'arête SA', perpendiculaire à la face BSC, étant dirigée du côté de SA, est dirigée du côté de la face CSA; de même SB', perpendiculaire à la face CSA, est dirigée du côté de la première face BSC; donc, d'après le lemme, l'angle A'SB' est supplémentaire du dièdre SC formé par ces deux faces BSC, CSA.

Pour démontrer que les dièdres du second sont supplémentaires des faces du premier, il revient au même de prouver qu'en opérant sur le second trièdre comme on vient de de faire sur le premier on retrouve celui-ci; en d'autres termes que SA, par exemple, est perpendiculaire à la face B'SC' du même côté de ce plan que SA'.

En effet SB' est perpendiculaire à la face ASC, par conséquent sur SA; de même SC' perpendiculaire à la face ASB est perpendiculaire sur SA; donc la droite SA perpendiculaire aux deux droites SB', SC' est perpendiculaire à leur plan.

D'ailleurs SA est du même côté que SA', puisque SA' a été menée du côté de SA.

Définition. — Les deux trièdres qui jouissent de la propriété d'être réciproques l'un de l'autre, sont appelés *supplémentaires*.

Cette propriété permet de déduire les théorèmes 4,5,6 des théorèmes 1, 2, 3, ou inversement.

ÉGALITÉS DES TRIÈDRES

Définition. — Si on considère plusieurs dièdres ayant une face commune P et une arête commune AB *(fig. 38)*, chacun de ces plans Q forme avec le plan P deux drièdres supplémentaires; pour définir le dièdre que l'on veut considérer parmi les deux, on conviendra de prendre pour angle correspondant au dièdre celui formé par la perpendiculaire

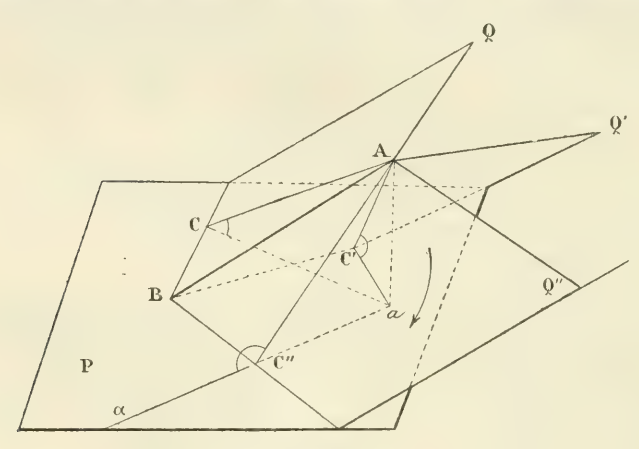


Fig. 38.

AC menée de A sur l'arête BC avec la perpendiculaire Ca menée dans le plan P sur cette même arête, cette dernière droite Ca étant toujours menée de la gauche vers la droite pour un spectateur placé suivant la perpendiculaire Aa et regardant AB. Ainsi les dièdres formés par Q, Q′ Q″ avec le plan P sont respectivement mesurés par ACa, AC′a, AC″α.

Lemme. — *Par une droite* AB *oblique à un plan* P *on peut mener généralement un plan et un seul formant avec le premier un angle donné* γ (fig. 39).

Soit aB la projection de AB sur le plan P, menons AC formant avec aB l'angle donné γ,et du point a comme centre, avec le rayon aC, décrivons la circonférence; si par B on mène les tangentes à cette circonférence, l'une d'elles BC

sera telle que l'angle ACa égal à γ sera formé dans le sens indiqué par la définition précédente; or le plan Q conduit

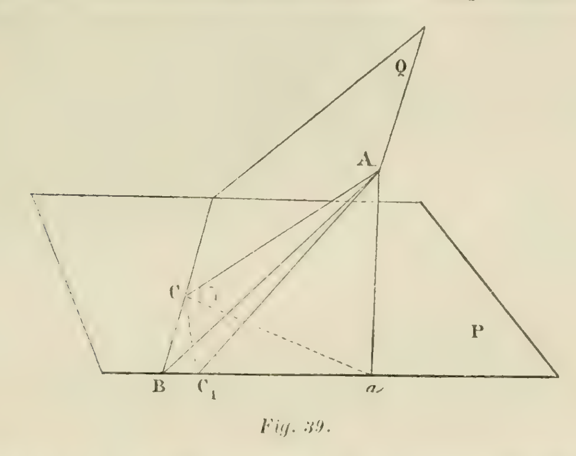


Fig. 39.

par AB et BC fait avec le plan P un dièdre mesuré par γ. d'après le théorème des trois perpendiculaires.

Remarque. — Pour que le plan Q existe, il est nécessaire que l'angle donné γ soit supérieur à l'angle de AB avec le plan P, si ce dernier angle est aigu et soit au contraire inférieur à ce même angle supposé obtus. Ceci résulte du théorème sur la ligne de plus grande pente.

Théorème. — *Deux trièdres sont égaux, s'ils ont, soit :*

1° *Les trois dièdres égaux chacun à chacun :*

2° *Deux dièdres égaux chacun à chacun et les faces comprises entre ces dièdres égales entre elles ;*

3° *Un dièdre égal adjacent à deux faces égales chacune à chacune :*

4° *Les trois faces égales chacune à chacune.*

Cet énoncé suppose en outre que les éléments égaux sont disposés dans le même ordre : s'il en était autrement, les deux trièdres seraient *symétriques.*

Premier cas. — Soient les deux trièdres SABC, S'A'B'C' *(fig. 40)* dont les trois dièdres sont égaux chacun à chacun et disposés de la même manière ; le théorème, s'il y a deux

dièdres droits, n'est autre que celui du théorème IV (p. 148). Mais supposons qu'il y ait au moins deux dièdres SB, SC non droits. Dans le premier trièdre, menons le plan BAC perpendiculaire à l'arète SA et dans le second le plan B'A'C' perpendiculaire à S'A', et supposons A'B' = AB. Transportons ce second trièdre sur le premier de, manière que les deux dièdres égaux S'A', SA coïncident, A'B' étant sur AB :

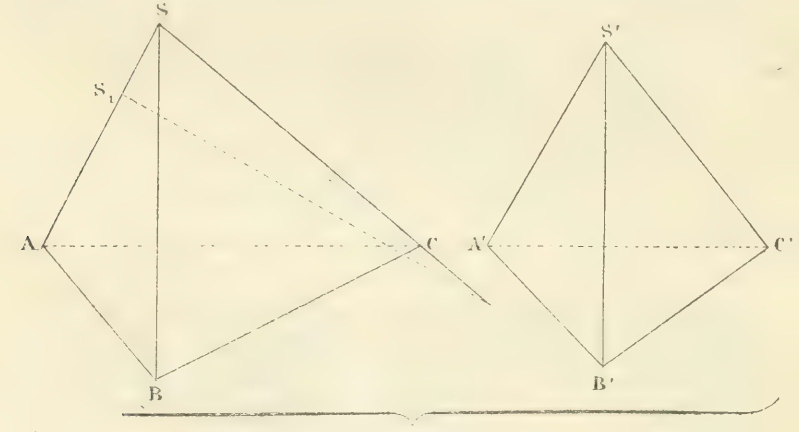


Fig. 40.

ces deux trièdres ont déjà deux faces superposées en direction ; je dis que leurs troisièmes faces B'S'C', BSC coïncident ; car, s'il en était autrement, ces deux faces ayant le point commun B se couperaient suivant une droite située dans le plan ASB, ou oblique par rapport à ce plan. Dans la première hypothèse, cette droite d'intersection ne serait autre que BS, oblique par rapport au plan ASC', puisque les dièdres SB, SC ne sont pas droits : donc, d'après le lemme précédent, les deux faces BSC, B'S'C' coïncident. Dans la seconde hypothèse, soit BC la droite d'intersection oblique par rapport au plan BSA ; d'après le même lemme les deux faces BSC ou BSC et B'S'C' coïncident.

Les deuxième et troisième cas se démontrent par la superposition (voir la démonstration du 1er et du 2e cas de l'égalité de deux triangles).

Quatrième cas. — Soient les deux trièdres SABC, S'A'B'C' (*fig. 41*), ayant leurs trois faces égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre: prenons les points A, B, C, A', B', C' sur les arêtes, tels que

$$SA = SB = SC = = SA' = SB' = SC'.$$

Les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun, d'après l'égalité des triangles isoscèles ASB, A'S'B', etc.

Soient O et O' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, A'B'C', les rayons OA, O'A' de ces circonférences

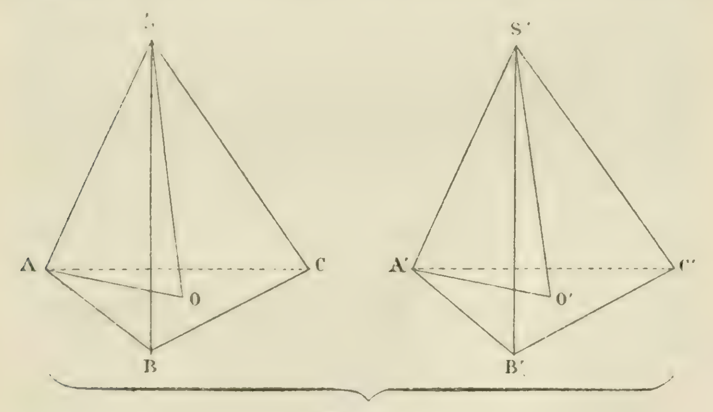


Fig. 41.

sont égaux, puisque ces triangles le sont; or, les droites SO, S'O' sont perpendiculaires aux plans de ces triangles, d'après le théorème V (droites et plans perpendiculaires); donc les triangles rectangles OSA, O'S'A' sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal: donc O'S' = OS. Par conséquent, si on transporte le trièdre S'A'B'C' sur le premier, de façon que les triangles égaux A'B'C', ABC coïncident, les centres O' et O coïncideront, par suite les perpendiculaires O'S' OS se superposeront et S' s'appliquera sur S; donc les deux figures coïncident et les deux trièdres sont égaux.

ÉQUATIONS QUADRATIQUES (*).

Par M. **G. de Longchamps**.

1. — On dit qu'une équation de degré m est quadratique lorsque sa résolution dépend seulement d'équations qui sont tout au plus du second degré. Lorsqu'un problème conduit à une équation de degré supérieur à deux, le problème proposé n'est pas, en général, soluble par la règle et le compas. Mais, dans certains cas particuliers, la résolution de l'équation trouvée peut se faire par des équations du second degré ou du premier degré : on peut dire, pour exprimer ce fait, que *le problème donné est quadratique.*

Par exemple, et pour citer des exemples très connus, la trisection de l'angle n'est pas un problème quadratique, en général : mais la recherche de $\operatorname{tg}\frac{1}{4}a$, connaissant $\operatorname{tg}a$, conduit à une équation du quatrième degré qui peut se résoudre par des équations du second degré : ce dernier cas est un exemple de problème quadratique.

On sait, depuis Abel, que les équations du degré supérieur à quatre, ne sont pas en général solubles par radicaux : la résolution même des équations du troisième et du quatrième degré est soumise à tant de difficultés pratiques et elle rencontre dans ce qu'on nomme le cas irréductible, une impossibilité si absolue, que l'on peut considérer, croyons-nous, cette résolution comme plus théorique que pratique. De là résulte le grand intérêt qui s'attache aux équations quadratiques du troisième et du quatrième degré. Nous allons, dans cette note, entrer dans quelques détails sur ces équations.

(*) Hermitte, *Journal de Borchardt*, t. 52.

Darboux, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 18, p. 220.

Mathieu, Mémoire sur la résolution des équations, *annali di Mathematica pura ed applicata*, t. IV, 1862.

Equations reciproques du quatrieme degre.

2. — Nous nommerons, en généralisant la définition donnée ordinairement, *équation réciproque du quatrième degré*, celle qui jouit de cettepropriété que ses racines (nous admettons qu'elles sont en nombre égal à 4), x_1, x_2, x_3, x_4, peuvent, quand on les groupe convenablement, donner la relation

$$x_1x_2 = x_3x_4.$$

Nous désignerons par K ces deux produits égaux et, empruntant des idées qui sont développées dans les cours de mathématiques spéciales, quand on traite de l'abaissement des équations, nous allons montrer, par des considérations qui peuvent être d'ailleurs présentées dans les cours élémentaires, que l'équation réciproque du quatrième degré est quadratique.

3. — La première question qui se présente dans ce problème est, évidemment, la suivante: *Une équation du quatrième degré étant donnée, a-t-elle des racines jouissant de la propriété énoncée ci-dessus ?*

Soit $$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (1)$$

l'équation proposée ; ses racines étant désignées par x_1, x_2, x_3, x_4, supposons que $x_1x_2 = x_3x_4 = K$.

Dès lors, les quatre racines peuvent être représentées par

$$x_1, \ \frac{K}{x_1}, \ x_3, \ \frac{K}{x_3}.$$

Posons $$y = \frac{K}{x}$$

et considérons l'équation,

$$AK^4 + BK^3y + CK^2y^2 + DKy^3 + Ey^4 = 0 \qquad (2)$$

dont les racines sont $y_1 = \frac{K}{x_1}$ $\quad y_2 = \frac{K}{\frac{K}{x_1}}$

$$y_3 = \frac{K}{x_3}; \quad y_4 = \frac{K}{\frac{K}{x_3}}$$

ou encore, $$x_1, \quad \frac{K}{x_1} \quad x_3, \quad \frac{K}{x_3}.$$

De cette remarque il résulte que les équations (1) et (2) ont les mêmes racines.

4. — Du théorème élémentaire, un des premiers qu'on rencontre dans l'étude de l'algèbre, — nous voulons parler de celui qui établit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier $f(x)$ soit divisible par $(x - a)$ est $f(a) = o$, on déduit facilement, et nous ne voulons pas entrer ici dans ce détail, que les équations (1) et (2) sont identiques. On en conclut que les coefficients sont deux à deux proportionnels, et l'on peut écrire

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{DK} = \frac{C}{CK^2} = \frac{D}{BK^3} = \frac{E}{AK^4}.$$

De ces relations on déduit

$$K^2 = \frac{D^2}{B^2} = \frac{E}{A}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsqu'une equation du quatrième degré*

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o$$

est réciproque (sens général), *les coefficients extrêmes sont proportionnels aux carrés des coefficients voisins.*

Il est facile de reconnaître, et d'ailleurs sans rien emprunter aux connaissances qui sortent du cercle des mathématiques élémentaires, que la réciproque du théorème précédent est vraie.

Si les coefficients A, B, C, D, E, de l'équation générale du quatrième degré sont tels que

$$\frac{A}{E} = \frac{B^2}{D^2}, \qquad (1)$$

on a entre les racines x_1, x_2, x_3, x_4 la relation

$$x_1 x_2 = x_3 x_4.$$

Mais nous ne voulons pas insister sur cette partie théorique, qui rentre plus naturellement dans l'enseignement des mathématiques spéciales. Nous avons surtout en vue, en ce moment, le côté pratique de la résolution algébrique des équations du quatrième degré quadratiques, et nous allons maintenant effectuer cette résolution en supposant, d'abord, que les coefficients satisfont à la relation (1). (*A suivre*).

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1882

Géométrie et statique.

1. — Diviser une droite en moyenne et extrême raison; — comme application inscrire un décagone régulier dans une circonférence.

2. — On donne une sphère solide et trois points A, B, C, sur cette sphère. Décrire, avec le compas, un petit cercle passant par les points B, C, et faisant un angle donné avec le plan du grand cercle décrit de A comme pôle.

3. — On donne un polygone homogène et solide quelconque A_1, A_2, A_3,...; suivant la direction des côtés a_1, a_2, a_3,... sont appliquées des forces F_1, F_2, F_3... qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple, et que le moment de ce couple est proportionnel à la surface du polygone.

Géométrie descriptive.

On donne un point H dans le plan horizontal, à $0^m,04$ de la ligne de terre, et un point V dans le plan vertical, éloigné de la ligne de terre de $0^m,06$; on donne la longueur de la droite HV de l'espace, longueur qui est de $0^m,107$. Mener par cette droite un plan faisant un angle de 50° avec le plan bissecteur du premier dièdre.

Arithmétique et algèbre.

1. — De combien de manières peut-on décomposer le nombre 35280 en un produit de deux facteurs premiers entre eux? Le démontrer et généraliser.

2. — Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont le cercle inscrit est maximum.

ECOLE SAINT-CYR

CONCOURS DE 1882

Mathématiques.

1. Étant donnés un cercle de rayon r, et un point A dans son plan, à une distance d du centre, on suppose menée par le point A une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et le point d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné m^2, démontrer que si α désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point A, on aura la formule

$$\cos 2\alpha = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}. \qquad (1)$$

Discussion. Limites de m, quand on fait varier α, le point A étant à l'intérieur du cercle.

2. *Calcul logarithmique.* La formule (1) étant admise, calculer l'angle α à un dixième de seconde près en supposant :

(*a*) la distance d égale au plus grand segment du rayon r divisé en moyenne et extrême raison, et m égale au double de la moyenne proportionnelle entre r et d ;

(*b*) $$d = \frac{2}{3} \cdot r, \quad m = d\sqrt{3}.$$

3. On connaît dans un triangle ABC deux côtés b et c, et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté a ; calculer ce côté a et l'angle A. — On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.

Géométrie descriptive.

La base ABC d'une pyramide SABC est parallèle au plan horizontal de projection, au-dessus de ce plan, et à une distance de 24 millimètres. Le côté BC, parallèle à la ligne de terre, égale 113 millimètres, et est éloigné du plan vertical, en avant, de 15 millimetres. Les côtés AC et AB valent respectivement 101 millimètres et 76 millimètres. Le triangle SAC est isoscèle ; les angles égaux SAC et SCA valent chacun 62°, enfin l'arête SB égale 112 millimètres. On demande :

1° De construire les projections de la pyramide ;

2° De déterminer les projections du centre o de la sphère circonscrite à la pyramide ;

3° De déterminer les projections et la vraie grandeur de la section que fait dans la pyramide le plan mené par le point o parallèlement aux deux arêtes opposées AC et SB.

SOLUTION DES PROBLÈMES

DONNÉS AU CONCOURS DE L'ÉCOLE NAVALE (1882)

On donne une sphère solide et trois points A, B, C *sur cette sphère: décrire, avec le compas, un petit cercle passant par les points* B, C, *et faisant un angle donné avec le plan du grand cercle décrit de* A *comme pôle.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Un premier lieu du pôle du petit cercle cherché est le grand cercle perpendiculaire au milieu de l'arc de grand cercle BC. En outre, si j'appelle O le centre de la sphère, P le pôle du petit cercle, l'angle des rayons OA et OP est égal à l'angle des deux plans; donc l'arc de grand cercle PA est connu; il en résulte que le pôle P est sur un petit cercle décrit de A comme pôle avec un rayon sphérique donné par l'angle indi-

qué pour les deux plans. Le point P se trouvera donc à l'intersection de deux cercles de la sphère; il sera donc facile de le trouver avec le compas. Le problème aura en général deux solutions.

On donne un polygone homogène et solide quelconque $A_1A_2A_3\ldots$; *suivant la direction des côtés* a_1, a_2, a_3 ... *sont appliquées des forces* F_1, F_2, F_3 ..., *qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple, et que le moment de ce couple est proportionnel à la surface du polygone.*

On peut choisir l'échelle qui sert à représenter les forces par des droites finies de telle sorte que a_1, a_2, a_3 ... a_n aient les longueurs représentant les forces appliquées suivant ces côtés. Alors, la résultante de translation s'obtiendra en composant les forces données, transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point; nous choisirons par exemple le point A. La résultante sera le dernier côté du polygone des forces construit à partir de A_1; ce dernier polygone n'est autre que le polygone donné, lequel se ferme de lui-même; la résultante de translation est donc nulle, et par suite les forces se réduisent à un couple.

Les couples composants étant situés dans le plan de la figure, il en est de même du couple résultant; et pour avoir le moment du couple, il suffit de prendre la somme des moments des forces par rapport à un point O du plan; si l'on prend ce point à l'intérieur du polygone, il est facile de voir que la somme des moments des forces est égale au double de la surface du polygone. Si le point O était extérieur, il faudrait prendre avec le signe *moins* quelques-uns des triangles ayant pour sommet le point O et pour bases les côtés du polygone; ces triangles correspondraient à des moments négatifs; et l'on arriverait encore au même résultat.

De combien de manières peut-on décomposer le nombre 35280 *en un produit de deux facteurs premiers entre eux? Le démontrer et généraliser.*

Le nombre 35280, décomposé en facteurs premiers donne

$$35280 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Pour obtenir un produit de deux nombres premiers entre eux, il *faut* que chacun des facteurs premiers entre, dans l'un ou l'autre de ces nombres, avec son exposant propre: sans quoi, s'il entrait dans l'un des nombres avec un exposant inférieur à celui qu'indique la décomposition en facteurs premiers, on devrait en outre le retrouver dans l'autre nombre et par suite les deux facteurs ne seraient pas premiers entre eux. Il est, du reste, évident que cette condition est suffisante. Il n'y a donc pas, ici, à s'occuper de l'exposant de chaque facteur.

En général, si l'on a un nombre A, dont les facteurs premiers sont $a, b, c, d, \ldots$ de sorte que l'on a

$$A = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$$

il suffira, pour le décomposer en un produit de deux nombres premiers entre eux, de mettre chaque facteur premier avec son exposant propre dans l'un ou l'autre des deux nombres cherchés.

Cela posé, je pourrai former l'un des nombres (ce qui me donnera immédiatement l'autre) en prenant de toutes les manières possibles *un*, *deux*, *trois* ... des facteurs premiers différents qui entrent dans le nombre A; il est facile de voir que le nombre de groupes que j'obtiendrai ainsi sera le double du nombre de produits cherchés; en effet, s'il y a p facteurs premiers, quand je prends un groupe de m quelconques de ces facteurs, il en reste un groupe de $p - m$, que j'obtiendrai en prenant de toutes les manières possibles $p - m$ des facteurs donnés.

D'après cela, je pourrai prendre, dans le nombre donné :

les facteurs	un à un,	ce qui donne	4 produits
—	deux à deux	—	6 —
—	trois à trois	—	4 —

J'aurai ainsi 14 produits ; donc, d'après ce que je viens de dire, il y aura 7 manières différentes de décomposer le nombre 35280 en deux facteurs premiers entre eux. J'ai négligé le produit du nombre donné par 1, que l'on peut considérer comme ne répondant pas à la question.

Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, trouver celui dont le cercle inscrit est maximum.

Appelons x, y, les côtés de l'angle droit, z l'hypoténuse, et R le rayon du cercle inscrit.

Nous avons, entre ces quatre quantités, la relation

$$x + y = z + 2R.$$

Donc, en appelant $2p$ le périmètre, nous avons immédiatement

$$z = p - R.$$

D'autre part, x et y sont liées aux deux quantités p et R par les deux équations

$$x^2 + y^2 = (p - R)^2,$$
$$xy = 2pR.$$

la première étant une conséquence immédiate de ce qui précède et la seconde donnant deux expressions du double de la surface du triangle.

D'après cela, si l'on considère x et y comme les racines de l'équation

$$X^2 - AX + B = 0,$$

on a, pour déterminer A et B, les relations

$$B = 2pR,$$
$$A^2 - 2B = (p - R)^2\ ;$$

donc

$$A^2 = (p + R)^2$$

et comme A doit être positif, il vient $A = p + R$.

Par suite l'équation qui donne x et y est

$$X^2 - (p + R)\,X + 2pR = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$(p + R)^2 - 8pR \geq 0.$$

A la limite, le triangle sera isoscèle : il faut pour cela que l'on ait

$$R^2 - 6pR + p^2 = 0\ :$$

d'où

$$R = p(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

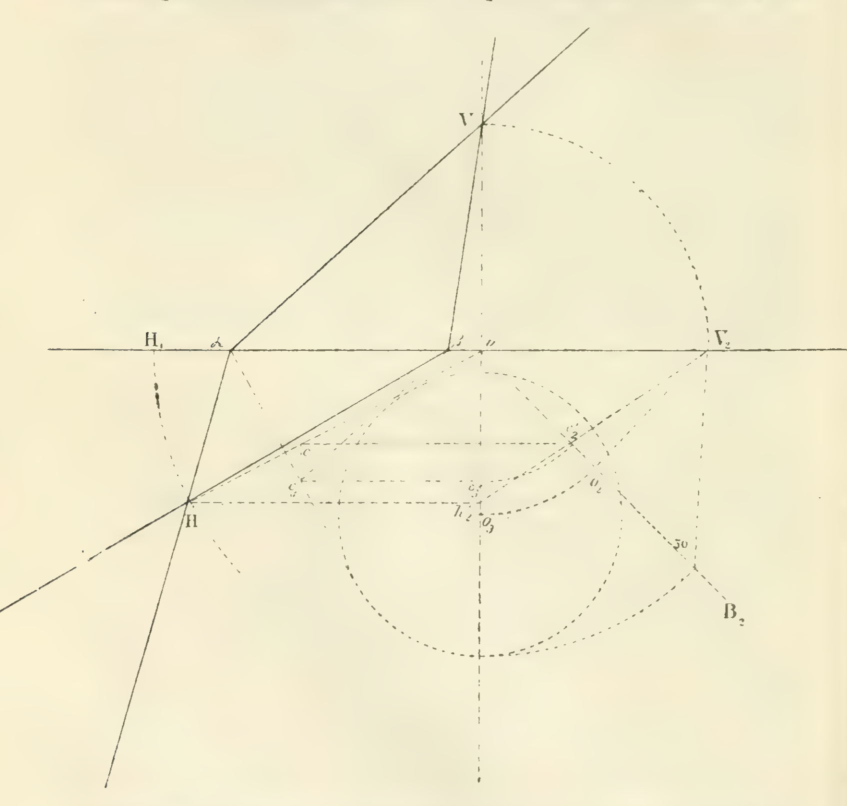
Comme R doit être inférieur à p, nous devons rejeter le signe $+$, et par conséquent, R devant toujours être en dehors des deux racines pour que le trinôme soit positif, nous voyons que la valeur maxima de R est donnée par l'expression

$$R = p\,(3 - 2\sqrt{2})$$

On donne un point H *dans le plan horizontal, à* $0^m,04$ *de la ligne de terre, et un point* V *dans le plan vertical, éloigné de la ligne de terre de* $0^m,06$ *: on donne la longueur de la droite*

HV *de l'espace, longueur qui est de* 0,107. *Mener par cette droite un plan faisant un angle de* 50° *avec le plan bissecteur du premier dièdre.*

1° Pour déterminer la position du point H, le point V étant pris arbitrairement sur le plan vertical à 0,06 de la



ligne de terre, on cherche le point H_1 de cette dernière ligne situé à une distance de V égale à 0,107. Puis, de la projection horizontale v du point V, comme centre, avec vH_1 comme rayon, on décrit un arc de cercle qui rencontre au point H une parallèle à la ligne de terre menée à une distance de 4 centimètres. La ligne vH est la projection horizontale de la droite donnée.

2° On prend comme nouveau plan vertical le plan de profil passant par V. On a ainsi en vB_2 la trace du plan bissecteur, et en $V_2h'_2$ la nouvelle projection verticale de VH. On a ainsi immédiatement le point d'intersection de la droite VH avec le plan bissecteur ; ce point se projette en (c, c'_2).

3° Le plan cherché rencontre le plan bissecteur suivant une droite facile à déterminer, car elle est tangente à un cercle obtenu de la manière suivante : son centre est en o_2, pied de la perpendiculaire abaissée de V_2 sur la trace vB_2 du plan bissecteur, et son rayon est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est V_2o_2, et l'angle opposé vaut 50°. En rabattant le plan bissecteur sur le plan horizontal, on peut construire le cercle précédent ; le point C se rabat en c_3 ; de ce point, je mène une tangente au cercle ; cette tangente rencontre la ligne de terre en α ; le point α appartient aux traces du plan cherché ; du reste, ces traces passent l'une par H et l'autre par V. On a une seconde solution en menant la seconde tangente, qui rencontre la ligne de terre en β. Le second plan est $H\beta V$.

$\left(\text{L'épure est à l'échelle de } \frac{1}{2}.\right)$

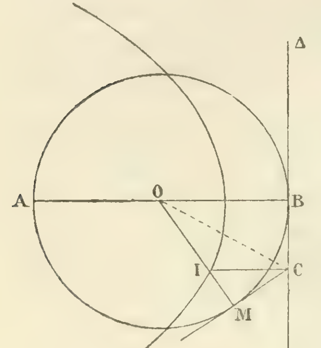
QUESTION 20

Solution par M. L. Germain, élève au Collège ecclésiastique de Belley.

On considère un cercle de centre O, *un diamètre* AB *et la tangente* Δ *à l'extrémité* B *de ce diamètre. La tangente en un point quelconque* M *de la circonférence rencontre* Δ *en un point* C, *par lequel on mène une parallèle à* AB *jusqu'à sa rencontre avec le rayon* OM. *Soit* I *ce point de rencontre ; trouver le lieu du point* I *quand* M *parcourt la circonférence proposée.* (G. L.)

La droite CO, qui joint le point d'intersection des tangentes CB, CM au centre de la circonférence, est bissectrice de

l'angle BOM ; les angles BOC, COM étant égaux, le triangle OIC est isoscèle, puisque les angles ICO et COB sont égaux comme alternes-internes, donc IO = IC.



Le point I, étant à égale distance du point O et de la tangente Δ, appartient à une parabole dont le foyer est le point O, et la directrice la droite Δ.

On démontrerait de même que toute autre position du point I jouit des mêmes propriétés.

Donc, le lieu du point I, lorsque M parcourt la circonférence, est une parabole ayant pour foyer le centre O de la circonférence et pour directrice la tangente Δ à cette même circonférence.

Nota. — La même question a été résolue par MM. P. et R. Godefroy, à Lyon ; Pigeaud, à Châteauroux ; Quintard, à Arbois ; Deville, à Lorient ; Bréville, lycée Louis-le-Grand, à Paris ; Puig, à Montpellier ; Finat, à Moulins ; Dhaillot, à Nantes, de Longuy, au lycée Henri IV, à Paris ; Kahls, à Grenoble ; Caffarel, à Marseille ; Barthe, Matha, institution Chassin, à Paris ; Vygy, à Vitry-le-Français.

QUESTION 21

Solution par MM. Lenoir et Vail, École Albert-le-Grand (Arcueil.)

On donne un cercle du centre O, *un diamètre* AB *et les tangentes* Δ, Δ′ *aux extrémités de ce diamètre. Une tangente variable* Δ″ *au cercle rencontre* Δ *en* C, *et* Δ′ *en* D. *Par le point* C, *on mène une parallèle à* AB, *parallèle qui rencontre le rayon* OD *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* Δ″ *roule sur le cercle* O. (G. L.)

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons la perpendiculaire IH sur AB.

Les triangles OIH, IMC étant égaux (BC = CM = IH, MCI = OIH), il en résuste que OI = IC.

Donc le lieu du point I est une parabole ayant O pour foyer et la tangente Δ pour directrice.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Simonet, maître répétiteur au lycée de Chaumont ; Euvert, au lycée Louis-le-Grand ; Vazou, collège Rollin ; Pigeaud, lycée de Châteauroux, Thubiz, à Versailles ; Barthe et Matha, institution Massin, à Paris ; Puig, à Montpellier ; Quintard à Arbois ; P. et R. Godefroy, à Lyon.

QUESTION 25

Quatre points A, B, C, D *étant situés sur une circonférence, démontrer que la droite* M *qui joint les milieux des arcs opposés* AD, BC *coupe à angle droit la droite* M *qui joint les milieux des autres arcs* AB, DC. *Voir ce qui arrive si trois des points* A, B, C, D *se confondent en un seul.*

Cette propriété est absolument évidente, l'angle formé par les droites M et M′ ayant pour mesure la moitié d'une demi-circonférence.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Simonet, au lycée de Chaumont ; Vail, H. Lenoir, école Albert-le-Grand (Arcueil) ; Pigeaud, Berthelot, à Châteauroux ; Perejol, collège du Vigan ; Julet, à Laferté-Gaucher ; Pelletier, à Blanzac ; R. Godefroy, à Lyon ; Matha, instituteur ; Massin, à Paris ; Simon Dupuis, à Lons-le-Laulnier ; Puig, à Montpellier ; Thubiz, à Versailles ; Dérôme, à Valenciennes ; Quintard, à Arbois.

QUESTIONS PROPOSÉES

44. — On considère un cercle et un diamètre AB ; d'un point M, pris sur la circonférence, on abaisse une perpendiculaire MP sur AB. Soit C le milieu de PB. Prenons enfin entre A et B un point D tel que

$$AD = \frac{PB}{4}.$$

Les droites MC et MD rencontrent le cercle en des points C′ et D′. Démontrer que l'on a, entre les arcs BM, BC′, AD′, la relation

$$MB = 2BC' + AD'. \qquad (G.\ L.)$$

45. — On considère un cercle C et deux rayons rectangulaires OA et OB; les tangentes aux points A et B, supposés fixes, forment avec une troisième tangente mobile un triangle rectangle. On imagine le cercle circonscrit à ce triangle, et l'on propose de démontrer que ce cercle est constamment tangent à un cercle fixe que l'on déterminera.

(G. L.)

46. — On donne l'axe Ox, le sommet O, et un point M d'une parabole; on propose de construire cette courbe point par point au moyen d'une équerre. *(G. L.)*

47. — Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les deux aiguilles d'une horloge de façon que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge? *(Laisant.)*

48. — On donne une circonférence et dans cette circonférence une corde fixe AB. Soit C le point de rencontre des tangentes en A et B à la circonférence; on prend un point M quelconque sur la circonférence, on mène les droites MA, MB, et par le point C une parallèle à la tangente en M: cette parallèle rencontre MA au point P, MB au point Q; démontrer que PQ est constant. *(Mannheim.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 15542-2.

ÉQUATIONS QUADRATIQUES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir page 156.)

5. — On peut donner à l'équation réciproque du quatrième degré (sens général) une forme remarquable, en établissant, comme nous allons le faire, le théorème suivant :

Théorème. — *On peut toujours ramener l'équation réciproque du quatrième degré* (sens général) *à la forme :*

$$\alpha^2 x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0.$$

Supposons B différent de zéro, car si B était nul on aurait nécessairement $D = 0$, en vertu de la relation établie tout à l'heure,

$$AD^2 = B^2E,$$

et l'équation proposée serait bicarrée, cas particulier trop connu pour que nous ayons à nous en occuper ici.

Ainsi B n'est pas nul et nous pouvons poser

$$x = \frac{A}{B^2}\, X$$

X est une nouvelle inconnue déterminée par l'équation

$$\frac{A^4}{B^6} X^4 + \frac{A^2}{B^3} X^3 + \frac{AC}{B^2} X^2 + DX + D^2 = 0$$

et, en posant $\quad \frac{A^2}{B^3} = \alpha, \quad \frac{AC}{B^2} = \beta, \quad D = \gamma,$

on a bien $\quad \alpha^2 X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \gamma^2 = 0.$

6. — Sous cette forme il est facile maintenant de reconnaître que l'équation réciproque (sens général) est quadratique.

Écrivons, en effet, cette équation sous la forme

$$\alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} + \alpha X + \frac{\gamma}{X} + \beta = 0$$

et posons $\quad \alpha X + \frac{\gamma}{X} = y,$

on en tire $\quad \alpha^2 X^2 + \frac{\gamma^2}{X^2} = y^2 - 2\alpha\gamma,$

et l'on a pour déterminer y l'équation

$$y^2 + y + \beta - 2\alpha\gamma = 0.$$

Si l'on désigne par y' et y'' les deux racines de cette équation, les inconnues cherchées sont les racines des deux équations :

$$\alpha X^2 - y'X + \gamma = 0,$$
$$\alpha X^2 - y''X + \gamma = 0.$$

Le problème proposé se résout donc au moyen de trois équations du second degré; c'est un problème quadratique.

7. — Nous ferons ici remarquer que dans la pratique il n'est nullement nécessaire de faire subir à l'équation considérée la transformation précédente. Celle-ci a surtout un intérêt théorique ; et elle permet d'écrire, sous une forme symétrique et facile à retenir, l'équation réciproque du quatrième degré.

Reprenons en effet la première forme, soit

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

l'équation proposée ; nous supposons que l'on ait

$$E = \frac{D^2A}{B^2};$$

auquel cas, et encore une fois dans le sens général que nous attribuons à ce mot, l'équation est réciproque.

On peut écrire celle-ci

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{D^2A}{B^2} = 0$$

ou

$$\frac{A}{B^2}\left(B^2x^2 + \frac{D^2}{x^2}\right) + Bx + \frac{D}{x} + C = 0$$

et en posant

$$Bx + \frac{D}{x} = y$$

on voit, comme tout à l'heure, que l'équation est quadratique et se résout par trois équations du second degré.

8. — *Résolution directe de l'équation réciproque.*

On peut éviter, pour la résolution de l'équation réciproque, l'emploi d'une inconnue auxiliaire, et décomposer immédiatement le premier membre de l'équation en deux facteurs réels ou imaginaires du second degré.

Posons $\varphi = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{D^2A}{B^2}$

et $$U = B(B^3 - 4ABC + 8A^2D);$$
on voit sans difficulté que l'on a
$$A.\varphi = \left(Ax^2 + \frac{Bx}{2} + \frac{DA}{B}\right)^2 + \frac{U}{4B^2}x^2.$$
Si l'on suppose $U < o$, l'expression sera décomposée en deux facteurs réels du second degré; si $U = o$, on a un carré parfait; enfin dans l'hypothèse $U > o$ on a deux facteurs du second degré à coefficients imaginaires et de la forme $(a + bi)$.

9. — *Décomposition de l'équation réciproque en deux trinômes réels du second degré.*

On peut éviter d'ailleurs la décomposition du premier membre de l'équation proposée en deux facteurs imaginaires du second degré en opérant comme nous allons l'indiquer, et conformément à la méthode de Ferrari pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Reprenons l'équation proposée sous la forme
$$\alpha^2x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = o;$$
on peut l'écrire
$$\left(\alpha x^2 + \frac{x}{2} + \lambda\right)^2 - \left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\lambda - \gamma\right)x - \lambda^2 + \gamma^2 = o$$
Disposons maintenant du paramètre λ, par la condition
$$(\lambda - \gamma)^2 = 4\ (\lambda^2 - \gamma^2)\left(2\alpha\lambda - \beta + \frac{1}{4}\right).$$
C'est une équation du troisième degré en λ, mais on aperçoit la racine $\lambda = \gamma$ et cette équation peut s'écrire
$$(\lambda - \gamma)\ \left\{2\alpha\lambda^2 + \lambda\,(2\alpha\gamma - \beta) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\right\} = o.$$
L'équation $2\alpha\beta^2 + \beta\,(2\alpha\gamma - \lambda) + \gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = o$

a deux racines réelles ou imaginaires, λ', λ''. Si $\lambda = \gamma$ ne donne pas la décomposition en deux facteurs réels du second degré, on peut être certain, bien que nous ne puissions pas en donner ici la raison sans entrer dans de longs détails, que l'une des racines λ' ou λ'' donne la décomposition désirée.

Il résulte de là qu'une équation réciproque (sens général) du quatrième degré pourra toujours se décomposer en deux trinômes réels du second degré; mais la méthode que nous

venons d'exposer est surtout avantageuse quand cette décomposition réussit avec la racine $\lambda = \gamma$.

10. — L'équation du quatrième degré est encore quadratique dans un cas particulier remarquable, cas qui présente la plus grande analogie avec celui des équations réciproques que nous venons d'étudier.

Le cas dont nous voulons parler est celui où l'on suppose que les racines x_1, x_2, x_3, x_4 jouissent de la propriété de pouvoir être séparées en deux groupes tels que, les racines étant convenablement choisies, la somme des deux racines qui constituent le premier groupe est égale à la somme des deux autres racines.

Il est facile de reconnaître, et par des raisonnements élémentaires, que si l'on considère l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

ayant pour racines x_1, x_2, x_3, x_4, la relation

$$8r = p(4q - p^2)$$

représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

les racines étant convenablement groupées.

Dans ce cas l'équation proposée peut s'écrire :

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{r}{p}\right)^2 - \frac{r^2}{p^2} + s = 0.$$

Son premier membre se décompose en deux facteurs réels ou imaginaires du second degré ; dans tous les cas le problème que résout l'équation est un problème quadratique.

11. — Les équations du troisième degré quadratiques sont ordinairement celles dont une racine peut être mise en évidence. Cette remarque très simple est pourtant souvent utile et nous allons l'appliquer à quelques exemples.

1° *Résoudre l'équation,*

$$x^3 - 3\alpha\beta x + \alpha^3 + \beta^3 = 0.$$

On a identiquement

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - zy - zx - xy).$$

D'après cette remarque l'équation peut s'écrire :

$$(x + \alpha + \beta)(x^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha x - \beta x - \alpha\beta) = 0.$$

On aperçoit la racine x_1,

$$x_1 = -\alpha - \beta$$

et les deux autres racines sont données par l'équation

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 0.$$

Ce sont des nombres imaginaires, x_2, x_3 ;

$$x_2 = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta)$$

$$x_3 = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta).$$

2° *Résoudre l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \alpha} + \frac{1}{x + \beta} + \frac{1}{x + \alpha + \beta} = 0.$$

En groupant convenablement les termes, on écrit cette équation sous la forme :

$$(2x + \alpha + \beta)\left\{\frac{1}{x(x + \alpha + \beta)} + \frac{1}{(x + \alpha)(x + \beta)}\right\} = 0.$$

On aperçoit ainsi la racine x_1.

$$x_1 = -\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Les deux autres racines x_2, x_3 sont données par l'équation.

$$2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0.$$

On trouve les nombres réels

$$x_2 = -\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$x_3 = -\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

3° *Résoudre l'équation*

$$(x + p)(x + p + 1)(x + p + 2)(x + p + 3)$$
$$-(x + q)(x + q + 1)(x + q + 2)(x + q + 3) = 0.$$

C'est une équation du troisième degré ; pour apercevoir une racine de cette équation on peut remarquer que l'on a, identiquement,

$$(x + \alpha)(x + \alpha + 1)(x + \alpha + 2)(x + \alpha + 3) + 1$$
$$= [(x + \alpha)^2 + 3(x + \alpha) + 1]^2.$$

En appliquant cette formule 1° à l'hypothèse $\alpha = p$; 2° en supposant $\alpha = q$, on trouve que le premier membre de l'équation proposée se décompose en deux facteurs : on

trouve d'abord la racine x_1

$$x_1 = -\frac{p+q+3}{2}.$$

Les deux autres racines x_2. x_3 sont donnéespar l'équation du second degré

$$2x^2 + 2x(p+q+3) + p^2 + q^2 + 3p + 3q + 2 = 0.$$

On pourra examiner en particulier le cas où $p = q + 1$ et aussi celui où $p = q + 2$.

12. — Nous ferons connaître en terminant cette note un procédé souvent commode pour reconnaître qu'une équation donnée est quadratique. La méthode dont nous voulons parler suppose que dans l'équation donnée un certain paramètre α entre au second degré, de telle sorte qu'on puisse écrire celle-ci sous la forme $P\alpha^2 + Q\alpha + R = 0$,
P, Q, R étant des fonctions de l'inconnue x. Si la fonction $Q^2 - 4PR$ est un carré parfait, l'équation se décompose en deux facteurs rationnels et le problème considéré est quadratique.

Cette remarque s'applique, bien entendu. aux équations bicarrées par rapport au paramètre considéré α.

Considérons, par exemple, l'équation

$$x^3 - (4m^2+3)x^2 + 4m^2(m^2+2)x - 4(m^4-1) = 0.$$

Il est assez difficile d'apercevoir, sous cette forme, une racine de l'équation. Ordonnons-la par rapport au paramètre m; et l'ayant écrite sous la forme

$$4m^4(x-1) + 4m^2x(2-x) + x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

si l'on cherche à décomposer ce trinôme bicarré en m, on trouve, sous le radical,

$$4[x^2(2-x)^2 - (x-1)(x^3 - 3x^2 + 4)] = 4(x-2)^2.$$

On peut donc écrire le premier membre sous la forme

$$(x - 2m^2 - 2)\{x^2 - (1+2m^2)x + 2(m^2-1\} = 0.$$

On a ainsi les racines de l'équation proposée: l'une x_1,

$$x_1 = 2(m^2+1)$$

et les deux autres x_2, x_3, fournies par l'équation

$$x^2 - (1+2m^2)x + 2(m^2-1) = 0.$$

On vérifie d'ailleurs que les racines de cette équation sont réelles.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE

Par M. E. **Catalan** (*).

1. — Problème I. — *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés,* $\beta, \gamma, \ldots \pi$*?*

Soit N le nombre cherché. On sait (**) que

$$N = n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \ldots \quad (1)$$

Dans cette formule, le symbole $\left(\frac{n}{a}\right)$ représente *le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{a}$ (***).

2. — Théorème I. — *Soit* n *un nombre entier, compris entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement) ; *soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers supérieurs à* 2. *On a*

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \ldots = k + 1 \ (2)(****)$$

Dans la suite $1, 2, 3, \ldots n$,
les seuls nombres premiers avec

$$\beta = 3, \gamma = 5, \delta = 7, \ldots$$

sont $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^k$.

Ainsi, $N = k + 1$.

3. — Remarque. — De $n = 4$ à $n = 14$, le premier membre se réduit à $n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right)$;

(*) *Extrait des Mémoires de la Société royale des sciences de Liége.*

(**) *Mélanges mathématiques*, p. 133. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, 1881, p. 296, etc.

(***) Il a la même signification que celui de Legendre : $E\left(\frac{n}{a}\right)$.

(****) L'égalité (2), à peu près évidente, est une simple variante de celle-ci :

$$n - \sum\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right) - \sum\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right) + \ldots = 1,$$

qu'on trouve à la page 134 des *Mélanges*.

De $n = 15$ à $n = 104$ (*), ce premier membre se réduit à

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right);$$

et ainsi de suite.

4. — Problème II. — *Connaissant les nombres premiers qui ne surpassent pas* n, *trouver combien il y a de nombres premiers compris entre* n + 1 *et* 2n.

Soit π le plus grand nombre premier, non supérieur à n. De 1 à $2n$, les nombres non divisibles par

$$\beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7, \ldots \pi.$$

sont, d'une part, $1, 2, 2^2, \ldots 2^{k+1}$;
et, en second lieu, les nombres premiers compris entre $n + 1$ et $2n$. Soit x la *quotité* (**) de ceux-ci. Nous avons, en vertu de l'égalité (2),

$$k + 2 + x = 2n \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right) + \ldots \quad (3)$$

5. — Application. — *Entre* 25 *et* 50, *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Dans cet exemple,

$$n = 25, \; 2n = 50, \; k = 4.$$

En outre, les diviseurs *simples* sont :

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;$$

et les diviseurs *composés* :

$$15, 21, 33, 39, 35.$$

Par conséquent,

$$6 + x = 50 - [16 + 10 + 7 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2] + [3 + 2 + 1 + 1 + 1];$$

d'où

$$x = 6.$$

En effet, entre 25 et 50, il y a *six* nombres premiers ; savoir :

$$29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

6. — Remarque. — La combinaison des égalités (2), (3) donne celle-ci :

(*) $15 = 3.5. \quad 104 = 3.5.7 - 1.$

(**) J'emploie ce mot pour éviter : *nombre des nombres.*

$$\left.\begin{aligned} k-x=&\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta}\right)\right]-\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right)\right]\\ &+\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right)\right]-\ldots \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Pour simplifier le second membre, on peut s'appuyer sur la proposition suivante.

7. — Lemme — *Selon que* $\left(\frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{a}}\right)$ *est* pair *ou* impair,

$$\left(\frac{2\mathrm{n}}{\mathrm{a}}\right)-2\left(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{a}}\right)$$

égale zéro ou un.

1° De $$2n = a\,.2\mu + r$$

on déduit $$n = a\mu + \frac{r}{2}.$$

Donc, à cause de $r < a$, μ *est le quotient entier de* n *par* a (*). Autrement dit :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu = 2\left(\frac{2n}{a}\right),\quad \left(\frac{n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 0.$$

2° Soit $$2n = a(2\mu + 1) + r;$$

et, par conséquent $$n = a\mu + \frac{a+r}{2}.$$

De $r < a$, on conclut $\frac{a+r}{2} < a$: μ *est le quotient entier de* n *par* a. Nous avons donc, simultanément,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu + 1,\ \left(\frac{n}{a}\right) = \mu,\quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 1.$$

8. — Revenons à la formule (4). En vertu du lemme; *chacun des binômes* soumis au signe Σ *égale* 0 *ou* 1, *selon que son premier terme est pair ou impair.*

D'après cela, si l'on appelle :

I_1, *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2\mathrm{n}}{\beta}\right)$, *qui sont impairs ;*

I_2, *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2\mathrm{n}}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs :*

. . . .

l'égalité (4) peut être énoncée ainsi :

(*) Ce petit théorème se trouve dans tous les Traités d'arithmétique.

Théorème II. — *En conservant les hypothèses et les dénominations précédentes, on a*

$$x = k - l_1 + l_2 - l_3 + \dots \qquad \text{(A)}$$

9. — Application. — *Entre* 25 *et* 50, *combien y-a-t-il de nombres premiers?*

Je divise 50

par	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23;
			+		+			

puis par	15,	21,	33,	39,	35,
	+		+	+	+

en négligeant les quotients pairs.

Je trouve $l_1 = 2$, $l_2 = 4$; donc

$$x = 4 - 2 + 4 = 6;$$

comme ci-dessus.

10. — Autre application. — *De* 61 *à* 120, *combien y-a-t-il de nombres premiers?*

$$n = 60, \quad k = 5.$$

Dividende : 120

Premiers diviseurs :

3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,
		+		+	+		+		+	+
			41,	43,	47,	53,	59			$l_1 = 6$.

Deuxièmes diviseurs :

15,	21,	33,	39,	51,	57,	69,	87,	93,	111,	35,	
	+	+	+			+	+	+	+	+	
	55,	65,	85,	95,	115,	77,	91,	119			
		+	+	+	+	+	+	+			$l_2 = 15$.

Troisièmes diviseurs : 105
+ $l_3 = 1$.

$$x = 5 - 6 + 16 - 1 = 13.$$

Les *treize* nombres premiers compris entre 61 et 120 (inclusivement) sont

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

11. — Remarque. — Si l'on admet qu'*entre* n + 1 *et* 2n,

il y a, au moins, un nombre premier (*), l'égalité (A) donne

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \geqq 1. \qquad \text{(B)}$$

Inversement, si l'on pouvait, *a priori*, établir la relation (B), le *postulatum* serait démontré (**).

12. — Théorème III. — n *étant toujours un nombre entier, compris entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$, *soient* β, γ, δ, ... *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *Soient, en outre:*

λ_1 *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs ;*

λ_2 *le nombre de ceux des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs ;*

. . . .

On a $$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k. \qquad \text{(C)}$$

Ce théorème, conséquence des égalités

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 1 \qquad (2)$$

$$2n - \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 3, \qquad (2')(***)$$

résulte aussi du théorème II.

Soient, en effet, ρ, σ, θ, ... ω les x nombres premiers, compris entre $n + 1$ et $2n$.

Chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\rho}\right)$, $\left(\frac{2n}{\sigma}\right)$, $\left(\frac{2n}{\theta}\right)$, ... égale 1 ; et chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\beta\rho}\right)$, $\left(\frac{2n}{\rho\sigma}\right)$, ... *est nul* (****). Donc

$$\lambda_1 = l_1 + x, \quad \lambda_2 = l_2, \quad \lambda_3 = l_3, \ \ldots$$

Par suite, l'égalité (A) devient

$$x = k - (\lambda_1 - x) + \lambda_2 - \lambda_3 + \ldots,$$

ou $$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \ldots = k. \qquad \text{(C)}$$

13. — Application. — $n = 25$, $k = 4$.

Dividende : 50.

(*) Cette proposition ne diffère pas, au fond, du *postulatum* de M. Bertrand, démontré par M. Tchebychev (*Journal de Liouville*, t. XVII, p. 381).

(**) *Nouvelle Correspondance mathematique*, t. VI, p. 263.

(***) Voyez les paragraphes 6 et 8.

(****) A cause de $\beta > 2$, $\rho > n$.

Premiers diviseurs :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

+ + + + + + + + $\lambda_1 = 8$.

Deuxièmes diviseurs :

15, 21, 33, 39, 35.

+ + + + $\lambda_2 = 4$

$8 - 4 = 4$.

14. — Remarque. — La fonction qui constitue le premier membre de l'égalité (C) dépend, *uniquement*, de n : appelons-la F (n). *Cette fonction conserve la même valeur quand* n *varie entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement). En outre, *chaque fois que* n *dépasse une nouvelle puissance de* 2, F (n) *augmente d'une unité*. Cet exemple de discontinuité, analogue à celui que présente la fonction E(x), nous paraît remarquable.

15. — *Sur une équation indéterminée.* L'identité

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)^2(\beta-2\alpha)^2+27\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2=4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^3, \quad \text{(D)}$$

facile à vérifier, donne une infinité de solutions, en nombres entiers, de

$$x^2 + 3y^2 = z^3. \quad (5)$$

En effet, on peut prendre

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha),\; y = \frac{3}{2}\alpha\beta(\alpha-\beta),$$

$$z = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2. \quad (6)$$

Ces valeurs seront entières, si α, β sont de *même parité*.

16. — Remarque. — Ces formules ne donnent pas toutes les solutions. Par exemple, on n'en saurait déduire

$$x = y = z = 4.$$

17. — *Autres identités.*

$$(a^2+b^2)^4 = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)^2 + [4(a^2 - b^2)ab]^2$$

$$= (a^4 + b^4)^2 + (2a^3b)^2 + (2a^2b^2)^2 + (2ab^3)^2. \quad \text{(E)}$$

Ainsi, $(a^2+b^2)^4$ *est : un carré ; une somme de deux carrés ; une somme de quatre carrés*. Généralement, ce nombre n'est pas la somme de trois carrés.

M. Realis, à qui j'avais communiqué les identités (D), (E), m'a répondu par l'intéressante note suivante :

I. La résolution de l'équation

$$x^2 + 3y^2 = z^3$$

en nombre entiers se rattache directement à la théorie générale développée par Lagrange dans le § IX des *Additions à l'Analyse indéterminée d'Euler*.

Le nombre z, diviseur du premier membre, ne peut être que de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$; on a donc l'identité

$$\alpha^2(\alpha^3 - 9\beta^2)^2 + 3\beta^2(3\alpha^2 - 3\beta^2)^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2)^2.$$

Quant à l'égalité $4^2 + 3 . 4^2 = 4^3$, où 4^2 est facteur commun à tous les termes, elle ne conduit pas à une solution: car en écrivant, comme on doit le faire, $1^2 + 3 . 1^2 = 4 . 1^3$, on n'a pas un cube dans le second membre.

Quant, enfin, à l'identité

$$(\alpha + \beta)^2(\alpha - 2\beta)^2(\beta - 2\alpha)^3 + 27\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)^2$$
$$= 4(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)^3,$$

rapportée par M. Catalan, elle n'est manifestement qu'une transformée de celle qui précède.

II. L'expression $(a^2 + b^2)^4$ est assurément : un carré, — une somme de deux carrés, — une somme de quatre carrés. On ne peut pas affirmer qu'elle est généralement une somme de trois carrés effectifs, puisque $(1^2 + 1^2)^4 = 16$, par exemple, ne l'est pas. Cependant, pour des nombres a, b premiers entre eux (ou simplement inégaux), on peut mettre en évidence, par des formules, que l'expression considérée est toujours une somme de trois carrés.

1° Si a et b sont premiers avec 3, posons l'identité

$$a^2 + (a + 3h)^2 = (a + h)^2 + (a + 2h)^2 + (2h)^2, \text{ [1]}$$

dans laquelle on prendra a premier avec h; il s'en déduit, par l'emploi répété de la formule connue

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 + (2\alpha\gamma)^2 + (2\beta\gamma)^2,$$

le théorème général exprimé par la relation

$$[a^2 + (a + 3h)^2] = A^2 + B^2 + C^2,$$

où A, B, C sont des entiers dont aucun n'est nul, et m est une puissance de 2.

Il s'ensuit, comme corollaire, que : a et b étant deux entiers, dont un seul divisible par 3, et m désignant une puissance de 2, l'expression $[2(a^2 + b^2)]^m$ est la somme de trois carrés.

---

[1] Lettre de M. Catalan à D. B. Boncompagni, en date de « Liège, 15 décembre 1880 ».

2° Si l'un des nombres a, b, premiers entre eux, est un multiple de 3, par exemple, $a = 3a'$, on pose l'identité
$(9a'^2 + b^2)^2 = (7a'^2 - b^2)^2 + 16a'^2(a' + b)^2 + 16a'^2(a' - b)^2$,
et l'on en déduit, comme ci-dessus, la relation

$$(9a'^2 + b^2)^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

en nombres entiers, m étant une puissance de 2.

Observation. — Tout ce qui précède est entièrement indépendant de la *Théorie des nombres* proprement dite; on n'y fait usage que de formules directes, exprimant les propositions, et indiquant en même temps les calculs à effectuer. Mais si l'on sort des éléments, et que l'on s'appuie sur les théorèmes de l'arithmétique supérieure, toutes les propositions énoncées, et bien d'autres, se présentent comme des conséquences immédiates de ce principe, que : *tout bicarré impair, autre que l'unité, est la somme de trois carrés.* D'après ce principe (qui ne se démontre pas à l'aide de simples identités algébriques), *un nombre de la forme* $(a^2 + b^2)^4$ *est toujours décomposable en trois carrés, s'il ne se réduit pas à une puissance de* 2.

SOLUTION DES PROBLÈMES

DONNÉS AU CONCOURS DE L'ÉCOLE SAINT-CYR (1882)

Étant donnés un cercle de rayon r, *et un point* A *dans son plan, à une distance* d *du centre, on suppose menée par le point* A *une sécante telle que la somme des carrés des segments compris entre ce point et les points d'intersection avec la circonférence soit égale à un carré donné* m^2. *Démontrer que, si* α *désigne l'angle que la sécante fait avec le diamètre passant par le point* A, *on aura la formule* $\cos 2\alpha = \dfrac{m^2 - 2r^2}{2d^2}$: (1)

Discussion. — *Limites de* m, *quand on fait varier* α, *le point* A *étant à l'intérieur du cercle.*

Les valeurs des segments AB et AC sont les racines de l'équation $r^2 = d^2 + x^2 - 2dx \cos \alpha$

fournie par la considération du triangle OAB ou du triangle OAC. En écrivant cette équation sous la forme

$$x^2 - 2dx \cos \alpha + d^2 - r^2 = 0,$$

nous avons, pour déterminer l'angle α, la condition

$$4d^2 \cos^2 \alpha - 2d^2 + 2r^2 = m^2;$$

ou bien, en divisant par $2d^2$:

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{m^2 - 2r^2}{2d^2}.$$

C'est bien la relation (1) à établir.

Pour que l'angle 2α existe, il faut et il suffit que le carré de son cosinus soit inférieur à l'unité, ce qui donne

$$(m^2 - 2r^2)^2 - 4d^4 < 0$$

ou $$[m^2 - 2(r^2 - d^2)] [m^2 - 2(r^2 + d^2)] < 0.$$

Donc, d étant inférieur à r, on voit que m^2 doit être compris entre $2(r^2 - d^2)$ et $2(r^2 + d^2)$.

La valeur minima correspond à $\alpha = 90^0$; la valeur maxima correspond à $\alpha = 0$, ce qu'il serait facile de vérifier par une figure.

La formule (1) *étant admise, calculer l'angle α à un dixième de seconde près en supposant:*

(a) *La distance* d *égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et* m *égal au double de la moyenne proportionnelle entre* r *et* d;

(b) $d = \frac{2}{3} r$ *et* $m = d\sqrt{3}$.

Le premier cas nous donne

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2 \sin 18^0,$$

et $$\alpha = 25^0\ 54'\ 49''.1.$$

La seconde hypothèse donne

$$\cos 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

d'où $$\alpha = 69^0.17'.42''.7.$$

On connait, dans un triangle ABC, *deux côtes* b *et* c, *et l'on sait que ce triangle est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté* a. *Calculer ce côté* a *et l'angle* A. —

On établira les deux équations propres à déterminer chaque inconnue indépendamment de l'autre, et on montrera la concordance des résultats que fournit leur discussion.

On a d'abord, entre les données et les inconnues, l'équation
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Puis, la condition énoncée donne
$$a^2\sqrt{3} = 2bc \sin A.$$

L'élimination de a se fait immédiatement et donne l'équation
$$\sin A + \sqrt{3} \cos A = \frac{(b^2 + c^2)\sqrt{3}}{2bc}.$$

On en tire $\sin (A + 60) = \dfrac{(b^2 + c^2)\sqrt{3}}{4bc}$.

La condition de réalité est
$$3(b^2 + c^2)^2 - 16b^2c^2 < 0$$
ou
$$b^4 - \frac{10}{3} b^2c^2 + c^4 < 0.$$

Cette condition devient
$$(b^2 - 3c^2)(b^2 - \frac{1}{3}c^2) < 0.$$

D'autre part on a
$$2bc \sin A = a^2\sqrt{3}$$
$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2;$$
$$\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A = (b^2 + c^2) \sin \left(A + \frac{\pi}{3}\right);$$
en élevant au carré et ajoutant membre à membre. on trouve pour déterminer a
$$4b^2c^2 = 3a^4 + (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
ou
$$4a^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 = 0.$$

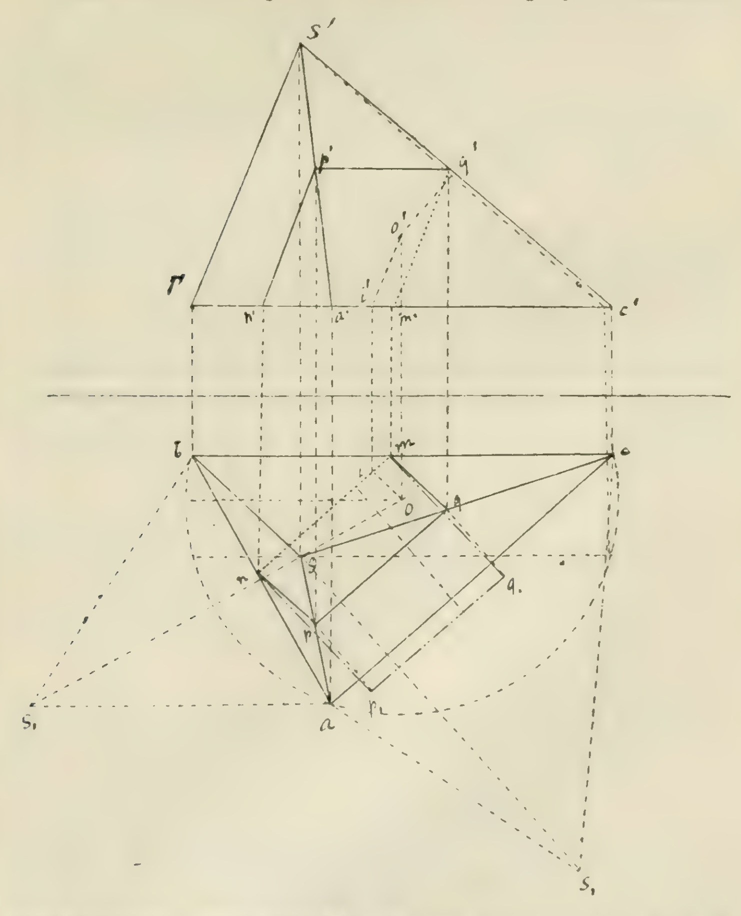
La condition de réalité est
$$(b^2 + c^2)^2 - 4(b^2 - c^2)^2 > 0,$$
ou, en changeant les signes,
$$3b^4 - 10b^2c^2 + 3c^4 < 0.$$
ce qui est bien la même condition que précédemment.

Cette relation nous apprend que le rapport $\dfrac{b}{c}$, qui est essentiellement positif, doit être compris entre $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

ÉPURE

Les deux premières parties sont des questions qui se font dans tous les cours ; nous ne croyons donc pas devoir y insister.

Pour la troisième partie, nous avons employé la construc-



tion suivante : par le point *(o, o')* nous avons mené une parallèle *(oi, o'i')* à *(sb, s'b')* jusqu'à la rencontre avec le plan de base, en *(i, i')* ce point est un point de la section cherchée ;

il suffit de construire le parallélogramme dont les sommets sont sur les arêtes BC, BA, SC, SA, et dont les côtés sont respectivement parallèles à SB et AC. On obtient ainsi le parallélogramme ($mnpq$, $m'n'p'q'$) que l'on rabat facilement sur le plan de la base.

QUESTION 15

Solution par MM. André G. de la Chesnais, de Saint-Louis, et Pierre G. la Chesnais, de Henri IV.

Construire un triangle connaissant un angle, la bissectrice et la différence entre les côtés qui comprennent l'angle donné. (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Je suppose le problème résolu. Soient BD la perpendiculaire abaissée du sommet B sur la bissectrice et prolongée jusqu'à sa rencontre avec le côté AC, et IK une parallèle à cette droite passant par le pied de la bissectrice et rencontrant AC en K. On a

$$\frac{AB}{AC} \text{ ou } \frac{AD}{AC} = \frac{IB}{IC} = \frac{KD}{KC}.$$

Or, je puis construire géométriquement AK ; soient donc

$$AD = x, \; DC = a, \; AK = k ;$$

j'ai l'équation $\qquad \dfrac{x}{x+a} = \dfrac{k-x}{x+a-k}$

qui peut s'écrire

$$2x^2 - 2(k-a)x - ak = 0.$$

Les racines sont

$$\frac{k - a \pm \sqrt{k^2 + a^2}}{2}.$$

Elles sont faciles à construire ; la racine négative répond au cas où l'on donne l'angle extérieur et la bissectrice de cet angle.

Nota. — La même question a été résolue par M. Caffarel, à Marseille.

QUESTION 21

Solution par M. P. G. LA CHESNAIS. Lycée Henri IV.

On donne un cercle de centre O, *un diamètre* AB *et les tangentes* Δ, Δ' *aux extrémités de ce diamètre. Une tangente variable* Δ'' *au cercle rencontre* Δ *en* C, *et* Δ' *en* D. *Par le point* C *on mène une parallèle qui rencontre le rayon* OD *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand* Δ'' *roule sur le cercle* O — (G.-L.) — (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Abaissons la perpendiculaire IH sur AB.

Les triangles rectangles OIH, OCA étant semblables, il en résulte la proportion

$$\frac{AC}{OA} = \frac{OH}{IH} \quad \text{ou} \quad \frac{IH^2}{OH} = R.$$

si j'appelle R le rayon du cercle. Le lieu du point I est donc un système de deux paraboles ayant toutes deux leur sommet en O, AB pour axe et $\frac{R}{2}$ pour paramètre.

NOTA. — La solution donnée dans le numéro de juillet est inexacte.

QUESTION 22

Solution par M. SIMONET, maître répétiteur au Lycée de Chaumont.

On partage une droite fixe AB *en deux parties par un point mobile* C*: sur chacun des segments* AC, BC *on construit des triangles équilatéraux* ADC, CEB*; on demande :*

1° Le lieu géométrique du milieu du côté DE *du triangle* CDE*;*

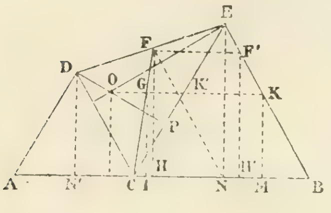
2° Le lieu de son centre de gravité;

3° Le lieu du point de concours des hauteurs;

4° Le lieu du centre du cercle circonscrit;

5° De déterminer le point C *de façon que la somme des volumes engendrés par les deux triangles tournant autour de* AB *soit minima.*

Joignons FC et soit FF′ parallèle à AB. En abaissant EN, F′H′, FH perpendiculaires sur AB et joignant FN on a



$$\frac{F'H'}{EN} = \frac{BF'}{BE};$$

or $$EN = \frac{BC\sqrt{3}}{2} . BF'$$

$$= NF = \frac{AC + BC}{2}$$

Donc

$$F'H' = FH = \frac{BC\sqrt{3}}{2BC} \times \frac{AC + BC}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{4} = \text{constante}$$

Le lieu du point F est donc une parallèle à AB menée par le point F.

2° Le centre de gravité G du triangle DCE est aux $\frac{2}{3}$ de la droite FC à partir de C. Soit GI perpendiculaire sur AB.

On a $$GI = \frac{2}{3} HF$$

ou, en remplaçant FH par sa valeur trouvée précédemment,

$$GI = \frac{AB}{2\sqrt{3}} = \text{constante.}$$

Le lieu du point G est une parallèle à AB menée par G.

3° Soit O le point de concours des hauteurs; menons OK parallèle à AB, et OL et KM perpendiculaires sur AB. L'angle PDC valant 30°, $PC = \frac{DC}{2} = \frac{AC}{2}$. Or le triangle OEK′ étant isoscèle, OK′ = EK′. L'angle K′OP valant 30°,

$$K'P = \frac{OK'}{2} = \frac{EK'}{2}.$$

Donc

$$CK' = PC + PK' = \frac{AC + EK'}{2} = \frac{AC + EC - CK'}{2}$$

ou encore $$CK' = \frac{AB}{2};$$

mais $$KM = \frac{KB\sqrt{3}}{2}$$

et $$KM = OL,\ K'C = KB;$$

donc $$OL = \frac{AC + BC}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}.$$

Le lieu géométrique du point O est encore une parallèle à AB et cette parallèle se confond avec celle menée par le point G.

4° Le centre I du cercle circonscrit au triangle DCE s'obtient en élevant des perpendiculaires sur les milieux des côtés DC et CE. Quelle que soit la position du point C sur AB, ces perpendiculaires passeront toujours par A et B et formeront avec AB des angles de 30°. De sorte que le triangle AIB est fixe; son sommet l'est aussi et I est situé sur le lieu des points O et G.

5° Soit $AC = 2x$, $BC = 2y$, $AB = 2a$.

Le volume engendré par ADC est $2\pi x^3$; le volume engendré par BEC est $2\pi y^3$; la somme à rendre minima est $x^3 + y^3$.

Or $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3axy$.

Ceci montre que le minimum de $x^3 + y^3$ correspond au maximum de xy, c'est-à-dire quand $x = y$.

Donc C est le milieu de AB.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vazou, élève au collège Rollin ; Pigeaud, au lycée de Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; Deville, à Lorient.

QUESTION 27

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Le nombre n *étant entier, on demande de vérifier les propositions suivantes :*

1° $(2n + 1)^5 - (2n + 1)$ *est divisible* par 240.

Cette expression peut s'écrire:

$$(2n + 1)\,[(2n + 1)^4 - 1].$$

On sait déjà que, si $(2n + 1)$ n'est divisible ni par 5, ni par 3, le second facteur est divisible par 5 et par 3.

D'autre part on a :

$$(2n+1)^4 - 1 = [(2n+1)^2 - 1][(2n+1)^2 + 1] = 8n(n+1)(2n^2 + 2n + 1).$$

Sous cette forme, on voit facilement que ce nombre est divisible par 16; or, les nombres 3, 5, 16 étant premiers entre eux deux à deux, on en déduit que l'expression considérée est divisible par le produit $3 \times 5 \times 16$, ou 240.

2° $3^{2n+2} - 8n - 9$ *est divisible par* 64.

Cette expression peut s'écrire

$$(8+1)^{n+1} - 8(n+1) - 1;$$

or, $(8+1)^{n+1} - 1$ est un multiple de $8 + 1 - 1$, ou 8; le quotient est:

$$(8+1)^n + (8+1)^{n+1} + \dots + (8+1) + 1.$$

On voit facilement qu'il est un multiple de 8, augmenté de $(n+1)$.

Par suite l'expression devient

$$8[m8 + (n+1)] - 8(n+1).$$

On voit donc que cette expression est divisible par 64.

3° $3^{2n+3} + 40n - 27$ *est divisible par* 64.

Cette expression s'écrit

$$3^3 \cdot 3^{2n} - 27 + 40n, \text{ ou } 27(9^n - 1) + 40n.$$

Or $9^n - 1$ est divisible par 8; le quotient est de la forme $8p + n$.

Donc l'expression devient

$$27 \cdot 8[8p + n] + 40n = m64 + 8[27 + 5]n;$$

on en déduit facilement la proportion énoncée.

4° $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est divisible par* 7.

L'expression peut s'écrire

$$3 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 2^{2n}.$$

Or $3^{2n} = m7 + 2^n$.

Donc l'équation devient

$$m7 + (3+4) - 2^n.$$

Sous cette forme, on voit bien qu'elle est divisible par 7.

5° $3^{2n+2} + 2^{6n-1}$ *est divisible par* 11.

L'expression devient

$$9 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 8^{2r}.$$

Or $3^{2n} = m11 - 2^n$; $8^{2n} = m11 - 2^n$.

Donc, on a $m11 - 11 \cdot 2^n$, c'est-à-dire un multiple de 11.

6° $3 \cdot 5^{2n+1} + 2 \cdot {}^{3n+1}$ *est divisible par* 17.

En effet, cette expression peut s'écrire

$$15 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n.$$

Or $25^n = m\,17 + 8^n$.

Donc on a $m17 + 17 \cdot 8^n$, ou un multiple de 17.

7° *L'expression* $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ *est divisible par* 17 (*).

En effet, cette expression devient

$$81^{n+1} - 64^{n+1},$$

qui est divisible par 81 — 64 ou 17.

QUESTION 38

Solution par M. Bablon, élève du Collège d'Epinal.

On considère un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB *et* CO. *Soit* T *la tangente au point* A *et* M *un point quelconque de* T, *supposé mobile sur cette droite; de ce point* M *on peut mener au cercle proposé une seconde tangente* MQ. *Ayant projeté le point* M *en* P *sur le diamètre* CO, *on joint le point* P *au point de contact.* Q *et d'un point fixe* S *pris dans l'espace on abaisse une perpendiculaire sur* PQ. *Démontrer que le lieu des pieds de ces perpendiculaires est un cercle.*

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

Les deux triangles OMP et OMQ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; OM commun; OQ = MP = OA ; MQ = OP = AM. Ces deux triangles sont rectangles; donc AP est parallèle à OM; si on joint BP, BC est égal et parallèle aussi à OM, car la figure OMBP est un parallélogramme. Les droites BP et QP se confondent donc: par suite PQ passe par le point fixe B. Tous les triangles tels que SIB étant rectangles en I, le lieu géométrique des points tels que I est donc sur une circonférence décrite sur BS comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par MM. Auric, à Orange; Pigeaud, à Châteauroux; Deville, à Lorient; Simonet, à Chaumont; Vigy, à Vitry-le-François.

(*) Énoncé rectifié.

QUESTIONS PROPOSÉES

49. — Construire géométriquement un triangle dont on connaît un angle, la hauteur issue du sommet de cet angle, et la somme des perpendiculaires abaissées du pied de cette hauteur sur les deux autres côtés. *(Hallowell.)*

50. — On considère un angle droit AOB, et sur OB un point fixe M; on trace une droite rencontrant OB au point Q, OA au point P, et telle que, si du point M on abaisse une perpendiculaire MH sur PA, on ait toujours la relation

$$\frac{PH^2}{OP^2} - \frac{MH^2}{OQ^2} = 1\,;$$

démontrer que la droite PQ passe par un point fixe.

(G. L.)

51. — On considère un cercle O et deux diamètres rectangulaires AB, CD ; on joint le point C à un point M, pris arbitrairement sur AB, et en ce point M on élève à CM une perpendiculaire qui rencontre O aux points P et Q ; si en ces points P, Q, on mène les tangentes au cercle, ces droites se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique quand le point M se déplace sur AB.

(G. L.)

52. — On prend un angle droit AOB, et sur OB un point fixe M. Soit C un cercle, tangent en O à la droite OA. Menons par M une tangente à ce cercle, et soit P le point de contact ; menons OP et les bissectrices des angles formés par les droites OB et MP. Démontrer que le lieu décrit par les points I et I′ où ces bissectrices rencontrent OP, est un système de deux droites quand on fait varier le cercle C.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,
E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 17374-2.

NOTE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

Par M. **G. de Longchamps.**

1. — Nous rappellerons ici, pour nos jeunes lecteurs, qu'on donne le nom d'analyse indéterminée à cette partie de l'algèbre dans laquelle on se propose la résolution, en nombres entiers ou en nombres commensurables, de p équations à q inconnues; p étant plus petit que q. De récents travaux de MM. Catalan, Realis, Ed. Lucas, Césaro, etc. (1), ont montré tout le parti qu'on pouvait tirer, pour la solution de ce problème, des identités algébriques. Les résultats que nous exposons dans cette note reposent aussi sur cette base qui permet de présenter, par un procédé tout à fait élémentaire, quelques points intéressants et délicats de la théorie des nombres.

2. — Considérons l'expression irrationnelle y:

$$y = (\alpha + \sqrt{\beta})\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}.$$

On peut l'écrire $\quad y = \sqrt{P + Q\sqrt{\beta}}$

en posant

$$P = \alpha^3 + 3\alpha\beta$$
$$Q = 3\alpha^2 + \beta.$$

Pour reconnaître dans quel cas y peut se décomposer en radicaux simples, il faut former la quantité U :

$$U = P^2 - \beta Q^2.$$

On trouve $\quad U = (\alpha^2 - \beta)^3$;

on a donc identiquement

$$(\alpha^3 + 3\alpha\beta)^2 - \beta\,(3\alpha^2 + \beta)^2 = (\alpha^2 - \beta)^3$$

ou, en posant $\quad \alpha = \frac{a}{b},\ \beta = -c,$

$$(a^3 - 3ab^2c)^2 + c\,(3a^2b - b^3c)^2 = (a^2 + b^2c)^3. \qquad \text{(A)}$$

Cette relation a lieu *identiquement*, c'est-à-dire pour toutes les valeurs attribuées aux lettres a, b, c.

(1) *Nouvelle correspondance mathématique*, 1879 et 1880.

3. — Proposons-nous maintenant de résoudre, en nombres entiers, l'équation $x^2 + py^2 = z^3$, (1)
p étant un nombre entier donné; x, y, z, étant les inconnues. Il résulte de l'identité (A) qu'en posant

$$(A)' \left\{ \begin{array}{l} x = a^3 - 3pab^2 \\ y = 3ba^2 - pb^3 \\ z = a^2 + pb^2 \end{array} \right.$$

a, b *étant des nombres entiers indéterminés*, l'équation proposée admet toutes les solutions entières données par ces formules, quelles que soient les valeurs entières attribuées aux lettres a et b.

4. — Considérons maintenant l'équation plus générale

$$qx^2 + py^2 = z^3, \qquad (2)$$

dans laquelle, bien entendu, p et q sont des nombres entiers donnés. Nous allons, pour la résoudre, transformer l'identité (A) en posant $c = \frac{p}{q}$; on obtient ainsi la relation identique pour toutes les valeurs attribuées aux lettres a, b, p, q:

$$(B)\ q\,(qa^3 - 3ab^2p)^2 + p\,(3a^2bq - b^3p)^2 = (a^2q + b^2p)^3.$$

Il résulte de cette identité que les formules

$$(B') \left\{ \begin{array}{l} x = qa^3 - 3\,ab^2 p \\ y = 3a^2\,bq - b^3\,p \\ z = a^2\,q + b^2\,p, \end{array} \right.$$

dans lesquelles a et b sont des nombres entiers arbitraires, donnent des solutions entières de l'équation (2).

5. — Ces formules, bien que renfermant deux variables arbitraires, indépendantes, a et b, ne donnent pas *toutes les solutions entières* de l'équation (2). Pour mettre en évidence ce fait important, observons qu'en posant

$$x = \lambda z$$
$$y = \mu z$$

on aura

$$(B'') \left\{ \begin{array}{l} z = q\,\lambda^2 + p\,\mu^2 \\ x = q\,\lambda^3 + p\,\mu^2\lambda \\ y = q\,\lambda^2\mu + p\mu^3. \end{array} \right.$$

Dans ces formules, λ et μ doivent être considérés comme des nombres entiers arbitraires, et indépendants. Il est facile

d'observer que les formules (B') et (B'') ne sont pas équivalentes, et nous entendons par là que toute solution donnée par (B') n'est pas toujours et nécessairement obtenue par (B''), ou inversement. Par exemple, donnons à λ et μ des valeurs arbitraires, entières, différentes de zéro. Les formules (B'') font connaître pour z des valeurs correspondantes et, la plus petite d'entre elles est évidemment celle qu'on obtient en supposant $\lambda = 1$, et $\mu = \pm 1$; on trouve alors, en prenant $\lambda = 1$, $\mu = 1$:

$$x = y = z = p + q.$$

Considérons maintenant les formules (B') ; pour obtenir la valeur $(p + q)$ de z, il faut supposer $a = \pm 1 \quad b = \pm 1$ et les valeurs correspondantes de x et de y sont

$$\pm x = q - 3p$$
$$\pm y = 3q - p,$$

qui, en général, ne sont pas égales à celles que nous avons trouvées au moyen des formules (B'').

6. — On peut encore déduire de l'identité (A) une solution de l'équation

$$x^2 + y^3 = z^3. \qquad (3)$$

Supposons en effet que les nombres a, b, c, qui figurent dans cette identité, satisfassent aux deux relations

$$c = 3\,a^2b - b^3c$$
$$a = 1 + b^3\,;$$

on en déduit $\quad c = 3\,ab$

et, par suite, $\quad c = 3b\,(1 + b^3)\,;$

on aura donc, identiquement,

$$[(1 + b^3)^2 (1 - 8b^3)]^2 + [3b\,(1 + b^3)]^3 = [(1 + b^3)\,(1 + 4b^3)]^3.$$

Les formules

$$\pm x = (1 + b^3)^2(1 - 8b^3)$$
$$y = 3b(1 + b^3)$$
$$z = (1 + b^3)(1 + 4b^3)$$

dans lesquelles b est un nombre entier arbitraire, donnent des solutions de l'équation (3).

7. — On peut généraliser les résultats précédents en suivant la méthode élémentaire que nous venons d'exposer.

Si l'on considère, en effet, l'expression

$$y = (\alpha + \sqrt{\beta})\ \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}\ \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$$

qui peut s'écrire

$$y = \sqrt{\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2 + (4\alpha^3 + 4\alpha\beta)\sqrt{\beta}}$$

ou $$y = \sqrt{P + Q\sqrt{\beta}};$$

en posant $$P = \alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2$$
$$Q = 4\alpha^3 + 4\alpha\beta,$$

on trouve $$P^2 - Q^2\beta = (\alpha^2 - \beta)^4.$$

On a donc *identiquement*

$$(\alpha^4 + 6\alpha^2\beta + \beta^2)^2 - \beta(4\alpha^3 + 4\alpha\beta) = (\alpha^2 - \beta)^4$$

ou, en posant $\alpha = \frac{a}{b}$ $\beta = -c$,

$$(a^4 - 6a^2b^2c + b^4c^2)^2 + c(4a^3b - 4b^3ac)^2 = (a^2 + cb^2)^4.$$

On peut ainsi trouver des solutions entières de l'équation

$$x^2 + py^2 = z^4, \qquad (4)$$

au moyen des formules

$$\pm x = a^4 - 6a^2b^2p + b^4p^2$$
$$\pm y = 4a^3b - 4b^3ap$$
$$\pm z = a^2 + pb^2$$

dans lesquelles a et b désignent, comme tout à l'heure, des nombres entiers arbitraires.

8. — On voit, sans que nous ayons besoin d'insister sur ce point, comment on pourra poursuivre indéfiniment ces recherches et obtenir des formules de résolution, renfermant deux paramètres variant arbitrairement, par des valeurs entières pour les équations

$$x^2 + py^2 = z^m$$

et même pour les équations

$$qx^2 + py^2 = z^m,$$

quand m est impair. On trouvera ainsi que l'équation

$$qx^2 + py^2 = z^5 \qquad (5)$$

est résolue par les formules

$$(C'') \left\{ \begin{aligned} \pm x &= q^2a^5 - 10a^2b^2pq + 5ab^4p^2 \\ \pm y &= 5q^2a^4b - 10a^2b^3pq + b^5p^2 \\ z &= a^2p + b^2q \end{aligned} \right.$$

qui résultent de l'identité

$$q(q^2a^5 - 10a^2b^2pq + 5ab^4p^2)^2$$
$$+ p(5q^2a^4b - 10a^2b^3pq + b^5p^2)^2 = (a^2q + b^2p)^5.$$

Mais la généralisation de ces résultats, lorsque l'exposant de z est supposé quelconque, quoique très facile, ne peut se faire sans sortir du cadre élémentaire que nous avons fixé à cet article.

9. — Nous donnerons ici une dernière application de l'identité (B).

Considérons l'équation

$$qx^2 + py^2 = 1 \qquad (6)$$

et soit

$$x = \theta', \quad y = \theta,$$

une solution particulière; il est facile de reconnaître qu'il existe alors *une infinité de solutions entières de l'équation* (6).

On a, en effet, d'après (B),

$$q(q\theta'^3 - 3p\theta^2\theta')^2 + p(4q\theta\theta'^2 - p\theta^3)^2 = (q\theta'^2 + p\theta^2)^3;$$

mais on suppose que

$$q\theta'^2 + p\theta^2 = 1,$$

on peut donc dire que les nombres

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \theta'(q\theta'^2 - 3p\theta^2) \\ y_1 &= \theta(3q\theta'^2 - p\theta^2) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

donnent

$$qx_1^2 + py_1^2 = 1.$$

On pourra donc ainsi calculer, de proche en proche, une infinité de solutions de l'équation (6).

Exemple. — *Soit l'équation*

$$3x^2 - 2y^2 = 1.$$

On aperçoit immédiatement la solution

$$x = \theta' = 1, \quad y = \theta = 1;$$

les formules (7) donnent

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 11.$$

On a bien, en effet,

$$3 \times 81 - 2 \times 121 = 1.$$

On trouve ensuite

$$x_2 = 8721, \quad y_2 = 10681.$$

On peut vérifier que

$$(8721)^2 = 76055841$$
$$(10681)^2 = 114083761$$

et l'on a bien

$$3 \times 76055841 - 2 \times 114083761 = 1.$$

10. — Pour montrer, en terminant cette note, toute la délicatesse de ces questions d'analyse indéterminée qui nous paraissent, au moins par un certain côté, ressortir autant de l'algèbre élémentaire que la théorie des nombres, nous voulons faire remarquer que l'équation (6) qui vient de nous occuper ne peut pas être résolue par des formules algébriques, parce que, comme nous allons le démontrer, cette équation n'admet pas toujours une solution entière.

Considérons, en effet, l'équation particulière

$$7x^2 - 5y^2 = 1, \qquad (8)$$

nous allons reconnaître qu'elle n'admet pas de solution en nombres entiers. Observons d'abord que, pour une raison évidente, y n'est pas un multiple de 7; alors y est de l'une ou de l'autre des formes y_1, y_2, y_3;

$$y_1 = 7A \pm 1$$
$$y_2 = 7A \pm 2$$
$$y_3 = 7A \pm 3$$

(A étant un nombre entier).

On a, d'après cela,

$$5y_1^2 + 1 = 5(7A \pm 1)^2 + 1 = M \,.\, 7 + 6$$
$$5y_2^2 + 1 = 5(7A \pm 2)^2 + 1 = M \,.\, 7$$
$$5y_3^2 + 1 = 5(7A \pm 3)^2 + 1 = M \,.\, 7 + 1.$$

L'équation (8) exige donc que y soit de la forme

$$(7A \pm 2).$$

Cette remarque faite, on peut reconnaître que si l'on pose

$$5(7A \pm 2)^2 + 1 = 7 \,.\, B,$$

tous les nombres B, nombres entiers obtenus en donnant à A des valeurs entières arbitraires, sont terminés par un 8 ou par un 3.

Vérifions-le d'abord pour des valeurs particulières de A. Pour $A = 1$, on a

$$5(7 - 2)^2 + 1 = 126;$$

donc $$B = 18.$$

Pour $A = 2$ on a

$$5(14 - 2)^2 + 1 = 721;$$

donc $$B = 103.$$

Supposons donc que la propriété ait lieu pour une valeur

particulière de A, et montrons qu'elle subsiste quand on augmente A d'une unité.

On a en effet $7(A+1)-2=7A+5$
et nous supposons que

$$5(7A-2)^2=(10\alpha+3)\times 7 \qquad (9)$$

α et A étant, bien entendu, des nombres entiers. D'ailleurs

$$5(7A+5)^2+1=5(7A-2+7)^2+1$$

ou $\quad 5(7A+5)^2+1=5(7A-2)^2+70(7A-2)+246$

et d'après (9) et en observant que

$$246=7\times 34+8$$

$$5(7A+5)^2+1=M\,.\,7+8.$$

Les nombres B seront donc, alternativement, terminés par un 3 ou par un 8. L'égalité

$$7x^2=5y^2+1$$

est donc impossible, en nombres entiers, aucun nombre terminé par un 3 ou par un 8 ne pouvant être un carré parfait.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PHILOSOPHIE 1881

Solution par M. HADAMARD, élève au Lycée Louis-le-Grand.

On donne un carré inscrit ABCD (fig. 1), *et un point* I *du plan. On joint le point* I *aux quatre sommets. Les droites obtenues coupent le cercle en quatre nouveaux points* A′, B′, C′, D′.

1° *Démontrer que dans le quadrilatère* A′B′C′D′, *on a*

$$A'B'\,.\,C'D'=A'D'\,.\,B'C'.$$

2° *Étant donné le quadrilatère* A′B′C′D′ *satisfaisant à cette condition, placer le point* I *de manière à retrouver le carré* ABCD.

1° Les triangles IAB, IA′B′ sont semblables et donnent

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{IA'}{IB}=\frac{t}{IA\,.\,IB}$$

(t étant la puissance du point I par rapport au cercle).

De même $$\frac{C'D'}{CD}=\frac{IC'}{ID}=\frac{t}{IC\,.\,ID};$$

d'où $$\frac{AD\ .\ BC}{A'B'\ .\ C'D'} = \frac{t^2}{IA\ .\ IB\ .\ IC\ .\ ID};$$

de même $$\frac{A'D'\ .\ B'C'}{AD\ .\ BC} = \frac{t^2}{I\ .\ A\ IB\ .\ IC\ .\ ID}.$$

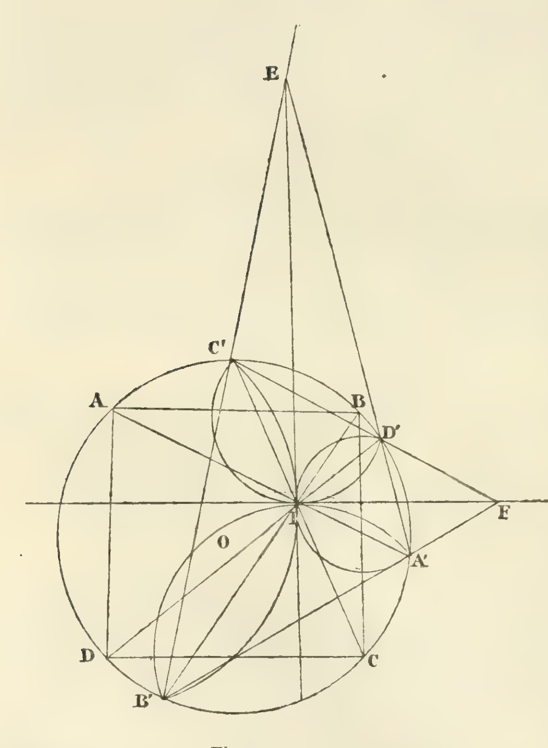


Fig. 1.

Ces deux proportions ayant les trois derniers termes égaux chacun à chacun, les premiers termes sont aussi égaux, et le théorème est démontré.

Remarque. — Le rapport $\frac{A'B'\ .\ C'D'}{A'D'\ .\ B'C'}$ est égal au rapport anharmonique (A'B'C'D') (*). On pourrait en déduire une autre démonstration du théorème précédent, puisque les points A, A' ; B, B' ; C, C' ; D, D' divisent homographiquement le cercle, et que (ABCD) = — 1.

2e L'angle B'IA' a pour mesure la demi-somme des arcs

(*) Car $\frac{A'B'}{A'D'} \cdot \frac{C'D'}{B'C'} = \frac{\sin \frac{1}{2} \text{ arc } A'B'}{\sin \frac{1}{2} \text{ arc } A'D'} : \frac{\sin \frac{1}{2} \text{ arc } A'B'}{\sin \frac{1}{2} \text{ arc } C'D'}$

= (U . A'B'C'D'), U étant un point du cercle.

AB, A'B'; il est donc égal à $45° + \frac{\text{arc A'B'}}{2}$, ce qui donne un premier lieu du point I. On en a un second en décrivant sur A'D' un segment capable de $45° + \frac{\text{A'D'}}{2}$. Ces deux cercles se coupent en deux points, dont l'un est le point A' et dont l'autre répond à la question. Car, en joignant IA', IB', IC', ID', on obtient les arcs AB, AD égaux chacun à un quadrant. Mais si

$$A'B' \,.\, C'D' = A'D' \,.\, B'C', \quad AB \,.\, CD = AD \,.\, BC \quad (1°),$$

ou, puisque AB = AD, CD = CB. Le point C est donc le milieu de BD et ABCD est un carré.

Il en résulte que le point I appartient, non seulement aux cercles que nous avons décrits pour le trouver, mais encore aux cercles analogues décrits sur C'D' et C'B'. Or ces cercles, coupant le cercle donné sous les angles de 45°, sont orthogonaux; les cercles IA'B', IC'D' sont donc tangents en I, ainsi que les cercles IB'C', ID'A', et les tangentes communes sont rectangulaires. Or ces tangentes passent respectivement par les points d'intersection E, F des côtés opposés du quadrilatère A'B'C'D' *(fig. 1)*; en effet, le point d'intersection E des cordes B'A', B'C', interceptées sur les cercles IA'D', IB'C' par le cercle donné, est sur l'axe radical de ces cercles, c'est-à-dire sur la tangente en I. Donc, *du point* I *on voit la droite* EF *sous un angle droit.*

Malheureusement la solution que nous venons de donner manque de la généralité désirable. Car si le point I est hors du cercle, l'angle $\overline{\text{B'IA'}}$ n'est plus égal à $45° + \frac{\text{A'B'}}{2}$, mais à $\frac{\text{A'B'}}{2} - 45°$ ou à $45° - \frac{\text{A'B'}}{2}$. Nous allons donner une solution générale.

Elle s'appuie sur le théorème que nous venons de démontrer, mais que nous avons à démontrer à nouveau indépendamment de la position du point I.

Pour cela, il suffit de remarquer que les quatre cercles que nous avons considérés sont les inverses des côtés du carré par rapport au point I et à la puissance IA . IA',

et que par conséquent, puisque les angles du carré sont droits, ces cercles sont orthogonaux deux à deux ; le reste comme ci-dessus.

De plus, on voit du même point sous un angle droit les points de rencontre ε, φ des tangentes aux sommets opposés du quadrilatère A′B′C′D′. En effet, transformons ce quadrilatère avec le même pôle et la même puissance que ci-dessus. Le point D′ devient D et la tangente D′φ une circonférence passant par le point I et tangente au cercle O; son centre est donc sur la droite DOB. L'inverse de B′φ est de même une circonférence ayant son centre sur BD. La ligne des centres de ces deux circonférences est donc BD, et leur corde commune Iφ′ est perpendiculaire à BD. De même Iε′ est perpendiculaire à AC. Donc l'angle εIφ, égal à ε′Iφ′, est droit.

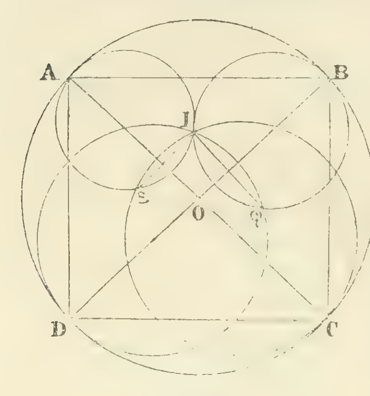


Fig. 2.

Or les points E, F sont conjugués, et il en est de même des points ε, φ. Car les points A′, B′, C′, D′, et par suite les tangentes en ces points sont en rapport harmonique. Donc (εKC′L) = — 1. De même (εK′A′L′) = — 1, et la droite A′C′, polaire de ε, passe par le point φ, intersection de KK′ et de LL′.

De plus les points E, F, ε, φ sont en ligne droite. Donc *du point* I *on voit sous un angle droit les couples de points conjugués situés sur la troisième diagonale du quadrilatère* A′B′C′D′. Les points I, I′, d'où l'on voit sous un angle droit ces couples, s'obtiennent en portant sur le diamètre OH perpendiculaire à EF, de part et d'autre du point H, la distance $H^2 - n^2$, égale à la tangente HT du point H. Ces points sont conjugués par rapport au cercle, car on a $HI^2 = HT^2 = HM \cdot HN$ (M, N étant les points d'intersection de OH avec le cercle).

Si le point I est donné, la droite EF est parfaitement

déterminée. Car I′ devra être le conjugué harmonique de I par rapport à MN, et EF la perpendiculaire au milieu de II′.

Il en résulte que les points I, I′ répondent tous deux à la question.

De notre démonstration il résulte que *si, le point* I *restant fixe, le carré* ABCD *tourne dans le cercle, la droite* EF *reste fixe, ainsi que son pôle, qui est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère* A′B′C′D′.

Généralisation. — Appelons, dans un système de quatre points A, B, C, D, couple de lignes deux lignes telles que AC, BD où AC joint deux des quatre points, BD les deux autres, et donnons pour valeur à ce couple le produit AC.BD.

Cela posé, si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques les quatre points A, B, C, D, je dis que les rapports des couples entre eux seront conservés.

Car on montrerait comme plus haut que

Fig 3.

$$\frac{A'C'.B'D'}{AD.BC} = \frac{t^2}{IA.IB.IC.ID} = \frac{A'D'.B'C'}{AD.BC} = \frac{A'B'.C'D'}{AB.CD}.$$

De même, dans un polygone quelconque d'un nombre de côtés pair, le rapport du produit des côtés de rang pair à celui des côtés de rang impair est conservé.

Cela posé, soient deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ tels

que $$\frac{A'C'.B'D'}{AC.BD}=\frac{A'D'.B'C'}{AD.BC}=\frac{A'B'.C'D'}{AB.CD},$$

cherchons le pôle et la puissance d'une transformation par rayons vecteurs réciproques où les points A, B, C, D deviendront des points formant un quadrilatère égal au quadrilatère A'B'C'D'.

Soit I l'origine et a^2 la puissance. On a

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{IB.IC}{a^2};\quad \frac{AC}{A'C'}=\frac{IA.IC}{a^2}.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{BC}{B'C'}:\frac{AC}{A'C'}=\frac{IB}{IA}.$$

De même $$\frac{AC}{A'C'}:\frac{AB}{A'B'}=\frac{IC}{IB}$$

et une troisième relation qui est satisfaite quand les deux premières le sont.

Ces deux premières nous donnent pour lieux du point I deux circonférences se coupant en deux points I et I' qui, on le démontrerait facilement, répondent à la question pour le triangle ABC, c'est-à-dire qu'en transformant ce triangle avec chacun de ces points pour origine et une puissance convenablement choisie, on obtient deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ égaux à A'B'C'. Transformons aussi le point D, nous obtenons les points δ, δ'. Si les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont égaux, on a

$$\frac{IA}{ID}=\frac{AB}{\alpha\beta}:\frac{BD}{B\delta}=\frac{AB}{\alpha'\beta'};\frac{BD}{\beta'\delta'}=\frac{I'A}{I'D}$$

ou $$\frac{IA}{I'A}=\frac{IB}{I'B}=\frac{IC}{I'C}=\frac{ID}{I'D}$$

et la circonférence lieu des points tels que le rapport de leurs distances à I et à I' soit égal à $\frac{IA}{I'A}$ passera par les points A, B, C, D. Le quadrilatère ABCD sera donc inscriptible.

Écartons pour le moment ce cas, et faisons coïncider les triangles A'B'C', $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Puisque les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ne sont pas égaux, les nouvelles positions δ_1, δ_1' des points δ, δ' seront distinctes. Mais on a

$$\frac{A'B'.C'D'}{A'C'.B'D'}=\frac{AB.CD}{AC.BD}=\frac{A'B'}{A'C'}\frac{C'\delta'_1}{B'\delta'_1}(1^{re}\text{ part.})=\frac{A'B'.C'\delta'_1}{A'C'.B'\delta'_1}$$

ou, en supprimant les facteurs communs :

$$\frac{C'D'}{B'D'}=\frac{C'\delta_1}{B'\delta_1}=\frac{C'\delta'_1}{B'\delta'_1},$$

et de même $$\frac{A'D'}{C'D'}=\frac{A'\delta_1}{C'\delta_1}=\frac{A'\delta'_1}{C'\delta'_1}.$$

Mais il n'y a que deux points tels que leurs distances aux points A', B', C' soient proportionnelles à A'D', B'D', C'D'. Comme δ_1 et δ_1' sont distincts, D' coïncide avec un d'eux et un seul, et le problème a une solution et une seule.

Si le quadrilatère ABCD est inscriptible, le quadrilatère donné A'B'C'D' doit l'être aussi; les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont égaux entre eux et inscriptibles dans une circonférence égale à la circonférence A'B'C'D'. On en conclut aisément, en raisonnant comme ci-dessus, que le problème a deux solutions.

Le même problème peut être résolu par des considérations angulaires.

En effet l'angle AIB a pour mesure la somme ou la différence des demi-arcs AB, *ab* *a*, *b* étant les points où les droites IA IB, coupent le cercle ABC) ou la somme ou la différence des demi-arcs

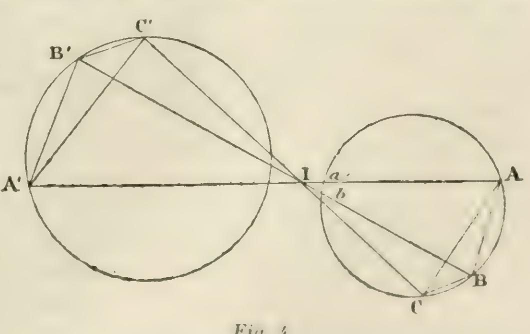


Fig. 4.

AB,A'B', suivant que le point I est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle ABC. Mais ces demi-arcs ont pour mesure les angles *c*, *c'* ou leurs suppléments, suivant que le point I est du même côté de BA que le point *c* ou de côtés différents. Donc l'angle AIB est égal à *c* — *c* ou à *c* + *c'* ou à *c'* — *c* ou

a $4d - (c + c')$. On aura ainsi des lieux du point I dont l'intersection donnera les points cherchés, si le problème est possible.

Mais la condition de possibilité est facile à exprimer. Car pour que l'angle BAC devienne égal à B'A'C', il faut que BIC soit égal A — A' ou à A' — A, ou à A + A' ou à $4d$—(A+A'). De même, pour que BDC devienne égal à B'D'C', il faut que BIC soit égal à D — D', etc., suivant la position du point I. En égalant ces valeurs de BIC dans toutes les positions du point I, on obtient une des conditions cherchées.

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, il est facile de démontrer que le problème est possible, excepté dans le cas du quadrilatère inscriptible, où ces conditions ne sont pas suffisantes.

Or, voici à quelles conditions on arrive :

Appelons demi-couple d'angles deux angles tels que ACB, ADB. c et D seront les sommets et AB la base. Le demi-couple de base CD sera le conjugué du précédent et leur ensemble formera un couple ayant pour base le couple de lignes l'(ABCD). La valeur d'un demi-couple sera la différence de ses angles, si les sommets sont du même côté de la base, eleur somme dans le cas contraire. On verrait sur une figure que deux demi-couples conjugués sont égaux ou ont pour somme $4d$. On peut donc prendre pour la valeur λ du couple de base l, la valeur d'un de ses demi-couples.

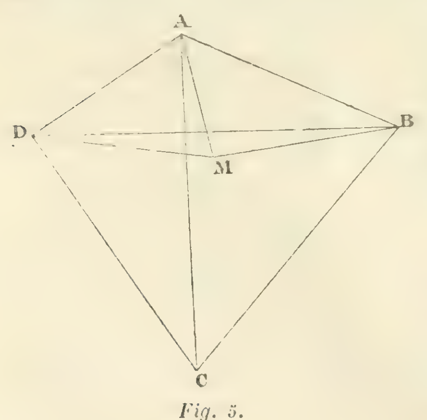


Fig. 5.

Cela posé, les conditions trouvées se réduisent à celle-ci, que les couples d'angles soient conservés.

Mais on peut établir plus rapidement cette condition en montrant qu'elle est équivalente à la relation segmentaire

trouvée plus haut, excepté dans le cas du quadrilatère inscriptible.

A cet effet prenons la figure dont on se sert pour démontrer la proposition contraire du théorème de Ptolémée.

On sait que l'on fait l'angle DAM = CAB et l'angle MDA = ACB et que l'on obtient ainsi les deux triangles DAM, ABC et AMB, DAC. Il en résulte

$$\frac{DA}{DM} = \frac{AD}{CB} \text{ ou } AD.BC = AC.DM$$

$$\frac{AB}{DM} = \frac{AC}{CD} \text{ ou } AB.CD = AC.MB.$$

D'où
$$\frac{AD.BC}{DM} = \frac{AB.CD}{MB} = \frac{AC.BD}{BD}.$$

Les trois côtés du triangle DMB sont donc proportionnels aux trois couples de lignes l, m, n du quadrilatère. Mais ses angles sont les trois couples d'angles λ, μ, ν de ce même quadrilatère. Car on a

$$DMB = DMA + AMB = ABC + ADC = \lambda$$
$$MDB = MDA - BDA = BCA - BDA = \mu$$
$$DBM = MBA - DBA = DCA - DBA = \nu.$$

On voit donc que nos deux relations segmentaire et angulaire sont toutes deux équivalentes à celle-ci, que le triangle DMB et le triangle D'M'B' construit de la même façon dans le quadrilatère A'B'C'D', sont semblables.

Dans le seul cas du quadrilatère inscriptible, la relation angulaire ne prouve pas la similitude des triangles DMB, D'M'B', parce que deux triangles réduits à des lignes droites ne sont pas, pour cela, semblables, quoiqu'ils soient équiangles.

Le triangle DMB permet encore de voir que nos trois relations angulaires se réduisent à deux, puisque la somme des couples est toujours $2d$.

Des propriétés de ce triangle on peut aussi déduire des propriétés du quadrilatère. Pour cela, on n'aura qu'à remplacer dans les relations

$$\frac{\sin\lambda}{l} = \frac{\sin\mu}{m} = \frac{\sin\nu}{n},$$

$$l = m\cos\nu + n\cos\mu, \text{ etc.}$$

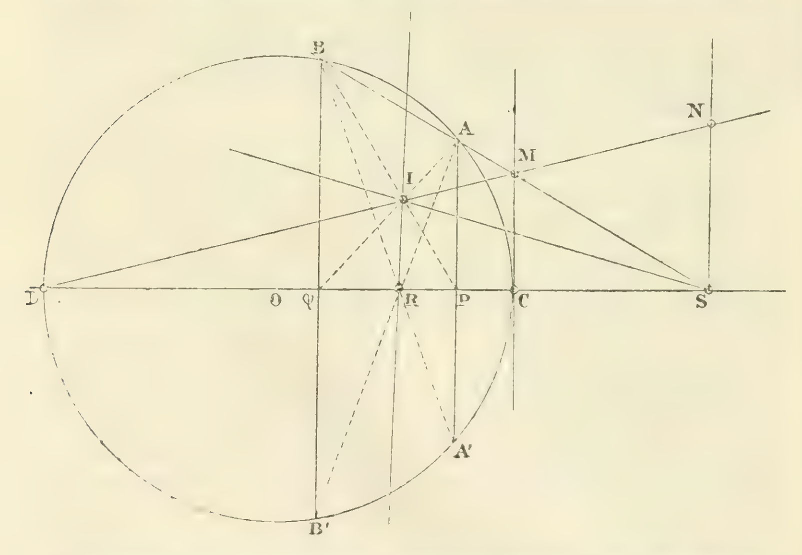
l, m, n, λ, μ, ν par leurs valeurs.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **H. Bourget**, à Aix.

Théorème. — *Soit* DCS *le diamètre d'un cercle* O; BAS *une sécante. On mène les ordonnées* AP, BQ *des points* A *et* B. *On tire les lignes* AQ, BP *qui se coupent en* I. *On joint le point* I *au point* D, *la ligne* DI *coupe* BAS *en* M. *Démontrer que le point* N *est sur la tangente en* C.

Élevons par le point S une perpendiculaire DCS; et prolongeons DIM jusqu'à sa rencontre en N avec cette ligne



D'après un théorème connu, une parallèle à NS, AP par exemple, étant divisée en deux parties égales par SI, le faisceau [S, N, M, I, D] est harmonique; donc la droite DN est divisée harmoniquement par les quatre points N, M, I, D.

Abaissons de I une perpendiculaire sur le diamètre DCS. Il est évident que si nous démontrons que la ligne DS est divisée harmoniquement par les points D,R,C,S, nous aurons

démontré le théorème, parce que le point M se trouvera sur une perpendiculaire MC à l'extrémité du diamètre.

Or il est facile de voir au moyen des lignes de la figure que RI est la polaire du point S par rapport au cercle O. Donc les quatre points divisent bien harmoniquement la droite DS. Par suite le théorème est démontré.

Corollaire 1. — *Dans une conique, si de deux points* A *et* B *on mène deux cordes conjuguées à un diamètre* DC *et qu'on cherche l'intersection* I *des diagonales du trapèze formé par ces cordes et le diamètre, et qu'on joigne le point* I *au sommet* D, *la ligne* DI *coupera* AB *en un point* M *situé sur la tangente en* C.

On obtient ce théorème par la méthode projective. La question 13 *(Journ. math. spéc.)* n'en est qu'un cas particulier.

Corollaire 2. — *Ce théorème permet de construire une conique connaissant trois points, la direction du diamètre passant par un de ses points, la direction du diamètre conjugué.*

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PARIS — JUILLET 1882

Résoudre $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0.$

— Étant donnée une sphère de rayon R, déterminer la distance OP du centre à un point P, de façon que la surface latérale du cône circonscrit à la sphère et ayant pour sommet le point P, soit équivalente à la surface de la calotte sphérique ACB, limitée par le cercle de contact et extérieure au cône.

— Calculer les valeurs de tg$a$ déterminées par l'équation

$$\operatorname{tg}(a + 45) + \operatorname{tg}(a - 45) = \frac{3}{2}.$$

— Soit O le centre d'une sphère de rayon R ; soit A un point extérieur à la sphère. On construit le cône circonscrit ABC, qui a pour sommet A et le cône OBC, qui a même base, et dont le sommet est au centre O de la sphère. Calculer la distance OA, sachant que la somme des volumes de ces cônes est égale aux $\frac{3}{8}$ du volume de la sphère.

— Si, dans l'expression $\frac{ax + b}{x^2 + 1}$, on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$, cette expression passe par un maximum et un minimum. Déterminer les nombres a et b de façon que le maximum soit $+4$, et le minimum -1.

— L'angle a étant donné par la relation tg $2a = \sqrt{3}$, calculer la valeur de tg $3a$.

— Prouver que si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont rectangulaires, les deux dernières arêtes sont rectangulaires l'une à l'autre.

— Dans le triangle ABC, AB $= 12^m$; AC $= 8^m$. On propose de déterminer le troisième côté BC de façon que le segment DH, intercepté entre la hauteur AH et la bissectrice AD de l'angle BAC, soit égale à 3^m.

— Déterminer les limites entre lesquelles demeurent comprises les valeurs de la fraction

$$\frac{(2x+1)^2}{x^2+1},$$

quand on fait varier x en lui attribuant des valeurs réelles quelconques.

Calculer la base et la hauteur d'un triangle isoscèle connaissant les volumes V et V′ engendrés par le triangle tournant successivement autour de sa base et autour d'un autre côté.

ROUEN

Calculer en degrés, minutes et secondes les valeurs de x comprises entre o et 360, satisfaisant à l'équation

$$\text{tg}\, x + \text{tg}\, 3x + \sin 2x = 0.$$

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE L'ANNÉE 1882

Mathématiques.

1. — Trouver la somme des termes de la suite

$$1 + 2x^2 + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

2. — Résoudre l'équation

$$x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{16} + \frac{1}{32} = 0.$$

3. — Par un point fixe A on fait passer une série de droites rencontrant une droite donnée MN, et sur chaque segment tel que AB, on construit un triangle semblable à un triangle donné ; trouver le lieu des sommets P de ces triangles.

4. — Maximum et minimum de

$$\frac{x^5 - x^2 + 3x^4 - 3x^3}{3x - 3 + x^2 - x^3}.$$

Trigonométrie et calcul.

1. — Calculer les distances des deux points C et C′ à la droite passant par les deux points inaccessibles A et A′, connaissant

CC′ = 64989m98
ACC′ = 41° 28′ 37″, 42
C′CA′ = 59 49 59, 87
AC′C = 62 38 48, 98
CC′A′ = 37 25 17, 79.

2. — Résoudre un triangle, et en calculer la surface, connaissant les trois angles et le rayon du cercle inscrit

$$A = 71^\circ\ 21'\ 45'',36$$
$$B = 32\ \ 43\ \ 27,92$$
$$C = 75\ \ 54\ \ 46,72$$
$$r = 11929,\ 98.$$

QUESTION 376

Solution par

L'arête d'un dièdre donné α *est tangente à une sphère de rayon* R. *Quelle doit être, par rapport au plan diamétral de contact, la position de ce dièdre pour que la surface de sphère interceptée par le dièdre soit maxima?*

Soient x et $\alpha - x$ les angles qui font les faces du dièdre avec le plan diamétral; l'expression dont on cherche le maximum est, comme on peut facilement le reconnaître.

$$4\pi R^2\,[1 - \cos^2 x - \cos^2(\alpha - x)].$$

La quantité entre crochets peut s'écrire

$$\sin^2 x - \cos^2(\alpha - x)$$

ou encore $$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos^2(\alpha - x).$$

Sous cette forme on peut facilement la transformer en un produit, et l'on trouve pour la quantité à rendre maxima. l'expression $$\cos\alpha\cos(2x - \alpha).$$

Cette expression sera maxima, quand on aura

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

Donc le plan diamétral est bissecteur de l'angle dièdre.

QUESTION 379

Solution par M. Hellot, élève au lycée Corneille, à Rouen.

Déterminer les côtés d'un triangle, connaissant le périmètre $2p$, *sachant que* $bc = m^2$, *et que les médianes correspondant aux côtés* b *et* c *sont à angle droit.*

Soient β et γ les médianes correspondant aux côtés b et c;

on a, d'après des relations connues,

$$2a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = 2(\beta^2 + \gamma^2).$$

De plus, les médianes se coupant à angle droit, aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet, on a

$$\frac{4}{9}(\beta^2 + \gamma^2) = a^2.$$

On déduit de ces deux équations la relation suivante

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Donc les trois équations du problème sont

$$a + b + c = 2p$$
$$b^2 + c^2 = 5a^2$$
$$bc = m^2.$$

On élimine facilement b et c, ce qui donne l'équation

$$5a^2 + 2m^2 = (2p - a)^2$$

ou

$$2a^2 + 2ap - 2p^2 + m^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$5p^2 - 2m^2 \geq 0.$$

De plus, la somme des racines étant négative, il faut, pour que le problème ait une solution, que les racines soient de signes contraires, ce qui donne la condition

$$2p^2 - m^2 \geq 0,$$

qui entraîne la précédente ; il y a alors une seule solution pour a; on en tire ensuite facilement b et c.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Derome, à Valenciennes, et Fiévet, à Lille.

QUESTION 1

Solution par M. H. Bourget, à Aix.

Démontrer que le polynôme

$$A = n(n+1)(n+2)x^n - 6n.1x^{n-1} - 6(n-1)2x^{n-2}$$
$$6(n-2)3x^{n-3} - \ldots - 6.2(n-1)x - 6n$$

est exactement divisible par $x - 1$ *et donner le quotient.*

(G. de Longchamps.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme

entier en x soit divisible par $x - 1$, c'est que 1 substitué à x annule le polynôme.

Substituons donc 1 à x dans le polynôme proposé, il devient

$$A = n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - 6(n-2)3 - \ldots - 6.2(n-1) - 6.1n.$$

D'après ce que nous venons de dire, on doit avoir

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = n.1 + (n-1)2 + (n-2)3 + \ldots + 2(n-1) + 1n.$$

Si nous développons le second membre de cette égalité nous aurons, toutes réductions faites,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n.n - [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)] - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2]$$

ou, effectuant les sommes indiquées et réduisant au même dénominateur,

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{3n(1+n)n - 3n(n-1) - (n-1)n(2n-1)}{6}$$

ou

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{3n(1+n)n - 2n(n-1)(n+1)}{6}$$

ou enfin

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Il est aisé de vérifier que le quotient est

$$[n(n+1)(n+2)]x^{n-1} + [n(n+1)(n+2) - 6n.1]x^{n-2} + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2]x^{n-3} + \ldots + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - \ldots - 6.2(n-1)]x + [n(n+1)(n+2) - 6n.1 - 6(n-1)2 - \ldots - 6.2(n-1) - 6.1n].$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Paul Godefroy, à Lyon.

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Mécanique élémentaire, *à l'usage des aspirants au baccalauréat ès sciences, et des candidats aux Écoles navale, militaire et forestière, par* M. Combette, *professeur au lycée Saint-Louis.* — Paris, librairie Germer-Baillière

Au moment de rendre compte de l'ouvrage nouveau de M. Combette, je ne crois pas devoir reprendre l'observation générale que j'ai déjà eu l'occasion de faire sur les programmes de mécanique dans l'enseignement secondaire. J'accepte, tel qu'il est, l'ordre suivi par l'auteur, et je ne puis que le féliciter de la manière dont il a développé son programme, et des détails dans lesquels il est entré. M. Combette a traité à fond, autant que le permet l'étude élémentaire de la mécanique, toutes les questions qui font partie du cours de mathématiques 2me année ; mais je signalerai plus particulièrement aux lecteurs les chapitres suivants :

Réduction des forces à deux ;

Conditions d'équilibre d'un solide libre et les six équations ;

Conditions d'équilibre d'un solide qui n'est pas libre ;

Les machines, à propos desquelles M. Combette décrit les principaux types de machines simples usuelles ;

L'étude géométrique détaillée du mouvement des projectiles dans le vide ;

Le travail et la transmission du travail dans les machines.

Les exemples intéressants qui accompagnent chacune des théories importantes sont choisis de façon à bien faire comprendre l'application des divers principes à la solution des problèmes de mécanique ; les exercices qui viennent après chaque livre contiennent, ou bien des théorèmes qui sortent des limites du programme, et qu'il peut être pourtant utile de connaître, ou bien des problèmes présentant pour les élèves un grand intérêt, soit parce qu'ils donnent des résultats souvent assez simples, soit parce qu'ils proviennent de questions d'examen.

M. Combette a indiqué par un astérisque les questions qui ne font pas partie du programme du baccalauréat ; il est à désirer que même les aspirants à ce grade prennent la peine d'étudier complètement ce cours de mécanique, dont les candidats aux Écoles ne doivent négliger aucune partie, sans se préoccuper du programme.

Je terminerai cette notice en signalant aussi l'exécution matérielle de cet ouvrage ; l'éditeur a eu soin de mettre des figures très nettes, de grande dimension ; les modèles de machines ont été choisis parmi les types les plus parfaits et reproduits avec une très grande netteté ; ces avantages, joints au fond même de l'ouvrage, contribuent à en faire un traité fort recommandable.

A. M.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1882

Algèbre.

Un professeur, pour donner à ses élèves une idée succincte de la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0$, les engage à remplacer x par $y - \frac{m}{y}$, ou par $m \sin \varphi$, en disposant de l'indéterminée m de telle sorte que l'équation transformée soit résoluble à la manière des équations du second degré, ou de la relation trigonométrique entre $\sin 3\varphi$ et $\sin \varphi$, et donne immédiatement une racine réelle. On en déduira les trois racines de l'équation proposée.

Appliquer ce procédé aux équations

$$x^3 + bx - 2 = 0; \quad x^3 - bx - 2 = 0,$$

et faire le calcul avec la précision que peuvent donner les tables à cinq décimales.

Géométrie descriptive.

Dans un plan $P\alpha P'$, perpendiculaire au plan vertical, et faisant un angle φ avec le plan horizontal, on décrit une circonférence sur la portion AB de la trace horizontale αP prise comme diamètre. Construire la surface engendrée par ce cercle tournant autour d'un axe vertical dont la projection horizontale C divise le diamètre AB en deux parties telles que

$$\frac{AC - CB}{AC + CB} = \sin \varphi.$$

Pour représenter les projections du corps ainsi engendré, on supposera que la partie située au-dessus de $P\alpha P'$ a été supprimée. (Épure à main levée.)

Mécanique.

1. — Description de l'injecteur Giffard.

2. — Engrenage à roues elliptiques, destiné à transmettre la rotation d'un axe à un autre axe parallèle dans un rapport qui varie entre deslimites données.

QUESTIONS PROPOSÉES

53. —On considère l'expression

$$u = \sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

et on propose de la transformer en un produit de deux facteurs de la forme $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Démontrer que la transformation n'est possible que si $a^2d = bc$, et qu'elle n'est avantageuse que si les nombres $a^2 - b$, $a^2 - c$ sont carrés parfaits.

Exemple

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + 3)}{6}$$

(*G. L.*)

54. — Résoudre le système d'équations à trois inconnues

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 - d^2}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{a}{d};$$

$$\frac{2y(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{2z(x - d)}{x^2 + y^2 + z^2 - d^2} = \frac{c}{d},$$

en supposant $a^2 + b^2 + c^2$ différent de d^2.

(*G. L.*)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PRÈS DU BOULEVARD MONTMARTRE. — 18840-2.

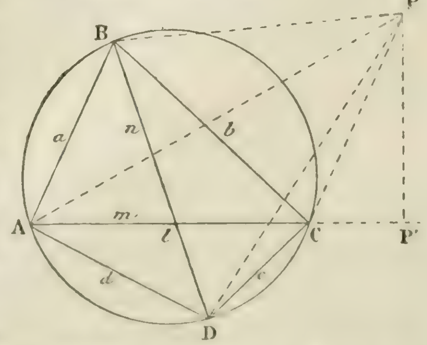
NOTE
SUR LES PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

Par M. **X. Antomari**, professeur au Lycée de Carcassonne.

Les propriétés dont il va être question sont relatives aux relations bien connues entre les côtés et les diagonales. Elles se déduisent simplement de la propriété générale suivante :

Dans tout quadrilatère inscriptible, si on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale.

Je sais, pour l'avoir vu à la fin du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, que cette proposition est due à Luchterhandt, qui l'a publiée dans le *Journal de Crelle*, t. XXIII. A la fin du même *Traité de Géométrie*, la démonstration de cette proposition est donnée comme application de la multiplication des déterminants. Par cela même, elle ne peut être enseignée en Mathématiques élémentaires. Nous allons en donner une simple, à la portée des commençants, et qui n'exige que la connaissance de la propriété du carré du côté d'un triangle opposé à un angle aigu ou à un angle obtus, ainsi que la propriété du produit des segments déterminés par une circonférence sur les sécantes issues d'un point.



Voici cette démonstration :

Soient ABCD le quadrilatère inscrit dans le cercle de centre O, et P un point

quelconque de son plan. Les diagonales de ce quadrilatère le partagent en quatre triangles; nous désignerons d'une manière générale l'aire de l'un de ces triangles par la lettre du sommet opposé. Par exemple, nous appellerons A l'aire du triangle BCD. Soient a, b, c, d les côtés du quadrilatère, m et n ses diagonales, enfin R le rayon du cercle circonscrit.

Remarquons d'abord que les deux triangles ABD et BCD ayant même base BD, on a

$$\frac{AI}{IC} = \frac{C}{A}$$

ou bien
$$\frac{AI}{C} = \frac{IC}{A} = \frac{m}{S}$$

en désignant par S l'aire du quadrilatère. On en déduit

$$AI = \frac{mC}{S}, \qquad (1)$$

$$IC = \frac{mA}{S}, \qquad (2)$$

Joignons le point P aux sommets du quadrilatère et au point I, et soit P′ sa projection sur AC. La considération des deux triangles API et IPC donne :

$$\overline{AP}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{AI}^2 + 2AI \times IP',$$
$$\overline{CP}^2 = \overline{IP}^2 + \overline{IC}^2 - 2IC \times IP'.$$

Multiplions la première de ces relations par IC, la deuxième par IA et ajoutons. Nous aurons

$$IC \times \overline{AP}^2 + IA \times \overline{CP}^2 = \overline{IP}^2 \times (AI + IC) + AI \times IC \times (AI + IC),$$

relation que l'on peut écrire

$$IC \times \overline{AP}^2 + IA \times \overline{CP}^2 = m\left(\overline{IP}^2 + R^2 - \overline{OI}^2\right), \quad (3)$$

puisque AI × IC est la puissance du point I. Enfin, si l'on tient compte des valeurs de IA et de IC données par (1) et (2), la relation (3) donne, après la suppression du facteur m,

$$A \times \overline{AP}^2 + C \times \overline{CP}^2 = S\left(\overline{IP}^2 + R^2 - \overline{OI}^2\right)\cdot$$

Le second membre ne dépendant que de la surface du quadrilatère et de la position du point I, on en conclut

$$A \times \overline{AP}^2 + C \times \overline{CP}^2 = B \times \overline{BP}^2 + D \times \overline{DP}^2$$
$$= S\,(IP^2 + R^2 - \overline{OI}^2)\ (*) \qquad (4)$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Dans tout quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Supposons en effet que le point P coïncide avec le point A par exemple, et rappelons que l'on a

$$A = \frac{bcn}{4R} \quad B = \frac{cdm}{4R} \quad C = \frac{adn}{4R} \quad D = \frac{abm}{4R}. \qquad (5)$$

D'ailleurs, on voit sur la figure que

$$AP = 0, \quad CP = m, \quad BP = a, \quad DP = d.$$

La relation (4) devient ainsi

$$\frac{adn}{4R} \times m^2 = \frac{cdm}{4R} \times a^2 + \frac{abm}{4R} \times d^2.$$

La suppression du facteur commun $\frac{adm}{4R}$ donne finalement

$$mn = ac + bd$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — *Dans tout quadrilatère inscriptible le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la même diagonale.*

Supposons en effet que le point P coïncide avec le point O. Alors on a $AP = CP = BP = DP = R$. La relation (4) devient

$$A + C = B + D$$

et en tenant compte de (5) on aura

$$\frac{n}{4R}(ad + bc) = \frac{m}{4R}(ab + cd),$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Remarque. — La démonstration qu'on donne de ces deux propriétés, dans les cours de Mathématiques élémentaires, repose sur la similitude. Celle que nous venons d'indiquer

(*) On peut remarquer que la démonstration s'applique à un point quelconque de l'espace.

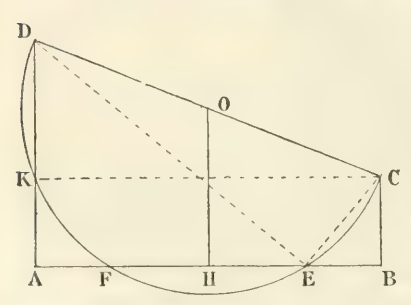
nous semble préférable parce qu'elle les fait découler d'une propriété générale; en outre, la démonstration de cette propriété générale n'exige aucun effort de mémoire pour les constructions, effort devant lequel les élèves reculent toujours, au moins pour ce qui concerne le corollaire II.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Dans le troisième livre de Géométrie élémentaire, on étudie en général deux problèmes de construction de lignes, en donnant une forme particulière à l'énoncé; nous nous proposons ici de traiter ces problèmes d'une manière plus générale, et d'en déduire les conditions de possibilité, et aussi les constructions ordinaires dans le cas particulier dont nous parlons. L'idée de cette généralisation ne nous appartient pas; nous avons trouvé, dans l'*Algèbre* de M. Burat l'indication de la construction relative au premier problème, à l'occasion d'une question d'algèbre qui n'est que la traduction de l'énoncé que nous allons indiquer.

Problème I. — *Construire deux lignes, connaissant leur somme et leur produit;* ou autrement, *construire les dimensions d'un rectangle, connaissant le périmètre et les dimensions d'un rectangle équivalant.*

Soient AB la somme des deux lignes, m et n les dimensions du rectangle donné. Au point A j'élève à AB une perpendiculaire AD égale à m, et au point B une perpendiculaire BC égale à n; ces deux perpendiculaires étant mesurées *du même côté de* AB. Je mène la ligne CD, et sur CD comme diamètre je décris une circonférence, qui, en général, coupe AB en deux points E, F; les lignes cherchées sont AE, EB, ou AF, FB.



Pour le prouver, je mène les lignes DE, EC; les deux triangles semblables DAE, ECB, me donnent immédiatement

$$\frac{AE}{CB} = \frac{AD}{EB},$$

ou

$$AE \cdot EB = mn.$$

La perpendiculaire abaissée du point O, milieu de CD, sur AB, tombe en H, milieu de AB; ce point H est aussi le milieu de la corde EF; il en résulte que AF = EB.

Pour que le problème soit possible, il faut que la circonférence CD rencontre AB; ce qui exige que OH soit inférieur à $\frac{CD}{2}$.

Or

$$OH = \frac{m+n}{2},$$

et

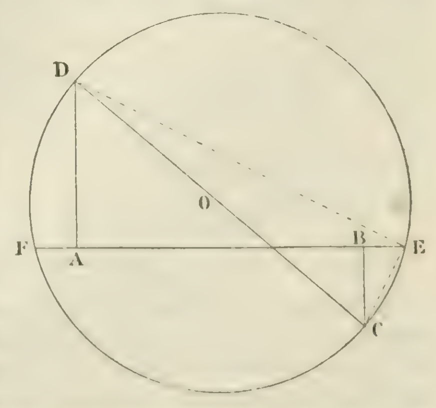
$$CD^2 = CK^2 + DK^2 = AB^2 + (m-n)^2.$$

On en tire facilement $mn < \frac{AB^2}{4}$.

Donc le carré de la demi-somme donnée doit être supérieur à la surface du rectangle.

Corollaire. — *Si* m *et* n *sont égaux entre eux*, CD *est parallèle à* AB, AD *est tangent en* D *à la circonférence, et l'on retrouve la solution ordinaire, en renversant la figure.*

Problème II. — *Trouver les côtés d'un rectangle, connaissant la différence des côtés et les dimensions d'un rectangle équivalent.*



Soient AB la différence donnée, m et n les dimensions du rectangle donné. J'élève encore aux points A et B, mais *de côtés différents de* AB, des perpendiculaires AD et BC égales respectivement à m et à n; sur CD comme diamètre je décris une circonférence qui rencontre en

E et F la ligne AB; les lignes AE, BE sont les lignes cherchées. Je le démontrerais, comme précédemment, en considérant les triangles ADE, BCE.

Le problème est toujours possible, car il y a forcément une intersection de la droite AB avec la circonférence DC, celle-ci ayant, par la construction même, des points de part et d'autre de AB.

Corollaire. — *Si* m *et* n *sont égaux, la droite* AB *a son milieu au centre* O *de la circonférence. Si, alors, sur* AB *comme diamètre, je décris une circonférence concentrique à la première,* BC *sera tangent à cette seconde circonférence, et comme* OC *est égal à* OE, *on retrouve la construction habituelle du cours.*

AUTRE NOTE DE GÉOMÉTRIE

La propriété bien élémentaire dont nous voulons parler ici se démontre de plusieurs manières différentes; en particulier, on peut en donner la démonstration suivante :

Théorème. — *La tangente issue d'un point à une circonférence est moyenne proportionnelle entre une sécante entière issue du même point et la partie extérieure de cette sécante.*

Pour le prouver je mène le diamètre qui passe par le point A; j'ai d'après un théorème connu

$$AB.AC = AE.AF = (AO - R)(AO + R)$$

ou

$$AB.AD = AO^2 - R^2.$$

Soit AD la tangente issue du point A; le triangle rectangle AOD me donne

$$AD^2 = AO^2 - OD^2 = AO^2 - R^2.$$

Donc

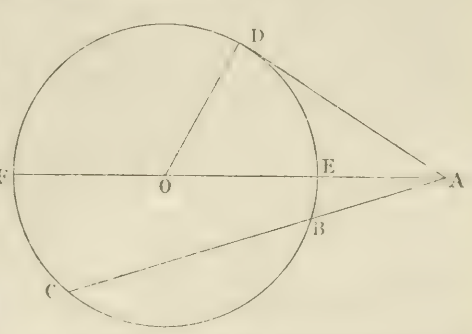
$$AD^2 = AB.AC.$$

Théorème. — *Réciproquement, deux droites se coupant au point* A, *si sur l'une on prend deux points* B, C, *du même côté de* A, *et sur l'autre un point* D, *tel que* $AD^2 = AB.AC$, *la circonférence qui passe par les points* B, C, D, *est tangente à* AD *au point* D.

Soient en effet O le centre de cette circonférence, et R son rayon; j'ai, en vertu d'un théorème connu,

$AB.AC = AO^2 - R^2$.

Mais, d'après l'hypothèse, j'ai $AB.AC = AD^2$ donc $AD^2 = AO^2 - R^2$, ou bien, puisque OD est égal au rayon, $AD^2 + OD^2 = AO^2$; par suite le triangle AOD est rectangle en D, et la ligne AD, perpendiculaire à l'extrémité du rayon, est tangente en D à la circonférence.



CONCOURS GÉNÉRAL

Solution de la question proposée en Mathématiques élémentaires, par M. Em. Bernheim (*),
Élève au Lycée Charlemagne. (Classe de M. Launay.)

Un pentagone ABCMD *se déforme en satisfaisant aux conditions suivantes : les sommets* A *et* B *restent fixes, les cinq côtés conservent chacun la même longueur. Enfin les angles variables* ADM, BCM, *comptés dans un même sens de rotation, restent constamment égaux entre eux. Sur* MC *on construit un triangle* MCF *semblable au triangle* MDA, *le côté* MC *ayant pour homologue* BD. *Sur* MD *on construit un triangle* MDF *semblable à* MCB, *le côté* MD *ayant pour homologue* BC. *Le pentagone se déformant dans les conditions définies, on propose :*

1° D'étudier les variations de la longueur EF ;

2° De trouver le lieu décrit par le sommet M ;

3° De trouver les conditions nécessaires pour que M *décrive une droite* Δ ;

(*) Premier prix.

4° De trouver les conditions nécessaires pour que la droite Δ *passe par le sommet* A ;

5° Le point M *décrivant une droite* Δ *passant par* A, *on considère le cas particulier où les deux côtés* AD, MD *du pentagone sont égaux entre eux, et l'on demande le lieu que décrit un point quelconque invariablement lié au côté mobile* MD *du pentagone.*

1. — Pour étudier les variations de la longueur de EF cherchons une expression de cette longueur.

Dans le triangle EMF on a

$$EF^2 = ME^2 + MF^2 - 2ME \cdot MF \cos EMF. \qquad (1)$$

Or les angles EMF, AMB sont égaux. En effet on a

$$BMF = BMC - FMC = MED - MAE = AME$$

et, par suite,

$$BME + BMF = AME + EMB \text{ ou } EMF = AMB.$$

D'autre part, le triangle MCF étant par construction semblable à AMD, on a :

$$\frac{MF}{MA} = \frac{MC}{AD}$$

d'où

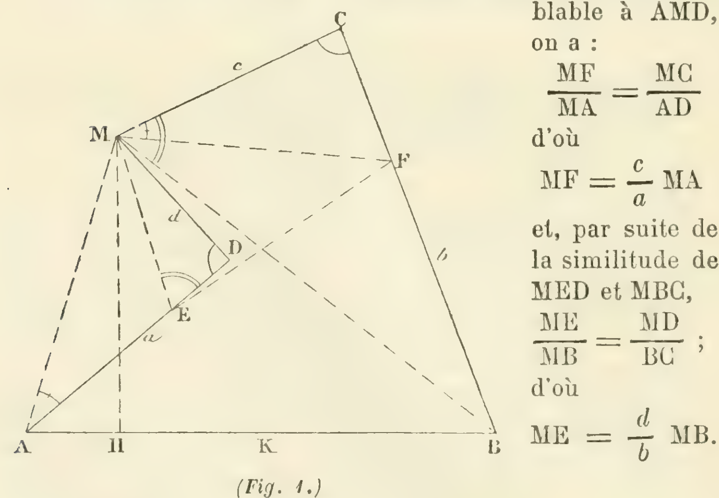
$$MF = \frac{c}{a} MA$$

et, par suite de la similitude de MED et MBC,

$$\frac{ME}{MB} = \frac{MD}{BC} ;$$

d'où

$$ME = \frac{d}{b} MB.$$



(*Fig. 1.*)

L'égalité (1) devient donc

$$EF^2 = \frac{c^2}{a^2} MA^2 + \frac{d^2}{b^2} MB^2 - 2 \frac{cd}{ab} MA \cdot MB \cos AMB.$$

Or, dans le triangle AMB, on a

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos AMB ;$$

d'où $\qquad 2MA \cdot MB \cos AMB = MA^2 + MB^2 - K^2.$

Par suite,

$$EF^2 = \frac{c^2}{a^2}\ MA^2 + \frac{d^2}{b^2}\ MB^2 - \frac{cd}{ab}\left(MA^2 + MB^2\right) + \frac{cd}{ab}\ K^2$$

$$\text{ou}\ \ EF^2 = \left(\frac{c}{a} - \frac{d}{b}\right)\left(\frac{c}{a}\ MA^2 - \frac{d}{b}\ MB^2\right) + \frac{cd}{ab}\ K^2$$

ou encore

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left[(bc - ad)\ (bcMA^2 - adMB^2) + abcdK^2\right].$$

D'autre part les deux triangles ADM, BCM donnent

$$AM^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos ADM$$

et

$$BM^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos BCM.$$

Les angles ADM, BCM étant égaux, on a donc

$$\frac{a^2 + d^2 - AM^2}{ad} = \frac{b^2 + c^2 - BM^2}{bc}$$

ou

$$bcMA^2 - adMB^2 = bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2). \quad (2)$$

Par suite l'expression de EF^2 devient

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\left[(bc - ad)[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)] + abcdK^2\right]$$

ou,

$$EF^2 = \frac{1}{a^2b^2}\Big[b^2c^2(a^2 + d^2) + a^2d^2(b^2 + c^2)$$
$$- abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - K^2)\Big].$$

Cette expression ne contient que les longueurs données des côtés du pentagone ; la longueur EF est donc *constante*.

2. — Cherchons le lieu du sommet M.

Pour cela abaissons du point M sur AB la perpendiculaire MH : appelons y sa longueur, x la distance de son pied H au point A. On a alors

$$MA^2 + y^2 + x^2 \quad \text{et}\ MB^2 = y^2 + (K - x)^2.$$

En remplaçant MA^2 et MB^2 par ces expressions dans l'égalité (2), on trouve

$$bc(y^2 + x^2) - ad\,[y^2 + (K - x)^2] = bc\,(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)$$

$$\text{ou}\quad (bc - ad)\ y^2 + (bc - ad)\ x^2 + 2Kadx = bc(a^2 + d^2)$$
$$- ad(b^2 + c^2) + adK^2 \qquad (3)$$

Divisons les deux membres par $(bc - ad)$, en faisant abs-

traction du cas particulier où $bc - ad = 0$. Il vient

$$y^2 + x^2 + \frac{2Kad}{bc - ad}\,x = \frac{1}{bc - ad}\Big[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2\ c^2) + adK^2\Big]$$

ou, en complétant le carré en x,

$$y^2 + \left(x + \frac{Kad}{bc - ad}\right)^2 = \frac{1}{bc - ad}\Big[bc(a^2+d^2) - ad\,(b^2 + c^2) + adK^2\Big] + \frac{K^2a^2d^2}{(bc - ad)^2}$$

ou,

$$y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(bc - ad)^2}\Big[[(bc - ad)[bc(a^2 + d^2) - ad(b^2 + c^2)] + abcdK^2\Big]$$

Or si l'on appelle q la longueur constante EF, la parenthèse est précisément égale à $a^2b^2q^2$. On a donc

$$y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2 = \frac{a^2b^2q^2}{(bc - ad)^2}. \qquad (4)$$

Cherchons ce que signifie cette égalité. Pour cela considérons sur la droite AB un point P, tel que sa distance au point A soit égale en grandeur et en signe à $\frac{Kad}{ad - bc}$.

L'expression $\left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2$ représente le carré de HP, H étant la projection de M sur AB ; d'ailleurs y^2 est le carré de MH ; on a donc

$$MP^2 = y^2 + \left(x - \frac{Kad}{ad - bc}\right)^2.$$

L'égalité (4) exprime donc que la longueur MP est constante, c'est-à-dire que le point M décrit un cercle ayant pour centre le point P et pour rayon la longueur $\frac{abq}{bc - ad}$.

Remarque. — La distance du centre P au point A a pour expression $\frac{Kad}{ad - bc}$ ou $\frac{K}{1 - \frac{bc}{ad}}$. On voit donc que si $\frac{bc}{ad} < 1$.

le centre P est à droite de B, et si $\frac{bc}{ad} > 1$, il est à gauche du point A.

Remarque II. — On peut facilement construire autant de points que l'on veut du lieu : en effet, si l'on se donne un angle α auquel doivent être égaux les angles D et C, on pourra construire les triangles ADM, BCM, et l'on connaîtra ainsi les longueurs MA, MB qui déterminent le point M, pourvu que α soit tel que l'on ait $MA + MB > AB$. En particulier, si l'on donne à α les valeurs 180° et 90°, on obtient très facilement quatre points du cercle, symétriques deux à deux par rapport à AB. Le cercle se trouve ainsi parfaitement déterminé.

3. — Pour que ce cercle, lieu du point M, se réduise à une droite, il faut que son centre s'éloigne à l'infini. Il suffit, pour cela, que l'on ait $bc = ad$.

En effet, si l'on suppose $bc = ad$, l'égalité (3) devient

$$x = \frac{1}{2K}(a^2 + d^2 + K^2 - b^2 - c^2).$$

Cette égalité exprime que tous les points M se projettent sur AB en un même point H situé à une distance du point A égale à $\frac{1}{2K}(a^2 + d^2 + K^2 - b^2 - c^2)$, c'est-à-dire que le lieu du point M est la perpendiculaire Hz élevée en H à AB.

Cette droite est la corde commune aux deux cercles qui ont respectivement pour centres les points A et B et pour rayons les longueurs $a + d$ et $b + c$. En effet, quand les angles D et C deviennent égaux à 180° les longueurs MA et MB sont respectivement égales à $a + d$ et $b + c$.

Remarque. — L'égalité $bc = ad$ exprime que les triangles BCM, ADM sont équivalents, car les angles C et D sont égaux, par hypothèse.

4. — Pour que la droite Hz passe par le point A, il faut que la distance AH soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 + K^2 = 0. \qquad (5)$$

En effet, en supposant cette nouvelle condition réalisée

l'égalité (2) devient

$$MA^2 - MB^2 = -K^2 \text{ ou } MB^2 - MA^2 = K^2.$$

Cette égalité exprime bien que le lieu du point M est la perpendiculaire à AB au point A.

Remarque I. — L'égalité (5) peut s'écrire, en tenant compte de la relation $ad = bc$,

$$(a + d)^2 - (b + c)^2 + K^2 = 0$$

ou $$K^2 = (b + c)^2 - (a + d)^2$$

ou encore $$K^2 = (b + c + a + d)(b + c - a - d).$$

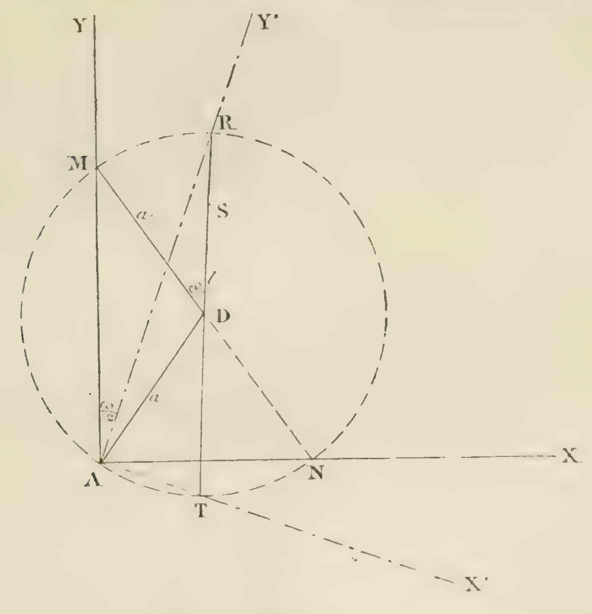
Ainsi, pour que le sommet M décrive la perpendiculaire AY à AB, il faut que la longueur du côté fixe AB soit moyenne proportionnelle entre la somme des longueurs des côtés mobiles et l'excès de la longueur de la ligne brisée BCM sur celle de la ligne brisée ADM.

Remarque II. — Nous avons vu que le lieu du point M est un cercle ou une droite passant par les points d'intersection des deux circonférences qui ont pour centres les points A et B et pour rayons les longueurs $a + d$ et $b + c$. Mais le point M est lié aux points A et B par des lignes brisées dont les longueurs respectives sont $a + d$ et $b + c$; les distances MA et MB ne peuvent donc être supérieures à $a + d$ et $b + c$. Par conséquent le point M ne peut décrire que la portion de circonférence ou de droite qui est située à la fois à l'intérieur des deux cercles A et B, entre leurs deux points d'intersection.

5. — Supposons maintenant que le point M parcoure la perpendiculaire AY à AB, et qu'en outre le côté MD du pentagone soit égal à AD. Soit S un point invariablement lié au côté MD: nous pouvons le supposer défini par sa distance l au point D et par l'angle ω que fait la direction DM avec DS (*fig. 2*).

Considérons une position quelconque de la ligne brisée ADM et prolongeons MD jusqu'à la rencontre de AX en N. Les triangles ADM et ADN sont isoscèles; par suite la droite MN est constamment égale à $2a$. Imaginons le cercle décrit sur MN comme diamètre : quelle que soit la position de MN, il passe toujours par le point A. Prolongeons DS jusqu'aux

points de rencontre de la circonférence en R et T : traçons les droites rectangulaires AR et AT. L'angle RAM est constant et égal à $\frac{\omega}{2}$, car il est toujours inscrit dans le cercle de rayon a et intercepte l'arc MR qui est constamment égal à $a\omega$.



(Fig. 2.)

Par suite le point R décrit la droite AY' et le point T décrit la droite AX' qui est perpendiculaire. D'ailleurs, la droite RT est constamment égale à $2a$. Par conséquent, le point S de la droite RT, qui est entraînée dans le mouvement de la droite MD, décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant AX' et AY' et ont pour longueurs respectives $2(a+l)$ et $2(a-l)$.

QUESTION 3

Résoudre l'équation

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation réciproque du quatrième degré, au sens général, signalée par M. de Longchamps dans son étude sur les équations quadratiques. On peut la résoudre très facilement et trouver les conditions de réalité des quatre racines; en effet, en divisant par x^2 et posant

$$x + \frac{d}{x} = z,$$

nous avons l'équation

$$z^2 + az + b - 2d = 0.$$

Il faut d'abord que l'on ait

$$a^2 - 4b + 8d > 0:$$

puis, l'équation qui donne x en fonction de z étant

$$x^2 - zx + d = 0.$$

on doit avoir en outre $z^2 - 4d > 0$.

Ainsi, l'équation en z doit avoir ses racines réelles, et comprises en dehors de l'intervalle limité par les valeurs

$$-2\sqrt{d} + 2\sqrt{d}.$$

Toute valeur de z qui ne répond pas à ces conditions donne pour x un couple de valeurs imaginaires.

Il est à remarquer que, à chaque valeur réelle de z donnant des racines imaginaires, correspondent pour x deux valeurs imaginaires conjuguées, tandis que les valeurs de x qui proviennent d'une racine imaginaire de z ne sont pas conjuguées; l'une de ces valeurs a sa conjugée fournie par l'autre valeur de z.

NOTA. — La question a été résolue par MM. Germain, à Belley; Berthelot, à Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; P. Godefroy, à Lyon; Masserand, à Passy; Sarrazin, à Besançon; A. La Chesnais, lycée Saint-Louis, à Paris

QUESTION 8

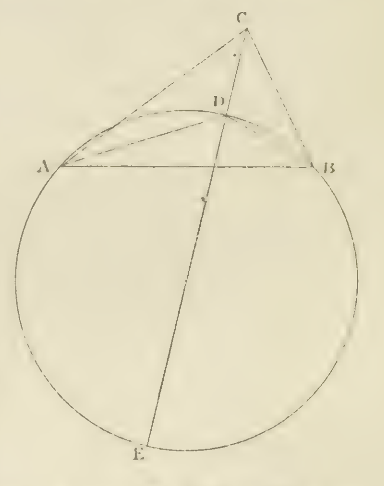
Construire géométriquement un triangle dont on connait deux côtés et la ligne qui joint le sommet de l'angle compris au centre du cercle inscrit.

Soit ABC le triangle proposé, dont on connaît CA, CB et CD, D étant le centre du cercle inscrit. Les lignes AD, BD, CD sont les bissectrices des angles, et si l'on fait passer un cercle par les trois points A, D, B, on sait qu'il rencontre la bissectrice CD en un point E tel que l'angle DBE est droit. Maintenant, comme on a

CAD = DAB = BED,

et ACD = BCE, les triangles ACD, BCE sont semblables et donnent

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}.$$



Donc il est facile de trouver le point E; d'où cette construction :

On prend la droite CD, et sur cette ligne prolongée on prend, à partir de C, une quatrième proportionnelle CE à CD et aux côtés donnés; sur DE comme diamètre, on décrit une circonférence, et de C comme centre avec CB comme rayon, on décrit un arc de cercle, qui détermine le point B; puis, sur l'autre demi-circonférence, on déterminera le point A, à une distance CA du point C.

Nota. — Cette solution très simple est empruntée à la *Geometrical Analysis* de Benjamin Hallowell, professeur de mathématiques à Philadelphie.

QUESTION 14

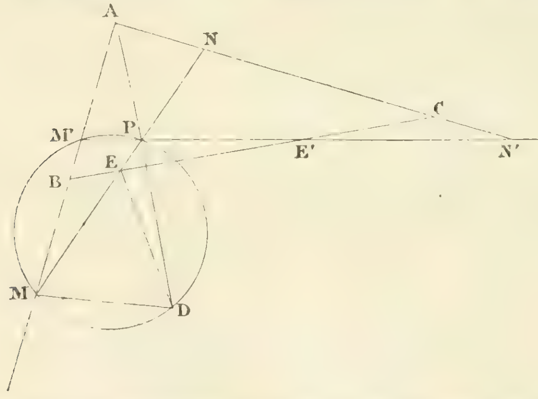
Solution par M. Pierre G. la Chesnais, à Henri IV.

Par un point pris sur la perpendiculaire abaissée dans un triangle rectangle du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, mener une droite telle que la portion comprise entre les deux côtés de l'angle droit ait son milieu sur l'hypoténuse.

(Hallowell.)

Je suppose le problème résolu.

Dans la circonférence dont le centre est en E, et qui passe en M, A, N, D (D étant le symétrique du sommet A



par rapport à l'hypoténuse), je vois que l'angle au centre MED est double de l'angle MAD :

$$\text{MED} = 2(90° - \text{B}).$$

D'ailleurs le triangle MED est isoscèle, et j'ai

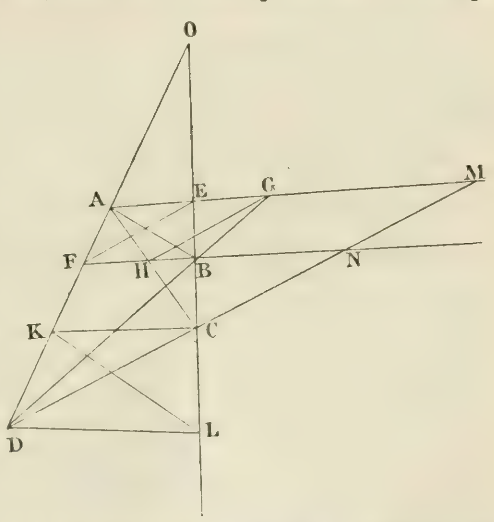
$$\text{EMD ou PMD} = \frac{180 - \text{MED}}{2} = \text{B}.$$

On obtiendrait donc le point M en construisant sur PD comme corde un segment de cercle capable de l'angle B, ce qui donne, en général, deux droites répondant à la question, MEPN, M'PE'N'.

QUESTION 24

Solution par M. DEVILLE, canonnier au régiment d'artillerie de Marine.

On donne deux triangles OAB, OCD *qui ont un angle* O *commun. 1° Mener par les points* A *et* B *deux parallèles* AE, BF, *qui coupent respectivement* OB *en* E, OA *en* F, *de façon que* EF *soit parallèle à* CD ; *déterminer comment varie la longueur* EF *lorsque la direction de* CD *varie. — 2° Le problème étant supposé résolu, on mène* BD, *qui rencontre* AE *en* G, *et* AC, *qui rencontre* BF *en* H : *démontrer que* GH *est parallèle à* CD ; *— 3° Démontrer que deux parallèles à* AE *menées par* C *et* D *interceptent sur les deux côtés communs une droite parallèle à* AB.



Je suppose le problème résolu : j'ai alors les relations

$$\frac{OA}{OF} = \frac{OE}{OB}, \text{ et } \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OC}.$$

De ces deux proportions je tire les valeurs de OE et OF :

$$OE^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{OC}{OD}; \quad OF^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{OD}{OC}.$$

Je puis donc facilement construire le point E ou le point F.

J'ai de plus $$EF = CD \cdot \frac{OE}{OC};$$

par suite, en remplaçant OE par sa valeur,

$$EF^2 = OA \cdot OB \cdot \frac{CD^2}{OC \cdot OD}.$$

Or, on a

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos O.$$

Donc $$EF^2 = OA \cdot OB \cdot \left(\frac{OC}{OD} + \frac{OD}{OC} - 2 \cos O\right).$$

Posant $$\frac{OC}{OD} = x,$$

le tout revient à chercher les variations de $x + \frac{1}{x}$; or, x étant positif, on sait que cette expression passe par un minimum pour $x = 1$; ce minimum donne

$$EF^2 = 2\,OA \cdot OB\,(1 - \cos O) = 4\,OA \cdot OB \sin^2 \frac{O}{2}.$$

2. Soient M et N les points où CD rencontre AE et BF ; j'ai les égalités $$\frac{AG}{AM} = \frac{FB}{FN} = \frac{EB}{EC} = \frac{AH}{AC}.$$

Donc, en vertu de l'égalité du premier et du dernier rapport, GH et CD sont parallèles.

3. Soient K et L les points où les parallèles CK, DL à AE rencontrent les côtés de l'angle; j'ai la suite de rapports égaux

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OC}{OE} = \frac{OD}{OF} = \frac{OL}{OB}.$$

Donc, en vertu de l'égalité du premier et du dernier rapport, KL et AB sont parallèles.

QUESTION 29

Solution par M. Deville, canonnier au régiment d'artillerie de Marine.

Les diagonales 2a *et* 2b *d'un losange sont vues sous des angles* α *et* β *d'un point dont la distance au centre est* c. *Prouver que l'on a :*

$$b^2(a^2 - c^2)^2\, tg^2\, \alpha + a^2(b^2 - c^2)^2\, tg^2\, \beta = 4a^2b^2c^2.$$

Soit O le centre du losange(*) ; OA = OA′ = a ; OB = OB′

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$= b$; P le point donné tel que $APA' = \alpha$, $BPB' = \beta$. J'abaisse PS perpendiculaire sur AA'; j'ai

$$AA'^2 = AP^2 + A'P^2 - 2AP.A'P \cos \alpha.$$

En posant $\qquad OS = x, \quad PS = y,$

je trouve facilement, en remplaçant AP, A'P par leurs valeurs et élevant au carré,

$$[y^2 + (x + a)^2][y^2 + (x - a)^2] \cos^2\alpha = (a^2 - c^2)^2,$$

Mais $\qquad x^2 + y^2 = c^2;$

j'en tire

$$\cos^2\alpha = \frac{(a^2 - c^2)^2}{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2x^2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{4a^2(c^2 - x^2)}{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2x^2}$$

et $$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{4a^2(c^2 - x^2)}{(a^2 - c^2)^2}.$$

J'aurai de même $\operatorname{tg}^2 \beta = \dfrac{4b^2(c^2 - y^2)}{(b^2 - c^2)^2}.$

J'en tire

$$c^2 - x^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4a^2}; \quad c^2 - y^2 = \frac{(b^8 - c^2)^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{4b^2}.$$

et en ajoutant ces égalités membre à membre, j'aurai la relation énoncée.

Nota. — La même question a été résolue par M. Puig. de Montpellier.

QUESTION 30

Solution par M. Maystre, élève au Collège du Vigan (Gard).

Trois cercles A, B, C *se touchent deux à deux, et une tangente commune à* A *et* B *est parallèle à une tangente commune à* A *et* C *; prouver que si* a, b, c *sont les rayons et* p, q *les distances des centres de* B *et* C *au diamètre de* A *qui est normal aux deux tangentes, on a* $\qquad pq = 2a^2 = 8bc. \qquad$ (Wolstenholme.)

Menons CK perpendiculaire sur MB. On a

$$AM^2 = AB^2 - \overline{MB}^2 = (a + b)^2 - p^2 \qquad (1)$$
$$AN^2 = AC^2 - NC^2 = (a + c^2) - q^2. \qquad (2)$$

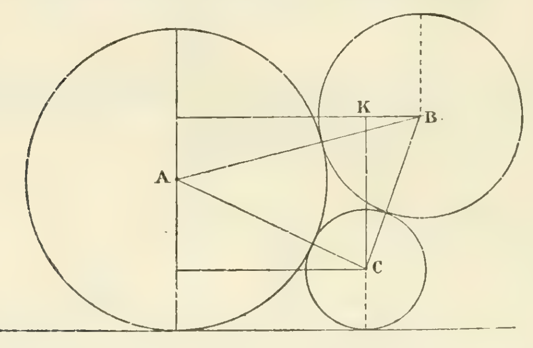
Or $AM = (a - b)$, $AN = (a - c)$, remplaçons dans (1) et (2), on a après simplifications

$$4ab = p^2,$$
$$4ac = q^2;$$

par suite $$pq = 4a\sqrt{bc}.$$

Le triangle KBC donne

$$BK^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MN}^2$$
$$(p - q)^2 = (b + c)^2 - \big(2a - (b + c)\big)^2.$$



Développant cette dernière égalité, remplaçant p^2, q^2, par les valeurs trouvées précédemment, on a

$$pq = 2a^2.$$

Nous avons trouvé $pq = 4a\sqrt{bc}$; d'après la relation précédente on a $$2a^2 = 4a\sqrt{bc}$$

ou $$a^2 = 4bc;$$

par suite $$2a^2 = 8bc;$$

donc $$pq = 2a^2 = 8bc.$$

NOTA. — Ont résolu la même question : MM. Musy, collège de Pontarlier; G. Pigeaud et G. Berthelot, à Châteauroux; Vigy, à Vitry-le-François; Colin, à Bar-le-Duc; Deville, à Lorient; A. La Chesnais, lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 31

Solution par M. Puig, élève du Lycée de Montpellier.

Déterminer le minimum du rapport de la somme des volumes engendrés par un riangle rectangle tournant successivement autour des côtés de l'angle droit, au volume engendré par le

triangle tournant autour de l'hypoténuse, en supposant que le périmètre du triangle soit constant, les côtés étant variables.

Soient a l'hypoténuse, b et c les autres côtés; h la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse; le volume engendré par le triangle tournant autour de l'hypoténuse est
$$\frac{1}{3}\pi a h^2;$$
la somme des volumes engendrés par le triangle tournant successivement autour des côtés est
$$\frac{1}{3}\pi bc\,(b+c).$$

Donc, l'expression dont on cherche le maximum est
$$\frac{bc\,(b+c)}{ah^2},$$
les quantités a, b, c, h étant liées par les relations
$$b^2+c^2=a^2,$$
$$bc=ah,$$
$$a+b+c=2p.$$

De ces équations on tire facilement b, c, h en fonction de a, et on est amené à chercher le minimum de l'expression
$$\frac{a\,(2p-a)}{2p\,(p-a)};$$
or, on sait, par la nature du problème, que a doit être positif et inférieur à p; de plus, dans ces conditions, le numérateur augmente, et le dénominateur diminue, lorsque a augmente; il en résulte que le rapport augmente pour ces deux raisons. Donc, le minimum du rapport aura lieu lorsque nous donnerons à a la plus petite des valeurs qu'il puisse prendre pour donner pour b et c des valeurs réelles.

Or, nous avons
$$b+c=2p-a;\qquad bc=(b+c)^2-a^2=2p\,(p-a).$$

Donc, b et c sont racines de l'équation
$$X^2-(2p-a)\,X+2p\,(p-a)=0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut que nous ayons
$$(2p-a)^2-8p\,(p-a)\geq 0$$
ou
$$a^2+4pa-4p^2\geq 0.$$

Comme a doit être positif, nous trouverons comme condition $$a \geq 2p\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Donc, le minimum de a a lieu pour
$$a = 2p\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

En portant cette valeur dans le rapport dont on cherche le minimum, on trouve $$\frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}{3 - 2\sqrt{2}}.$$

Or, le dénominateur étant précisément égal à $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$, le minimum du rapport est $2\sqrt{2}$,
et alors le triangle est isoscèle. Ses côtés sont
$$a = 2p\left(\sqrt{2} - 1\right)$$
$$b = c = p\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Varnier, à Bar-le-Duc; Jacquemet, Vail et Lenoir, école Albert-le-Grand, à Arcueil.

QUESTION 33

Solution par M. Auric, au Collège d'Orange.

Trouver les côtés d'un triangle, sachant qu'ils sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique, que si l'on augmente chaque côté de 50 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 17 mètres, et que si chaque côté croît de 60 mètres, le rayon du cercle inscrit augmente de 20 mètres.

Soient a le côté moyen du triangle, r la raison de la progression et x le rayon du cercle inscrit.

Les côtés du triangle sont évidemment $a + r$, a, $a - r$.

On a
$$p = \frac{3a}{2}, p - a = \frac{a - 2r}{2}, p - b = \frac{a}{2}, p - c = \frac{a + 2r}{2}$$

Or, $$x = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

ou, après réduction $$x = \sqrt{\frac{a^2 - 4r^2}{12}}. \qquad (1)$$

Les énoncés nous donnent

$$x + 17 = \sqrt{\frac{(a+50)^2 - 4r^2}{12}} \qquad (2)$$

et

$$x + 20 = \sqrt{\frac{(a+60)^2 - 4r^2}{12}}. \qquad (3)$$

De (1) on tire $\quad 4r^2 = a^2 - 12x^2. \qquad (4)$

Élevant (2) et (3) au carré, on a

$$(x+17)^2 \times 12 = (a+50)^2 - 4r^2 = a^2 + 100a + 2500 - 4r^2$$

ce qui donne $\quad 408x = 100a - 968. \qquad (5)$

De même

$$(x+20)^2 \times 12 = (a+60)^2 - 4r^2 = a^2 + 120a + 3600 - r4^2$$

$$480x = 120a - 1200. \qquad (6)$$

Résolvant les équations (5) et (6) on a

x = rayon du cercle inscrit = 4 mètres.

a = côté moyen du triangle = 26 mètres.

En remplaçant dans (4) on trouve

r = raison de la progression = 11 mètres.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, au collège d'Épinal; Marsy, à Valenciennes; Mosnet, à Thiers.

QUESTIONS PROPOSÉES

55. — On considère deux droites rectangulaires, Ox, Oy, et dans un plan une courbe φ quelconque, mais symétrique par rapport à Ox. Soit M un point de cette courbe; on mène la normale en M à la courbe φ; puis, ayant pris le point M′, symétrique de M par rapport à Ox, point qui est situé sur φ, par hypothèse, on mène la tangente à φ en ce point; cette tangente et la normale en M donnent deux droites. On considère les bissectrices de leur angle; et du point O on abaisse des perpendiculaires sur ces bissectrices; lieu des pieds de ces perpendiculaires. *(G. L.)*

56. — On considère un cercle C de centre O; soit AB un diamètre fixe de ce cercle; par le point O, on mène une circonférence C′ tangente à AB; puis on mène une tangente

commune aux cercles C et C′; on propose de trouver le lieu des points de contact de cette dernière droite avec C′, lieu qui se compose de deux droites parallèles. *(G. L.)*

57. — On considère un cercle C, et une droite D, tangente à C au point O; sur D, on prend deux points A et B tels que $OA.OB = K^2$, K étant une ligne donnée ; par ces points A et B, on mène à C des tangentes; soient A′ et B′ les points de contact. D'un point fixe P, pris dans l'espace, on abaisse sur A′B′ une perpendiculaire PI; trouver le lieu décrit par le point I. *(G. L.)*

58. — On considère l'équation du quatrième degré

$$(x+\alpha)(x+\alpha+1)(x+\alpha+2)(x+\alpha+3)+h=0.$$

On propose de résoudre cette équation, et de montrer que ses racines sont imaginaires si h est supérieure à 1, deux à deux coïncidentes si $h = 1$, et réelles si h est inférieur à 1. *(G. L.)*

59. — Résoudre l'équation

$$x(x+\alpha)(x+\beta)(x+\alpha+\beta)+h=0.$$

60. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0,$$

et plus généralement

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$

on fera voir que les trois racines sont toujours réelles, et même toujours commensurables si a^2+b^2 est un carré.

(G. L.)

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE. — 21308-2.

NOTE SUR LA DIFFÉRENCE

ENTRE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET LA MOYENNE GÉOMÉTRIQUE DE QUANTITÉS POSITIVES

Par M. **J. Bourget.**

(*Suite*, voir page 79.)

Théorème. — *La moyenne arithmétique de quantités positives dont deux au moins sont inégales, est supérieure à la moyenne arithmétique de la somme des racines* r^{es} *de leurs produits* r *à* r.

Soient $$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$$
n quantités positives qui ne soient pas toutes égales. Désignons par S'_r, $S''_r\ldots$ les sommes de ces quantités prises r à r et par P'_r, $P''_r\ldots$ les produits r à r correspondants de ces mêmes quantités ; $P^{(h)}_r$ renferme les mêmes lettres que $S^{(h)}_r$.

Le théorème fondamental nous donne la série des inégalités suivantes:
$$\frac{S'_r}{r} > \sqrt[r]{P'_r},$$
$$\frac{S''_r}{r} > \sqrt[r]{P''_r}.$$
$$\ldots\ldots$$

Quelques-unes de ces inégalités peuvent être des égalités. Ajoutons membre à membre, nous aurons
$$\frac{S'_r + S''_r + S'''_r\ldots}{r} > \sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''_r} + \sqrt[r]{P'''_r} + \ldots$$

Mais au numérateur du premier membre chaque quantité a sera répétée autant de fois qu'il y a de combinaisons de $n-1$ lettres $(r-1)$ à $(r-1)$, nombre que nous désignerons avec Cauchy par $(n-1)_{r-1}$; donc l'inégalité ci-dessus devient
$$(n-1)_{r-1}\cdot\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{r} > \sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''_r} + \sqrt[r]{P'''_r} + \ldots$$

Mais $(n)_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 . 2 \quad 3 . \dots \quad r}$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 . 2 \dots (r-1)} . \frac{n}{r} = (n-1)_{r-1} \frac{n}{r}.$$

Donc on peut écrire l'inégalité ci-dessus sous la forme

$$\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} > \frac{\sqrt[r]{P'_r} + \sqrt[r]{P''_r} + \sqrt[r]{P'''_r} + \dots}{(n)_r}$$

C'est le théorème qu'il s'agissait de démontrer, car les quantités P sont au nombre de $(n)_r$.

Dans le cas où tous les nombres seraient égaux, cette inégalité deviendrait une égalité.

Corollaire. — Posons

$$A_1 = b_1^r,\ A_2 = b_2^r\ A_3 = b_3^r \dots$$

l'inégalité devient

$$\frac{b_1^r + b_2^r + \dots + b_n^r}{n} > \frac{Q'_r + Q''_r + Q'''_r \dots}{(n)_r}$$

en nommant Q'_r, $Q''_r \dots$ les produits r à r des quantités b_1, $b_2 \dots b_n$; et nous pouvons formuler le théorème suivant :

La moyenne arithmétique des puissances r *de* n *quantités, non toutes égales, est supérieure à la moyenne arithmétique de leurs produits* r *à* r.

Cas particuliers. — Nous tirons de ce théorème général les cas particuliers suivants, qui peuvent être utiles :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} > \frac{yz + zx + xy}{3}$$

ou bien $\qquad x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy. \qquad$ (a)

puis $\qquad x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz. \qquad$ (b)

De l'inégalité (a) on peut facilement conclure les deux théorèmes géométriques :

1° De tous les parallélépipèdes rectangles de même surface, le cube est celui qui a la plus petite diagonale ;

2° De tous les parallélépipèdes rectangles de même diagonale, le cube est celui qui a la plus grande surface.

Théorème. — *La moyenne arithmétique de la somme des produits* r *à* r *de* n *quantités positives, non toutes égales, est moindre que la* r^e^ *puissance de leur moyenne arithmétique.*

Soient $$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n$$
n quantités positives, non toutes égales. Désignons par la notation $S_{n,r}$ la somme de leurs produits r à r; la somme des quantités sera désignée par $S_{n,1}$, et il s'agit de démontrer

que $$\frac{S_{n,r}}{(n)_r} < \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r$$

ou bien que $$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r$$

1° Admettons que l'on ait

$$S_{n-1,r} < (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^r \qquad (1)$$

$$S_{n-1,r-1} \leqq (n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^{r-1} \qquad (2)$$

le signe $=$ de la relation (2) se rapportant au cas où $r=2$. Je dis qu'on peut en conclure

$$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r \qquad (3)$$

En effet, nous avons identiquement :

$$S_{n,r} = a_n S_{n-1,r-1} + S_{n-1,r};$$

ou, ce qui es tla même chose,

$$S_{n,r} = (S_{n,1} - S_{n-1,1})\, S_{n-1,r-1} + S_{n-1,r}$$

de là et des hypothèses (1) et (2), on déduit

$$S_{n,r} < (S_{n,1} - S_{n-1,1})\,(n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^{r-1}$$
$$+ (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1,1}}{n-1}\right)^r.$$

Posons maintenant

$$a_n = x\,\frac{S_{n-1,1}}{n-1},$$

nous obtiendrons, après quelques transformations faciles.

$$S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r \frac{rx - r + 1}{x^r}.$$

Or, nous avons démontré (p. 80) que, si x est différent de l'unité, $$\frac{rx - r + 1}{x^r} < 1;$$

donc, dans ce cas, $S_{n,r} < (n)_r \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)$.

Si $x = 1$, la fraction se réduit à l'unité et l'on a encore la même relation.

Admettons que $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1}$ et que a_n diffère de ces premières quantités. Nous aurons au lieu de (1) et (2) les égalités

$$S_{n-1, r} = (n-1)_r \left(\frac{S_{n-1, r}}{n-1}\right)$$

$$S_{n-1, r-1} = (n-1)_{r-1} \left(\frac{S_{n-1, 1}}{n-1}\right)^{r-};$$

par suite on arriverait à l'égalite

$$S_{n, r} = (n)_r \left(\frac{S_{n, 1}}{n}\right)^r \frac{rx - r + 1}{x_r};$$

mais, a_n étant différent de $a_1 = a_2 = \ldots$, x ne peut pas être égal à 1, donc $\dfrac{rx - r + 1}{x^r}$ est moindre que 1;

donc encore $S_{n, r} < (n)_r \left(\frac{S_{n, 1}}{n}\right)^r.$

2° La relation (3) étant démontrée dans les hypothèses (1) et (2), et l'inégalité

$$S_{r, r} < (r)_r \left(\frac{S_{r, 1}}{r}\right)^r$$

étant évidente d'après le théorème fondamental de la page 79, nous avons donc les deux relations

$$S_{2, 2} < (2)_2 \left(\frac{S_{2, 1}}{2}\right)^2.$$

$$S_{2, 1} = (2)_1 \left(\frac{S_{2, 1}}{2}\right)^1.$$

Nous en concluons

$$S_{3, 2} < (3)_2 \left(\frac{S_{3, 1}}{3}\right)^2$$

par le théorème que nous venons de démontrer.

Des relations $S_{3, 3} < (3)_3 \left(\frac{S_{3, 1}}{3}\right)^3$

$$S_{3, 2} < (3)_2 \left(\frac{S_{3, 2}}{3}\right)^2$$

$$S_{3, 1} = (3)_1 \left(\frac{S_{3, 1}}{\cdot}\right)^1$$

nous pouvons passer, par le même théorème, aux relations

$$S_{4,4} < (4)_4\left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^4$$

$$S_{4,3} < (4)_3\left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^3$$

$$S_{4,2} < (4)_2\left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^2$$

$$S_{4,1} = (4)_1\left(\frac{S_{4,1}}{4}\right)^1$$

puis de là tirer

$$S_{5,5} < (5)_5\left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^5$$

$$S_{5,4} < (5)_4\left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^4$$

$$S_{5,3} < (5)_3\left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^3$$

$$S_{5,2} < (5)_2\left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^2$$

$$S_{5,1} = (5)_1\left(\frac{S_{5,1}}{5}\right)^1 \quad \text{etc...}$$

On arrive donc de proche en proche à démontrer que n et r étant quelconques, on a

$$S_{n,r} < (n)_n \left(\frac{S_{n,1}}{n}\right)^r.$$

C. Q. F. P.

Ce théorème comprend le théorème fondamental comme cas particulier; la démonstration que nous avons développée en suivant l'analyse de Besso est ingénieuse et simple. Il nous paraît difficile de l'aborder directement, même pour des cas particuliers. Pourrait-on faire voir simplement, par exemple, que

$$\frac{xyz + xyt + xyu + \dots}{10} \leq \left(\frac{x + y + z + t + u}{5}\right)^3 ?$$

Corollaire. — De ce théorème on peut conclure :

1° Le maximum de la somme des produits r *à* r *de quantités positives dont la somme est constante;*

2° Le maximum de la somme de quantités positives dont la somme des produits r *à* r *est constante.*

Remarque. — Nous avons démontré à la page 81, en nous appuyant sur le théorème fondamental, que

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}\ldots<\left(\frac{x+y+z+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$$

si $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}$ ne sont pas tous égaux.

De ce théorème on déduit immédiatement :

1° *Que le maximum du produit* $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots$, *quand* $x+y+z\ldots$ *reste constant, a lieu quand*

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\ldots$$

2° *Que le minimum de la somme* $x+y+z\ldots$, *quand le produit* $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots$ *reste constant, a lieu aussi lorsque*

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\ldots$$

Cette démonstration est à l'abri de toute objection. La démonstration habituelle, au contraire, présente cette difficulté que le théorème sur lequel on s'appuie suppose que les facteurs du produit ne sont assujettis qu'à une condition, et, dans le cas où on l'applique, les facteurs sont assujettis non seulement à ce que leur somme soit constante, mais encore à cette autre condition que α soient égaux entre eux, β égaux entre eux, γ égaux entre eux, etc.

SUR

UNE THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA PARABOLE

Par M. **J. Marchand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

1. — Soit OX un axe de projection, et AB une droite limitée; par les extrémités A et B, et dans le même sens, on mène deux droites faisant avec AB un angle fixe α. Nous donnerons le nom d'*obliques* aux parties AR, BR″ de ces droites comprises entre AB et OX, ainsi qu'à toute autre portion analogue de parallèle à leur commune direction, issue d'un point quelconque de AB.

Cela posé, faisons la construction pour le point C milieu de AB, et considérons les projections des trois obliques sur OX. La proposition suivante est évidente : Si l'on regarde comme positives les projections dirigées dans le même sens que celle de l'oblique du point milieu C ou oblique moyenne, comme négatives celles qui sont dirigées en sens contraire (en marchant de P′ vers R′ par exemple), la projection de l'oblique moyenne est la moyenne arithmétique des projections des obliques des points extrêmes.

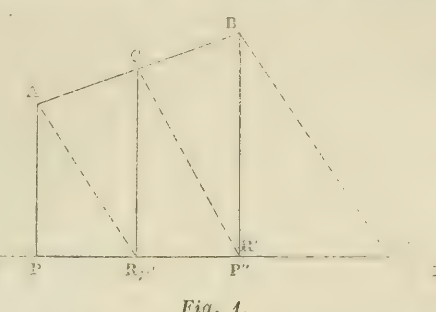


Fig. 1.

Ainsi on a toujours $P'R' = \frac{PR + P''R''}{2}$.

En particulier si le point A est sur l'axe, il vient

$$P'R' = \frac{P''R''}{2}.$$

Réciproquement, se donnant C comme centre et sur AB de part et d'autre des longueurs égales, quelles que soient ces longueurs, on aura $RP + R''P'' = 2P'R'$.

La somme des projections est donc absolument indépendante de la valeur de la demi-longueur CA.

2. — Lemme. — *Dans une série de parallèles, telles que la somme des projections sur un axe déterminé des obliques menées par leurs extrémités soit constante, le lieu des milieux de ces cordes est une droite parallèle à l'axe.*

Alors, en effet, le triangle CP′R′ est invariable, et le lieu cherché est décrit par le point C, lorsque CP′R′ glisse le long de OX.

Remarques. — 1° La tangente à l'extrémité du diamètre étant la corde dont les deux extrémités deviennent indéfini-

ment voisines, elle reste parallèle à la direction commune des cordes, et si du point de contact on mène une oblique, la projection de celle-ci sera la demi-somme des obliques issues des extrémités d'une corde quelconque.

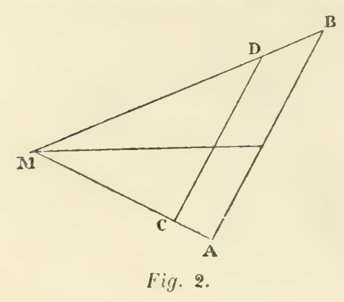


Fig. 2.

2° Les droites AC, DB obtenues en joignant les extrémités de deux cordes parallèles quelconques couperont le diamètre en un point M : à la limite quand CD se confond avec AB, la proposition s'appliquera encore aux tangentes issues des points A et B.

3. — Si nous supposons maintenant l'angle α égal à 90°, les obliques deviendront normales aux cordes et, ainsi, la sous-normale de la tangente menée à l'extrémité du diamètre sera la demi-somme des sous-normales issues des extrémités d'une corde quelconque du système et égale à la sous-normale issue d'un point quelconque du diamètre linéaire de ce même système.

4. — Cela posé, soient deux axes rectangulaires OX et OY ; par l'origine je mène une droite OM faisant avec OX un angle quelconque, j'abaisse MP perpendiculaire sur OX et j'élève la normale à la corde OM ; je suppose enfin la sous-normale PR constante et égale à $2p$, et je me propose de déterminer les propriétés de la courbe ainsi définie.

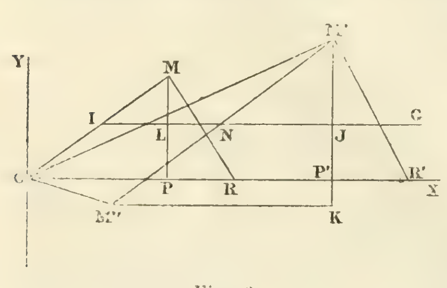


Fig. 3.

Je prends pour cela un deuxième point M' du lieu cherché, et j'y effectue les constructions précédentes ; adoptant maintenant OM, pour direction de cordes, et pour diamètre

IG la parallèle à OX issue du point milieu de OM, je trace $M'M''$ en prenant $NM'' = NM'$: cette corde est telle que la somme des sous-normales issues de ses extrémités est égale à $2p$, et je dis que M'' est un point du lieu.

Nous remarquerons, pour le prouver, qu'à chaque point du lieu correspond un triangle rectangle tel que OMR, qui donne pour M et M' : $OP \times 2p = \overline{MP}^2$, (1)

$$OP' \times 2p = \overline{M'P'}^2, \quad (2)$$

et devra donner par conséquent pour M'' :

$$OP'' \times 2p = \overline{M''P''}^2; \quad (3)$$

or si par M'' on mène une parallèle à l'axe jusqu'à sa rencontre avec le prolongement de $M'P'$ en K, comme $M'J = JK$, en posant $M'J = \varepsilon$, il viendra

$$M'K = 2\varepsilon;$$

comme aussi $ML = LP$, on pourra écrire en posant $ML = u$:

$$MP = 2u, \quad M'P' = \varepsilon + u, \quad M''P'' = \varepsilon - u;$$

substituant ces valeurs dans (2) et (3) et retranchant membre à membre, l'équation (3) de condition deviendra

$$2p \times P'P'' = 4\varepsilon u;$$

à cause de $P'P'' = M''K$, elle peut s'écrire

$$2p = \frac{2\varepsilon}{M''K} \cdot 2u;$$

or les triangles semblables $M'M''K$, OMP donnent

$$\frac{M'K}{M''K} = \frac{MP}{OP}.$$

Donc finalement il vient

$$2p \times OP = \overline{MP}^2,$$

c'est-à-dire la relation (1) déjà connue ainsi ; M'' est un point du lieu.

Corollaires. — *1° L'équation du lieu est :*

$$y^2 = 2px.$$

2° La somme des sous-normales aux extrémités d'un système quelconque de cordes parallèles tracées dans la courbe est constante et égale à $2p$;

3° Un système quelconque de cordes a pour diamètre une droite parallèle à OX ;

4° La sous-normale au point où une corde coupe son diamètre

est constante et égale à p: *et la sous-normale à la tangente en son point de contact est par suite constante et égale à* p:

5° *Inversement à (4°) toute droite parallèle à* OX *est un diamètre de la courbe,* car si en O nous élevons OY perpendiculaire sur OX, et si nous prenons à partir du point O une longueur O$\varphi = $ p, en joignant φ au point I, intersection de OY avec ID diamètre supposé, la perpendiculaire OJ à Iφ sera la direction des cordes conjuguées;

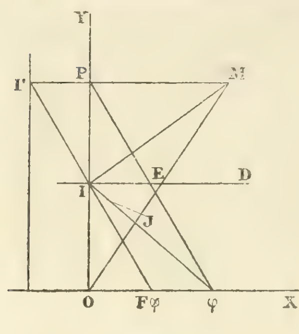


Fig. 4.

6° *Si on prolonge* OJ *jusqu'en* E *sur* ID, *en prenant* EM = OE, *le point* M *ainsi déterminé est un point du lieu ; de là par conséquent une construction de la parabole par points. — La même construction donnera, si l'on connaît la direction des cordes, la position du diamètre conjugué :*

7° *Dans la précédente figure, si l'on fait tourner* OM *autour du point* O, *de manière à tendre vers* OY. ID *se rapprochera indéfiniment de* OX, *et à la limite se confondra avec lui.* OX *est donc le diamètre conjugué des cordes qui lui sont perpendiculaires, c'est-à-dire l'axe unique de symétrie de la courbe; d'après cette discussion même, la perpendiculaire* OY *est par suite tangente à la courbe au point* O, *c'est-à-dire la tangente au sommet;*

8° *Une remarque analogue prouve que si nous menons* IM, *cette droite sera tangente à la courbe au point* M ; *on résout ainsi le problème de la tangente par un point donné de la courbe: on peut reconnaître par cette même construction si une droite* IM *est une tangente, et déterminer alors son point de contact.*

9° *Si de* M *on abaisse* MP *perpendiculaire sur* OY, PL *sera égale à* IO, *ce qui prouve que* IM, *c'est-à-dire la tangente à l'extrémité d'un diamètre coupe la tangente à la demi-distance entre le sommet et le point où le diamètre conjugué de la tangente rencontre lui-même la tangente au sommet (on peut dire aussi que l'ordonnée à l'origine de la tangente est la moitié de l'ordonnée* MQ *du point de contact). On voit enfin que si l'on joint*

$P\varphi$, *cette droite sera perpendiculaire à* IM, *ce qui nous permet de mener une tangente à la parabole parallèle à une direction donnée;*

10° Menons maintenant, par I, IF *parallèle à* $P\varphi$: IF *sera égale à* $\frac{P\varphi}{2}$, *coupera* OX *en un point* F *milieu de* $O\varphi$, *à une distance du sommet égale à* $\frac{p}{2}$ *et sera perpendiculaire à* IM : *donc, si du point de rencontre de la tangente au sommet avec une tangente quelconque on élève une perpendiculaire à celle-ci, cette perpendiculaire passera par un point fixe, situé sur l'axe et à une distance égale à* $\frac{p}{2}$ *du sommet de la courbe; inversement, si d'un point situé sur l'axe à une distance* $\frac{p}{2}$ *du sommet, on abaisse des perpendiculaires aux tangentes menées par les différents points de la courbe, le lieu décrit par les pieds de ces perpendiculaires sera la tangente au sommet :*

11° Prolongeons maintenant IF *jusqu'à sa rencontre en* I′ *avec* MP *prolongée également, les triangles* F′PI, IOF *seront égaux : d'où suit que* $PI' = OF = \frac{p}{2}$ *: donc le lieu de* I′ *sera une perpendiculaire* I′F′ *à l'axe, dont le pied* F′ *est le symétrique du foyer par rapport au sommet. D'ailleurs* I′I *étant égal à* IF, IM *est perpendiculaire sur le milieu de la droite* I′F : *donc si nous joignons* MF, *on aura* $MF = F'M$ *: par conséquent 1° le foyer est un point tel que si nous le joignons au point* M *quelconque pris sur la courbe, cette distance est égale à la distance du point* M *à la droite menée perpendiculairement à l'axe par le symétrique* F′ *du foyer par rapport au point* O (*cette droite prend le nom de* DIRECTRICE) ; *2° l'angle formé par la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur la directrice, et la droite joignant le point* M *au foyer, est bissecté par la tangente à la courbe au point* M ; *3° la distance du foyer à un point quelconque de la courbe, en appelant* x *l'abscisse du point* M, *aura pour expression* $FM = F'M = x + \frac{p}{2}$;

12° En remarquant que angle FMT = *angle* MTF, *on obtient également* $\varphi M = TF = x + \frac{p}{2}$; *d'où on déduit* OT = x, *c'est-à-dire que la sous-tangente est égale à* 2 x. *Notons enfin qu'en appelant* m *la tangente de l'angle* ITO *on a*

$$\frac{\frac{p}{2}}{\frac{y_0}{2}} = m.$$

D'où
$$p = my_0.$$

5. — La théorie de la parabole étant complètement ramenée à sa définition ordinaire, il n'y a pas lieu d'y insister davantage. Nous ferons remarquer toutefois qu'en abordant la question comme nous l'avons fait, on obtient immédiatement une construction de la courbe par points : en effet par le point φ_1 tel que $O\varphi_1 = 2p$, élevons une perpendiculaire sur OX ; d'un point R arbitraire sur OX avec un rayon égal à OR décrivons une circonférence; par le point M' de rencontre de la perpendiculaire $\varphi_1 M'$ avec cette circonférence menons une parallèle à OX, le point M obtenu par cette nouvelle intersection sera un point de la parabole.

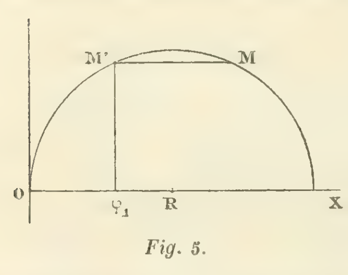


Fig. 5.

6. — Comme dernière question nous nous proposerons de démontrer le théorème suivant :

Dans une parabole l'enveloppe des normales aux cordes menées du sommet aux différents points de la parabole et passant par ces points, est la développée de la parabole qui a même axe que la proposée, le foyer placé en son sommet, et un paramètre quatre fois moindre.

Pour le montrer, soit M un point d'une parabole rapportée à son axe OX et à sa tangente au sommet OY; construisons son ordonnée MP, sa tangente MI, sa normale MS; joignons enfin le foyer F à l'extrémité I de l'ordonnée à l'origine de

la tangente et au milieu M′ de la normale : la figure IFMM′ est un parallélogramme, et FM′ égale et parallèle à MI est perpendiculaire sur le milieu de MS. D'ailleurs, comme la sous-normale à la corde FM′, P′S, est constante et égale à $\frac{p}{2}$, on voit que le lieu du point M′ est, d'après un théorème démontré ci-dessus, une parabole dont l'axe est OX, le sommet le foyer de la proposée, et le paramètre le quart de celui de la proposée. Ce qui établit la proposition énoncée.

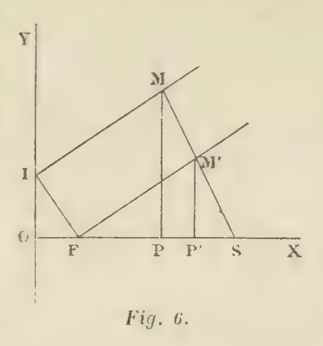


Fig. 6.

QUESTION 35

Solution par M. Vazou, élève au Collège Rollin.

Soit K *le point de rencontre des hauteurs d'un triangle,* P *un point du cercle circonscrit; la ligne* PK *rencontre en* Q *la droite de Simson relative au point* P ; *démontrer que, si le point* P *se déplace sur la circonférence, le lieu du point* Q *est le cercle des neufs points du triangle.* (G. L.)

Ce théorème résulte immédiatement des deux suivants :

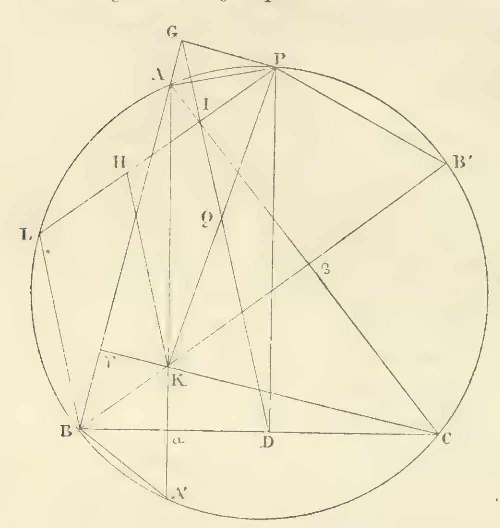
I. — *Lorsqu'on prolonge les hauteurs d'un triangle jusqu'à la circonférence du cercle circonscrit, la portion de la hauteur extérieure au triangle est égale à la longueur de cette hauteur comprise entre la base correspondante et le point de rencontre des hauteurs.*

En effet, joignons BA′, l'angle BKα = C puisque ces deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; l'angle BA′K = C comme ayant même mesure ; donc BKα = BA′K, par suite Kα = A′α.

II. — *Si l'on joint un point* P *de la circonférence circonscrite à un triangle au point de rencontre* K *des hauteurs de ce triangle,*

la droite de Simson relative au point P *partage en deux parties égales la ligne* PK.

Prolongeons PI jusqu'à sa rencontre en I avec la circonférence, prenons IH = IP et menons PB′, KH et BL. La droite βI étant perpendiculaire sur les milieux des bases du trapèze PHKB′, ce trapèze est isoscèle et l'on a HKB′ = PB′K; mais PB′K = LBB′ donc HK est parallèle à LB ; or cette dernière droite est parallèle à la droite de Simson, puisque



LBA = APL = AGI ; donc HK est parallèle à la droite de Simson et par conséquent cette dernière droite GID, parallèle à HK et passant par le milieu I de HP, partage la droite KP en deux parties égales.

Revenant maintenant au théorème proposé, nous voyons que le lieu du point Q est homothétique du lieu du point P, K étant le centre d'homothétie et 1/2 le rapport d'homothétie. C'est donc un cercle. Or, d'après (I) ce cercle passe par les points α, β, γ; c'est donc le cercle des neufs points du triangle.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient; P. Godefroy, à Lyon ; Puig, à Montpellier.

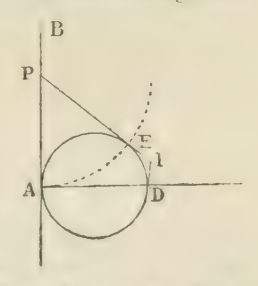
QUESTION 36

Solution, par M. R. Godefroy, au Lycée de Lyon.

On considère deux droites rectangulaires AB, AC *et au point* A *un cercle* Δ *tangent à la droite* AB. *Soit* D *le second point de rencontre de* Δ *avec* AC: *si par un point fixe* P *de* AB *on mène une tangente à* Δ, *cette droite rencontre la parallèle à* AB *menée par le point* D *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique quand on fait varier le cercle* Δ.

Soit E le point de contact de la tangente PI et du cercle Δ.

Quel que soit le cercle Δ on a PE = PA comme tangentes à une circonférence issues d'un même point; or le point P est fixe et la longueur PA est constante. Le lieu des points E est donc une circonférence de centre P, de rayon PA tangente en A à la droite AC. On a aussi, quel que soit le cercle Δ, IE = ID (tangentes issues d'un même point à une circonférence). Le lieu des points I est donc le lieu des points équidistants d'une circonférence et d'une de ses tangentes. On sait que c'est une parabole de foyer P dont la directrice parallèle à AC en est distante d'une longueur égale à PA du côté opposé à P par rapport à AC.



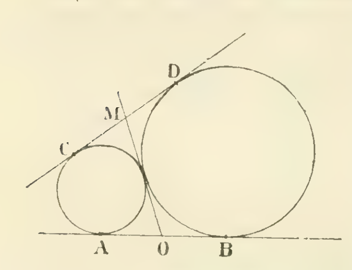
Nota. — La même question a été résolue par MM. Bablon, à Épinal; Plantif, à Constantine; Quintard, à Arbois; Berthelot Pigeaud, à Châteauroux, Puig, à Montpellier; Kœhl, à Grenoble; Paillard, Vail et Lenoir, école Albert-le-Grand Arcueil; Ambert, à Bordeaux; Blessel, à Paris; Bordier, à Blanzac; Auric, à Orange; Mary, à Perpignan; P. Godefroy, à Lyon; Deville, à Lorient; Lachesnais, lycée Henri IV, à Paris; Vazou, collège Rollin, à Paris.

QUESTION 37

Solution, par M. R. Godefroy, au Lycée de Lyon.

On considère une droite AB *et par deux points fixes* A *et* B *pris sur cette droite on mène des cercles tangents à cette droite et tangents entre eux. A ces cercles on mène une tangente commune extérieure. Trouver le lieu géométrique décrit par le milieu de cette tangente commune.* (G. L.)

Soient AB et CD les deux tangentes communes extérieures,



dont l'une AB est fixe et constante. La tangente commune intérieure, étant l'axe radical des 2 cercles, passe par le milieu O de AB, qui est fixe et par le point variable M, milieu de CD. Le point de contact de la tangente commune intérieure partage cette droite en deux parties chacune égale à la moitié de l'une des tangentes communes. Ces deux tangentes étant égales, on aura enfin MO = AB = const. Le point O étant fixe, le lieu du point M est une circonférence ayant pour centre le milieu de AB et pour rayon AB lui-même.

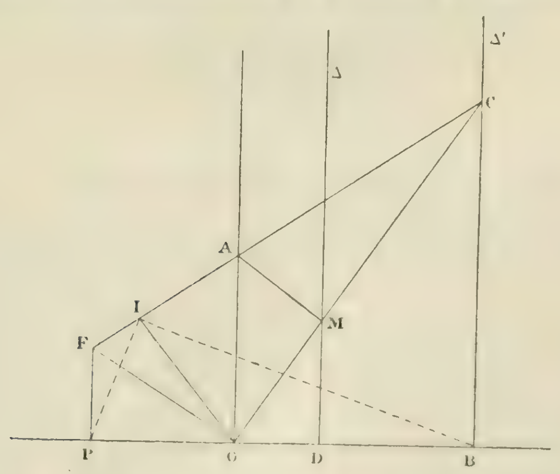
Nota. — La même question a été résolue par MM. des Essarts, Vail, Paillard et Lenoir, à l'école Albert-le-Grand Arcueil); Ambert, à Bordeaux; Pigeaud, à Châteauroux; Bablon, à Épinal; Quintard, à Arbois; Puig, à Montpellier; Auric, à Orange; Vigy, à Vitry-le-François; P. Godefroy, à Lyon; Varnier, à Bar-le-Duc; Deville, à Lorient; Vazou, collège Rollin, à Paris; **P. La Chesnais, lycée Henri IV, à Paris.**

QUESTION 39

Solution par M. PUIG, élève au Lycée de Montpellier.

On donne deux droites rectangulaires OA *et* OB, *et deux droites* Δ, Δ', *parallèles à* OA. *Soit* M *un point pris sur* Δ, *et supposé mobile sur cette droite. Élevons au point* M *une perpendiculaire à* OM, *qui rencontre* OA *au point* A; *joignons celui-ci au point* C *de rencontre de* Δ' *et de* OM, *et sur cette droite* AC *abaissons de* O *une perpendiculaire* OI. *Démontrer que le lieu du point* I *est une circonférence.* (G. L.)

Menons OF perpendiculaire à OM jusqu'à sa rencontre en



F avec CA, et FP perpendiculaire à OB. Les triangles semblables OCB, OFP donnent

$$\frac{OP}{OF} = \frac{CB}{OC} = \frac{MD}{OM}.$$

Or
$$OF = \frac{OC.AM}{MC}.$$

Donc
$$OP = \frac{MD.AM}{OM} \cdot \frac{OC}{MC}.$$

Or, on a $\frac{MD.AM}{OM} = OD$;

donc $OP = \frac{OD.OC}{MC} = \frac{OD.OB}{DB} = \frac{bc}{b-c}$.

Donc le point P est fixe, et la droite BP est constante. On voit que le lieu du point F est la parallèle à OA menée par un point fixe P.

Joignons le point I aux points P et B; les quadrilatères inscriptibles IOPF, ICBO nous font voir que l'angle IPO est égal à IFO, et que IBO est égal à ICO. Donc, le triangle FOC étant rectangle, il en est de même du triangle PIB; par suite le lieu du point I est la circonférence décrite sur PB comme diamètre.

QUESTION 47

Solution par M. F. Landry.

Quelles sont les heures auxquelles on peut faire permuter les aiguilles d'une horloge, de telle sorte que la nouvelle position puisse se produire par le mouvement même de l'horloge?

(Laisant.)

Cette intéressante question peut être résolue ainsi :

De 0 h. à 12 h. la petite aiguille prend toutes les positions sur le cadran. A chacune de ces positions correspond une position de la grande aiguille, une seule; et cette position est déterminée par sa vitesse, qui est égale à douze fois celle de la petite aiguille.

Cela posé, soit exprimée en minutes par e la position de la petite aiguille à un moment donné, celle de la grande aiguille sera donnée par $12e$ dont il faudra seulement défalquer les tours complets, s'il y a lieu.

La permutation des aiguilles entre elles fera que la nouvelle position de la petite aiguille sur le cadran sera déterminée par $12e$ et que celle de la grande sera e.

Or, pour satisfaire à la loi des vitesses relatives, il faudra

que le nombre e qui marque la nouvelle position de la grande aiguille, soit égal, sauf la suppression qui devra être faite des tours complets, à 12 fois le nombre $12e$ qui marque la position nouvelle de la petite aiguille. C'est-à-dire que la différence entre les deux nombres $12.12e$ et e devra être un multiple exact de 60.

Il en résulte donc $144e = e + 60K$,

d'où
$$e = \frac{60K}{143}.$$

Comme K ne peut être qu'un nombre entier, on trouvera les diverses positions e de la petite aiguille, en donnant successivement à K les valeurs 1, 2, 3,.. 143. Au delà on retomberait sur les mêmes positions.

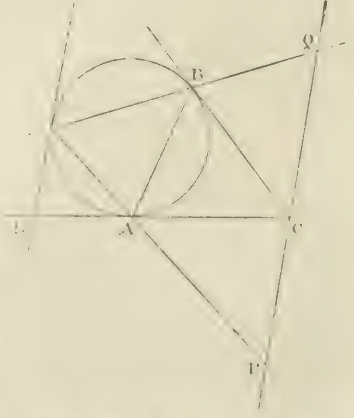
Ainsi la question comporte 143 solutions distinctes.

Les positions correspondantes de la grande aiguille seraient données par $12e$, pour chaque valeur de e.

QUESTION 48

Solution par M. A. Fleurot, élève au Lycée de Marseille.

On donne une circonférence et dans cette circonférence une corde fixe AB. *Soit* C *le point de rencontre des tangentes en* A *et* B *à la circonférence: on prend un point* M *quelconque sur la circonférence, on mène les droites* MA, MB, *et par le point* C *une parallèle à la tangente en* M; *cette parallèle rencontre* MA *au point* P, MB *au point* Q; *démontrer que* PQ *est constant.* (Mannheim)



Le triangle ACP est isoscèle; en effet, on a : angle APC = angle RMA comme alternes-internes, et angle RM = angle BAM = angle PAC.

Donc $PC = AC$.

On démontrerait de même que le triangle BCQ est aussi isoscèle, et que l'on a $CQ = BC$.

Donc $PC + CQ$ ou $PQ = AC + BC =$ constante, C. Q. F. D.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Mosnat, à Thiers; Roy Prémorant, lycée Saint-Louis, à Paris; Collinet, à la Ferté-Gaucher; P. La Chesnais, lycée Henri IV, à Paris; Puig, à Montpellier; Bordier, à Blanzac; Vazou, collège Rollin, à Paris; Deville, à Lorient.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR CHARLES BRIOT

Charles Briot, qui a pris au mouvement scientifique moderne une si large part, est mort le 20 septembre dernier au bourg d'Ault (Somme), à l'âge de soixante-cinq ans. Nous voulons essayer de résumer ici la vie et les travaux de ce savant regretté. C'est un hommage naturel que ce journal doit à tous ceux qui, comme Charles Briot, meurent après avoir aimé et honoré la science mathématique.

Rien n'est plus touchant que le début de cette vie qui devait être si bien remplie. Charles Briot était fils d'un tanneur et son père, après lui avoir fait donner un commencement d'instruction, songeait à l'occuper dans sa maison. Briot s'étant un jour cassé le bras, il fallut abandonner cette idée et songer à une autre carrière. « Je n'étais bon à rien, avec mon bras cassé, disait plaisamment Briot, quand il parlait de sa jeunesse; mon père ne sachant que faire de moi, ni comment m'occuper, ne s'opposa pas à la continuation de mes études. »

C'est l'institution Barbet qui reçut le jeune Briot à sa sortie de Sainte-Hippolyte (Doubs), sa ville natale. On ne peut écrire cette notice sans rendre justice à tous ceux qui ont aidé Briot dans ses premiers pas. M. Barbet l'accueillit généreusement et il ajouta à ce bienfait en entourant son jeune élève d'une affectueuse sympathie et d'une sollicitude dont Briot a, pendant toute sa vie, gardé le plus vif souvenir.

Un autre homme, M. Régnier, était dans la pensée recon-

naissance de Briot lié aux souvenirs de son arrivée à Paris et des difficultés qu'il avait rencontrées à cette époque de sa jeunesse. Briot avait alors 15 ou 16 ans : il ne possédait guère, en débarquant de Saint-Hippolyte, qu'une forte instruction primaire et il avait à peine commencé les études latines. Il pouvait être de la force d'un élève de sixième ; mais il était trop âgé pour qu'on songeât à le mettre dans cette classe. « M. Barbet, nous a raconté M. Régnier qui, aujourd'hui membre de l'Institut, était alors professeur de seconde au lycée Saint-Louis, plein de confiance dans les facultés extraordinaires de son protégé, vint me le présenter et m'exposa la situation. — Je n'ai jamais vu, me disait M. Barbet, une pareille facilité ; le passé répond pour moi de l'avenir : il faut tenter l'aventure. Je ne partageais pas entièrement la confiance de M. Barbet; mais je me suis prêté à l'essai et je n'ai pas eu à le regretter. — C'était, ajoutait M. Régnier, un de ces rares et bons esprits presque aussi aptes aux lettres qu'aux sciences, et, dans ma longue carrière où j'ai rencontré plus d'une intelligence d'élite, je n'ai jamais vu aucun exemple d'une telle marche. »

Briot fit ainsi, sous la direction de M. Régnier, trois ou quatre classes en un an. Les lacunes du passé ainsi réparées, il put reprendre son rang parmi les jeunes gens de son âge, à la tête desquels il devait marcher désormais. En mathématiques élémentaires il remporta le premier prix au concours général et, bientôt après, en 1838, Briot entrait à l'École normale, le premier de sa promotion. Reçu agrégé à sa sortie de l'École en 1841, il prit l'année suivante le grade de docteur ès sciences mathématiques.

La vie universitaire de Briot a été bien remplie depuis cette époque jusqu'à sa mort. D'abord professeur à Reims, puis à Orléans, il passa du lycée de cette ville à la faculté de Lyon. C'est au mois d'octobre 1848 qu'il vint à Paris, d'abord comme professeur au lycée Fontanes, puis comme professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Il occupa cette chaire importante pendant de longues années, entouré de nombreux élèves qu'attiraient, auprès de ce maître distingué, des succès toujours croissants. Il ne quitta le lycée

Saint-Louis que pour entrer à la Sorbonne, où il professa successivement l'astronomie et la physique mathématique. Il faut ajouter, pour être complet dans cette nomenclature, que Briot fut, dans l'intervalle, en 1855, maître de conférences à l'École normale et, en 1864, examinateur d'admission à l'École polytechnique.

Les travaux scientifiques de Charles Briot sont nombreux; ils ont tous une importance réelle et quelques-uns, comme la *Théorie des Fonctions abéliennes*, à laquelle l Académie des sciences accorda dernièrement le prix Poncelet, suffiraient pour rendre le nom de Briot impérissable près des mathématiciens de l'avenir.

Voici une liste, aussi complète qu'il nous a été possible de la faire, des livres et mémoires publiés par Briot.

1. *Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.* (Liouville, tome VII, 1842, 15 pages.)

2. *Théorie des points singuliers dans les courbes planes algébriques.* (Liouville, tome X, 1845, 10 pages.)

3. *Note sur l'attraction.* (Liouville, tome XI, 1845, 10 pages.)

4. *Note sur un thermomètre à indication continue.* (Lyon, Société agricole, tome IX, 1846, 2 pages.)

5. *Note sur un perfectionnement dans la méthode en Géométrie.* (Lyon, Mémoires de l'Académie, tome II, 1847, 3 pages.)

6. *Sur la théorie mathématique de la lumière.* (Comptes rendus, 1859, 1860, 1861, 1863, 1867, 1868.)

7. *Essai sur la théorie mathématique de la lumière.*

8. *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles.* (Comptes rendus, 1854.)

9. *Recherches sur les fonctions doublement périodiques.* (Comptes rendus, 1855.)

10. *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques.* (Comptes rendus, 1855.)

11. *Étude des fonctions d'une variable imaginaire.* (Paris. Journal de l'École polytechnique, 1856, cahier 36.)

12. *De la mesure des petites forces au moyen du pendule.* (Comptes rendus, 1865.)

13. *Théorie mécanique de la chaleur.*

14. *Théorie des fonctions elliptiques.*

15. *Théorie des fonctions abéliennes.*

En outre, M. Briot a publié un grand nombre d'ouvrages destinés à l'enseignement classique : *Arithmétique, Géométrie, Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique, Mécanique.* On sait que parmi ces livres et ces mémoires quelques-uns ont été écrits en collaboration avec M. Bouquet, et le Mémoire nº 12 a été composé en collaboration avec M. Jamin.

C'est par cette longue suite de travaux, par ces publications diverses et aussi par son enseignement à l'École normale et à la Sorbonne que Briot avait pris, sur la génération présente des professeurs de mathématiques, une si grande et si légitime influence. Un journal (*le XIXᵉ Siècle*, nº du 4 octobre 1882), consacrant un article à la mémoire de Charles Briot, disait, en parlant de ces professeurs et en rappelant cette influence : « Chez ces jeunes maîtres, on trouverait encore autre chose, le souvenir et la reconnaissance d'avoir été aimés par Briot comme des enfants, d'avoir été conseillés, soutenus, poussés par lui dans les commencements de leur carrière. Briot ne considérait que comme un prêt les services qu'il avait reçus de M. Barbet, et c'était une de ses joies d'homme et de citoyen de pouvoir en rendre à bon escient de tout pareils aux autres. » Nous tenons à nous associer ici à ce langage. C'est celui de la vérité, et son exactitude sera reconnue par tous ceux qui, comme nous, ont eu le bonheur de recevoir les leçons et les conseils de Briot. « Si vous saviez, disait-il un jour à quelqu'un de notre connaissance, comme nous aimons les professeurs qui travaillent ! »

Tels ont été la vie et les travaux de ce maître, un des esprits les plus justes et les plus excellents que nous ayons connus. Les circonstances ont voulu que nous fussions, dans ce petit village d'Ault où il est venu s'éteindre, le témoin attristé des derniers jours de Briot. Nous pouvons dire, l'ayant vu, que Briot a su mourir aussi bien qu'il avait su vivre. Il a vu venir la mort avec calme, et s'est préparé en philosophe et en sage à cette suprême épreuve. Ses dernières pensées, après celles qu'il devait aux siens, ont été pour cette École normale qu'il aimait si profondément et dont il

a été un des élèves les plus illustres. Il manifesta le regret de quitter la vie sans avoir pu contribuer à faire prévaloir certaines réformes qui lui paraissaient utiles au bon recrutement de cette école. Fidèle aux principes de toute sa vie, il ne voulut avoir à son enterrement ni cérémonies, ni représentation de corps, ni discours; mais seulement ses proches, ses amis et les habitants de ce petit village de Châtenay, où il passait la plus grande partie de son existence. (G. L.)

QUESTIONS PROPOSÉES

61. — Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x+2}+\frac{3x}{x+3}$$
$$+\frac{4}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$$

(G. L.)

62. — On considère un cercle O, et deux diamètres rectangulaires AB, CD. A partir du point A on prend un arc AQ, et dans l'autre sens un arc AP tel que

$$\text{arc AP} = 2\,\text{arc AQ}.$$

Soit Q' le symétrique de Q par rapport à CD. On demande le lieu géométrique décrit par le point I, commun aux droites PQ' et BQ. *(G. L.)*

63. — Les premiers termes d'une série sont 1, 7, 19... mais on a perdu la loi de récurrence des termes de cette série; on sait seulement que le terme général u_n était une fonction entière et de second degré en n. Retrouver cette série, et démontrer que la somme des n premiers termes est égale à n^3. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23864-2.

ÉQUATIONS RÉCIPROQUES

DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ

(SENS GÉNÉRAL)

Par **M. G. de Longchamps.**

1. — Nous avons déjà indiqué dans ce journal (*), en traitant quelques équations quadratiques, ce que nous entendions, dans un sens plus général que celui qui est ordinairement adopté, par *équation réciproque du quatrième degré.* Nous nous proposons de revenir sur ce point, parce que la définition que nous avons donnée de l'équation réciproque, comme celle qui est ordinairement employée, renferme une pétition de principe dont il est facile de la débarrasser, comme nous allons le montrer. Nous avons dit qu'une équation était réciproque lorsque, admettant la racine x', elle admettait aussi, et nécessairement, la racine $\frac{k}{x'}$. Mais cette définition suppose l'existence d'une racine, c'est-à-dire le théorème de d'Alembert. Il n'y a évidemment aucun inconvénient à envisager de la sorte les équations réciproques dans les cours de Mathématiques spéciales où l'on donne la démonstration de ce théorème. Il n'en est plus de même dans les cours de Mathématiques élémentaires. Ici il nous paraît nécessaire de ne pas préjuger, dans une définition, l'existence, *non démontrée*, des racines d'une équation du quatrième degré. Pour ce motif nous voulons revenir ici rapidement sur le sujet déjà traité dans l'article cité, et donner, des équations réciproques du quatrième et du troisième degré, dans le sens général que nous donnons à cette expression, une théorie qui nous paraît à l'abri de toute objection.

2. — Nous dirons *qu'une équation de degré* m, $f(x) = o$ *est réciproque lorsque l'on a identiquement*

(*) Juillet 1882, *Mathématiques elementaires*, p. 156.

$$f(x) = \lambda x^m f\left(\frac{k}{x}\right) \qquad (1)$$

pour des valeurs convenablement choisies de λ et de k.

Si l'on applique cette définition à l'équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = o,$$

on trouve, par un calcul facile, la condition unique

$$AD^2 = B^2E,$$

que nous avons donnée dans l'article cité.

Cette condition étant établie, on décompose comme nous l'avons fait voir (*) l'équation donnée en deux trinômes du second degré, et c'est cette décomposition même qui prouve que l'équation proposée a quatre racines. On évite ainsi: 1° *de faire reposer la définition des équations réciproques sur une hypothèse ; 2° on n'a pas à distinguer des équations réciproques de première ou de seconde espèce* (**) *et l'on traite un problème qui renferme les unes et les autres, et, avec celles-ci, toutes les équations réciproques dans le sens général que nous donnons à ce mot.*

Il faut d'ailleurs observer que, l'existence des racines une fois établie, il résulte de la définition (1) que si x_1 est une racine, $\frac{k}{x_1}$ est aussi une racine : appelant celle-ci x_2 on a donc

$$x_1x_2 = k.$$

Soit x_3 une troisième racine, $\frac{k}{x_3}$ est la quatrième racine; on peut donc dire que $x_3x_4 = k$

et, par suite, $x_1x_2 = x_3x_4$.

Cette propriété des racines, en adoptant notre manière de voir, est donc une conséquence de la définition donnée plus haut, et ne doit pas être prise comme définition, pour ne pas admettre l'existence même des racines.

3. — On trouvera, à l'article déjà cité, tous les détails que nous avons donnés pour résoudre l'équation réciproque du quatrième degré. Nous ajouterons ici seulement quelques mots relatifs à l'équation du troisième degré.

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, p. 169.

(**) Algèbre de M. Combette, p. 370.

Soit $$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
une équation réciproque (sens général) du troisième degré. On a donc identiquement, par définition :
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \lambda\,(Ak^3 + Bk^2x + Ckx^2 + Dx^3);$$
et, par suite,
$$\begin{aligned} A &= \lambda D \\ B &= \lambda Ck \\ C &= \lambda Bk^2 \\ D &= \lambda Ak^3. \end{aligned}$$

En éliminant λ et k entre ces relations on trouve entre les coefficients la condition unique
$$AC^3 = B^3D.$$

L'équation peut alors s'écrire
$$A\left(x^3 + \frac{C^3}{B^3}\right) + Bx\left(x + \frac{C}{B}\right) = 0.$$

On aperçoit la racine $$x_1 = -\frac{C}{B}$$
et l'équation, débarrassée du facteur $x + \frac{C}{B}$, est
$$Ax^2 + x\left(B - \frac{AC}{B}\right) + A\frac{C^2}{B^2} = 0.$$

On peut facilement résoudre et discuter cette équation.

4. — Les idées et les calculs qui précèdent s'étendent sans difficulté aux équations de degré quelconque; mais nous ne voulons pas entrer ici dans une généralisation facile à faire et qui s'adresserait plus particulièrement à l'autre partie de ce journal. Nous ajouterons seulement quelques mots pour bien préciser notre pensée et montrer ce qui la différencie de celle qui préside ordinairement à cette théorie des équations réciproques. Pour nous, des équations réciproques, dans le sens que nous attachons à ce mot, ne sont pas seulement celles dont les racines, groupées deux à deux convenablement, jouissent de la propriété de former, dans ces groupes, un produit toujours égal à $+1$ ou à -1; mais, plus généralement, dont le produit est toujours égal à un nombre donné k.

Nous irons même plus loin dans cette voie, et nous estimons qu'on devrait nommer *équations réciproques*, *celles dont*

les racines, groupées deux à deux convenablement, satisfont à une même équation homographique en involution ; de telle sorte enfin que les racines x_1, x'_1; x_2, x'_2; ... x_p, x'_p de l'équation proposée (groupées convenablement) donneraient les relations :

$$Ax_1x'_1 + B(x_1 + x'_1) + C = 0$$
$$Ax_2x'_2 + B(x_2 + x'_2) + C = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Ax_px' + B(x_p + x_p + C = 0.$$

Si l'on suppose B = o on retombe dans le cas qui vient de nous occuper, celui où deux racines ont un produit constant : si A = o on a un autre cas d'abaissement bien connu et dont nous avons dit un mot relativement au quatrième degré (voir *Journal des Mathématiques*, p. 172). Enfin si l'on suppose A et B différents de zéro, ce qui est le cas général, on ramène facilement ce cas à celui des équations réciproques (sens général), en observant que la relation homographique en involution $Axx' + B(x + x') + C = 0$
peut s'écrire

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)\left(x' + \frac{B}{A}\right) = \frac{B^2 - AC}{A^2}.$$

Si l'on change alors d'inconnue, en posant

$$X = x + \frac{B}{A},$$

la nouvelle équation en X sera réciproque, dans le sens que nous donnons à ce mot.

QUESTION 347

Dans un parallélogramme on donne la somme des côtés et des diagonales 2a, *un angle* β *et l'angle des diagonales* α, *trouver les côtés et les diagonales.*

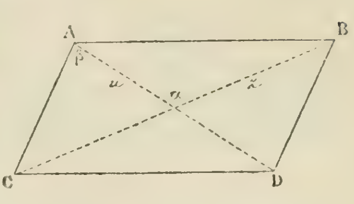
La figure ci-après donne

$$x + y + z + u = a, \qquad (1)$$
$$u^2 + z^2 - 2uz\cos\alpha = x^2. \qquad (2)$$

$$u^2 + z^2 + 2uz \cos \alpha = y^2, \qquad (3)$$
$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \beta = 4z^2. \qquad (4)$$

Pour résoudre ce système, posons

$$x = r\sqrt{2} \sin \varphi,$$
$$y = r\sqrt{2} \cos \varphi,$$
$$u = r' \sin \theta,$$
$$z = r' \cos \theta.$$



Or si on ajoute (2) et (3) et si l'on remplace x, y, z, u par leurs valeurs, on trouve

$$r = r'.$$

Cela posé, substituons dans (2), (3), (4), il vient

$$1 - \sin 2\theta \cos \alpha = 2\sin^2 \varphi, \qquad (5)$$
$$1 + \sin 2\theta \cos \alpha = 2\cos^2 \varphi. \qquad (6)$$
$$1 - \sin 2\varphi \cos \beta = 2\cos^2 \theta. \qquad (7)$$

Multiplions (5) par (6), il vient

$$1 - \sin^2 2\theta \cos^2 \alpha = \sin^2 2\varphi$$

et (7) peut s'écrire

$$\sin 2\varphi \cos \beta = \cos 2\theta.$$

Éliminons $\sin 2\varphi$ entre ces deux dernières équations, il vient $\quad \cos^2 \beta - \sin^2 2\theta \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 2\theta,$

d'où
$$\operatorname{cotg} 2\theta = \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta. \qquad (8)$$

De même
$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha. \qquad (9)$$

Or (1) donne

$$r[\sqrt{2}\ (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sin \theta + \cos \theta] = a$$

et en appliquant la formule

$$\sin \mu + \cos \mu = 2\sin 45 \cos(\mu - 45) = \sqrt{2}\ \cos(\mu - 45).$$

on a $\quad r\sqrt{2}[\sqrt{2}\ \cos(\varphi - 45) + \cos(\theta - 45)] = a,$

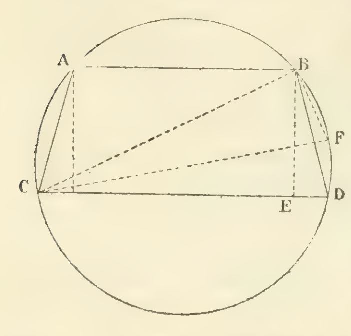
d'où $\quad r = \dfrac{a}{\sqrt{2}[\sqrt{2}\cos(\varphi - 45) + \cos(\theta - 45)]}.$

Les équations (8) et (9) donnent θ et φ : par suite r est connu par suite aussi x, y, z, u.

QUESTION 391

Calculer les éléments d'un trapèze inscrit dans un cercle, connaissant un angle et la surface.

Soit α l'angle donné BDC, R le rayon du cercle circonscrit, m^2 la surface.



Soient en outre

$$BD = x,\ CD = y,$$

on a

$$AB = y - 2ED = y - 2x \cos \alpha$$
$$BE = x \sin \alpha.$$

$$\text{Or } m^2 = \frac{AB + CD}{2} \cdot BE :$$

donc en remplaçant

$$m^2 = \frac{2y - 2x \cos \alpha}{2} x \sin \alpha$$

ou $$m^2 = xy \sin \alpha - x^2 \sin \alpha \cos \alpha. \qquad (1)$$

D'un autre côté en joignant BC, on a

$$\overline{BC}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha.$$

Menant le diamètre CF, et remarquant que l'angle en F est égal à α, on a

$$BC = 2R \sin \alpha ;$$

dès lors $$4R^2 \sin^2 \alpha = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) résolvent la question.

De (1) on tire $y = \dfrac{m^2 + x^2 \sin \alpha \cos \alpha}{x \sin \alpha}$;

portant cette valeur dans (2) et réduisant, il vient

$$x^4 \sin^4 \alpha - 4R^2 x^2 \sin^2 \alpha + m^4 = 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de discuter cette équation et de calculer y.

QUESTION 40

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Trouver le lieu des points tels que si de ces points on mène des tangentes à une parabole, elles forment avec une droite fixe un triangle isoscèle.

On peut toujours faire passer la droite fixe par le foyer: car si elle n'y passait pas, on lui mènerait une parallèle par le foyer.

Soit M un point du lieu.

Menons par ce point une parallèle MK à l'axe, et joignons MF.

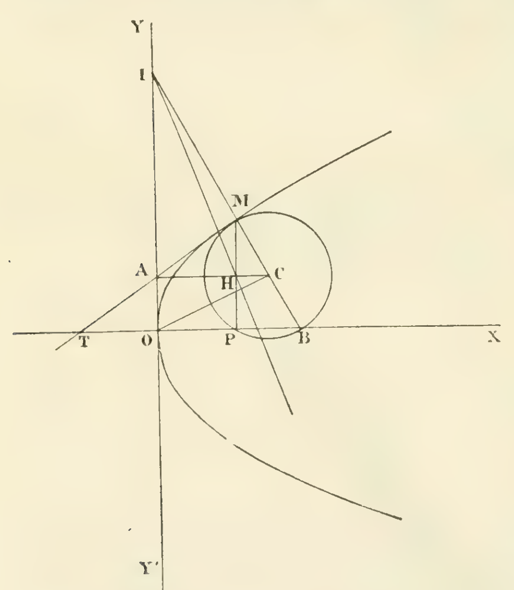
D'après un théorème connu, on a TMK = TMF; d'ailleurs le triangle MTT' devant être isoscèle, il s'ensuit que l'on a MKF = MFK, donc le triangle MFK est aussi isoscèle; l'angle MFK est égal à l'angle TED que fait la droite fixe avec l'axe, donc la droite FM a une direction fixe, et le lieu du point M est la droite FM déterminée de façon qu'elle fasse avec l'axe un angle double de l'angle de TT' avec l'axe.

QUESTION 41

Solution par M. Devin, élève au Lycée Charlemagne.

Si l'on considère une parabole rapportée à son axe Ox *et à sa tangente au* sommet Oy; *la normale en un point quelconque* M *de cette parabole rencontre l'axe en* B *et la tangente au sommet en* I; *soit* C *le milieu de* MB; *si l'on joint* OC, *la hauteur* IH *du triangle* OIC *est la polaire de l'origine par rapport au cercle décrit sur* MB *comme diamètre.*

Menons la tangente MT au point M à la parabole ; elle rencontre la tangente au sommet en A.



De M abaissons la perpendiculaire MP sur l'axe Ox

On a $OT = OP$ par suite $AM = AT$ et, si l'on joint AC, $MH = HP$

Or, MT est aussi la tangente en M au cercle décrit sur MB; par suite MP est la polaire de A par rapport à ce cercle.

Alors H, milieu de MP, est le pôle de Oy et la droite IH, qui passe par H et qui est perpendiculaire sur OC est bien la polaire de l'origine O par rapport au cercle décrit sur M.

Remarque. — Ceci prouve que le point I décrit la droite Oy quand le point M parcourt la parabole.

D'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on décrit le cercle sur la normale* MB *en un point quelconque* M *d'une parabole, cette normale et la polaire du sommet de la parabole par rapport à ce cercle se coupent sur la tangente au sommet.*

NOTA. — La même question à été résolue par M. Puig, à Montpellier.

QUESTION 42

Solution par M. MOSNAT, à Thiers.

On considère une parabole P; *d'un point* M, *mobile sur cette courbe, on abaisse une perpendiculaire* MA *sur son axe.* O *étant le sommet de la courbe, on imagine une ellipse ayant pour axes, en grandeur et en position,* OA *et* MA. *Trouver le lieu des foyers de cette ellipse.* (Le lecteur est prié de faire la figure.)

(G. L.)

Nous distinguerons deux cas.

Premier cas. — OA est le petit axe de l'ellipse. Pour obtenir les foyers, il faut alors décrire, de O comme centre, avec MA comme rayon, un arc de cercle qui coupe MA aux deux points cherchés : soient F et F′ ces deux points.

Le triangle rectangle OAF donne $\overline{AF}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OA}^2$.

Mais $OF = MA$ et $\overline{MA}^2 = 2p \, . \, OA$, par conséquent

$$\overline{AF}^2 = OA\,(2p - OA) = OA.O'A,$$

si nous prenons $OO' = 2p$.

Le lieu cherché est donc un cercle décrit sur OO′ comme diamètre.

Deuxième cas. — OA est le grand axe et par suite le lieu des foyers.

Le lieu se compose du cercle décrit sur OO′ comme diamètre et de la droite O′X.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Puig, à Montpellier Gaullaider, au lycée Saint-Louis, à Paris.

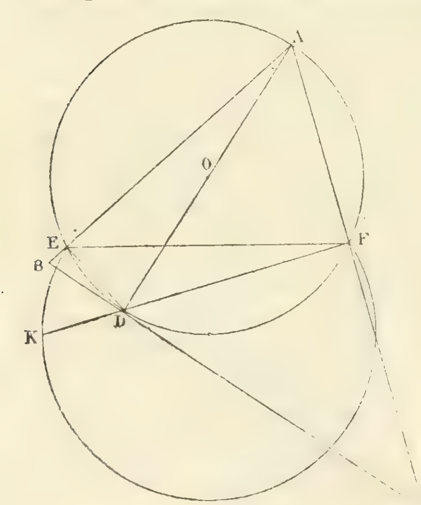
QUESTION 49

Solution par M. Puig, élève au Lycée de Montpellier.

Construire un triangle dont on connaît un angle, la hauteur issue du sommet de cet angle, et la somme des perpendiculaires abaissées du pied de cette hauteur sur les deux autres côtés.

(Hallowell.)

Le quadrilatère ADEF est inscriptible, le diamètre étant la hauteur donnée ; l'angle au centre EOF est le double de l'angle en A, et par suite la corde EF est connue en grandeur.



En outre, dans le triangle EDF, on connaît le côté EF, l'angle opposé qui est égal au supplément de l'angle en A donné, et la somme des deux cotés qui comprennent cet angle; on sait donc construire ce triangle ; il suffit pour cela de construire sur EF un segment capable du demi-supplément de l'angle donné ; de F comme centre, avec la somme donnée pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre en K l'arc de ce segment ; on joint le point F au point K; cette ligne rencontre en D la première circonférence tracée ; le diamètre DA donne le sommet A du triangle ; pour le construire complètement, il suffit de mener en D une tangente au cercle AD jusqu'à la rencontre avec les lignes AE et AF.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Deville, à Lorient; Mosnat, à Thiers; Toussaint, à Bar-le-Duc; Fleurot, à Marseille; Gaullaider au lycée Saint-Louis, à Paris.

QUESTION 60

Solution par M. Marsy, élève au Lycée de Lille.

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}=0,$$

et plus généralement

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$

on fera voir que les trois racines sont toujours réelles, et même toujours commensurables, si a^2+b^2 *est un carré parfait.*

(G. L.)

Je résous l'équation générale. Pour cela, je groupe ensemble le premier et le dernier terme, puis le second et le troisième, ce qui donne

$$(2x+a+b)\left(\frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{x(x+a+b)}\right)=0.$$

On a la première solution

$$x=-\frac{a+b}{2};$$

puis il reste l'équation

$$(x+a)(x+b)+x(x+a+b)=0$$

ou

$$2x^2+2(a+b)x+ab=0.$$

La quantité sous le radical est

$$(a+b)^2-2ab,$$

ou

$$a^2+b^2.$$

Donc les racines sont toujours réelles, et de plus elles seront commensurables si a^2+b^2 est un carré parfait.

Appliquons à l'exemple donné. Ici

$$a=1,\quad b=2,\quad a+b=3;\quad a^2+b^2=5;$$

donc on a pour les racines

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Léon Chevalier, à Sainte-Barbe; Deville, à Lorient; Desplanques, à Condé-sur-l'Escaut.

ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS SIMULTANÉES ET QUADRATIQUES

Par M. **G. de Longchamps**.

1. — Nous supposons connus les principes démontrés dans tous les cours, exposés dans tous les ouvrages élémentaires, principes relatifs à la théorie des inégalités. Nous nous proposons seulement, dans cette note, d'appliquer ces principes à des égalités et inégalités simultanées. Ce problème est très élémentaire; il offre pourtant quelque difficulté et il n'est pas à notre connaissance qu'il ait été encore abordé, au moins d'une façon générale et méthodique. Nous-même, dans ce petit travail, ne traitons que le cas le plus simple, celui où les égalités et inégalités considérées sont quadratiques.

Nous définirons d'abord en quoi consiste au juste le problème que nous allons essayer de traiter.

Soient U et V deux fonctions de la lettre x, fonctions quadratiques, c'est-à-dire susceptibles d'être décomposées en facteurs du premier ou du second degré tout au plus.

1° Existe-t-il des nombres x satisfaisant à la fois aux deux conditions

$$\begin{matrix} U = 0 \\ V > 0 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} U = 0 \\ V < 0\ ? \end{matrix}$$

Ceci constitue un premier problème qui ne comporte qu'un nombre déterminé de solutions, ce nombre pouvant être zéro; et il faut trouver ces solutions.

2° Existe-t-il des nombres x satisfaisant à la fois aux deux conditions

$$\begin{matrix} U > 0 \\ V > 0 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} U > 0 \\ V < 0\ ?\ \text{etc...} \end{matrix}$$

C'est un second problème, problème dans lequel on peut dire qu'on cherche à *résoudre des inégalités simultanées;* les solutions peuvent être en nombre infini ou ne pas exister du tout. Dans le premier cas on doit chercher s'il y a des limites

entre lesquelles on doit choisir la valeur de x et déterminer ces limites.

Un troisième problème se présente aussitôt à l'esprit quand on s'est posé les deux questions précédentes, problème dans lequel on se proposerait de trouver des nombres x satisfaisant aux trois conditions :

$$\begin{array}{lcl} U > 0 & & U > 0 \\ V > 0 & \text{ou} & V > 0, \quad \text{etc...} \\ W > 0 & & W < 0 \end{array}$$

et beaucoup d'autres ; mais nous n'aborderons, et encore dans le cas le plus simple, que les deux premiers problèmes. Peut-être cette étude engagera-t-elle quelqu'un de nos lecteurs à poursuivre et à développer une question qui nous paraît une des plus intéressantes et des plus délicates de l'algèbre élémentaire.

2. — *On propose de trouver les valeurs de* x *qui satisfont à la fois aux deux conditions :*

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x - \alpha > 0.$$

Ce problème revient à résoudre les deux équations :

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$
$$x - \alpha - y = 0. \qquad (2)$$

en exigeant que y *soit positif.* Nous supposerons $p^2 - 4q \geqq 0$, car s'il en est autrement, il n'y a aucun nombre qui puisse satisfaire à la condition (1).

L'équation qui détermine y est :

$$y^2 + y\,(2\alpha + p) + \alpha^2 + p\alpha + q = 0.$$

Cette équation admet deux racines y', y'', car :

$$(2\alpha + p)^2 - 4(\alpha^2 + p\alpha + q) = p^2 - 4q.$$

Mais il faut encore que ces racines soient positives.

Si $\alpha^2 + p\alpha + q < 0$, il y a une racine positive, l'autre est négative ; il y a donc seulement un nombre x satisfaisant au problème, c'est la racine supérieure à α ; si $\alpha^2 + p\alpha + q > 0$, les deux nombres y', y'' sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs ; positifs si $2\alpha + p < 0$, négatifs si $2\alpha + p > 0$.

En résumé :

$\alpha^2 + p\alpha + q < o$		une solution.
$\alpha^2 + p\alpha + q > o$	$2\alpha + p < o$	deux solutions,
	$2\alpha + p > o$	zéro solution.

3. — *Trouver les valeurs de* x *qui satisfont à la fois aux deux conditions :*

$$x^2 + px + q = o, \qquad (1)$$
$$x^2 + p'x + q' > o. \qquad (2)$$

Conformément à la méthode que nous avons indiquée. nous posons : $x^2 + p'x + q' - y = o.$ (3)

Nous supposons $p^2 - 4q > o$, bien entendu, et nous examinerons d'abord le cas particulier où $p = p'$. Les équations (1) et (3) entraînent celle-ci :

$$y = q' - q\,;$$

puisqu'on exige que y soit $> o$, on répondra donc que si $q' - q > o$ il y a deux solutions; il n'y en a aucune si $q' - q \leq o$.

Abordons maintenant le cas général et supposons dans ce qui va suivre $p' - p \gtrless o$.

Les équations (1) et (3) donnent pour déterminer y, et en appliquant la règle connue :

$$(q' - q - y)^2 = (pq' - qp' - py)\,(p' - p),$$

ou $$y^2 + y\,\{2(q - q') + p(p' - p)\} + T = o. \qquad (4)$$

En posant :

$$T = (q - q')^2 - (p' - p)\,(pq' - qp'),$$
$$S = p\,(p - p') + 2\,(q' - q).$$

Il est facile de vérifier que l'équation (4) admet deux racines différentes; on trouve, en effet,

$$\{2\,(q - q') + p\,(p' - p)\}^2 - 4T = (p' - p)^2\,(p^2 - 4q).$$

quantité positive, puisque nous supposons $p' - p \quad o$ et $p^2 - 4q > o$.

En raisonnant comme dans le cas qui précède, on forme le tableau suivant :

$T < o$		*une solution et une seule,*
$T > o$	$S > o$	*deux solutions,*
	$S < o$	*zéro solution,*
$T = o$	$S > o$	*une solution,*
	$S < o$	*zéro solution.*

Remarque. — On ne peut pas avoir à la fois $S = 0$ et $T = 0$, sans avoir nécessairement : ou bien $p = p'$ avec $q = q'$, ou $p^2 - 4q = 0$ avec l'une des conditions $S = 0$, $T = 0$.

Cette remarque est évidente, elle peut se vérifier par un calcul facile.

4. — *Supposons maintenant qu'on veuille trouver toutes les valeurs de* x *qui satisfont aux deux inégalités simultanées :*

$$x^2 + px + q > 0,$$
$$x - \alpha > 0.$$

Nous supposons $\frac{p^2}{4} - q > 0$; si non la première inégalité aurait lieu pour toutes les valeurs de x et le problème serait immédiatement résolu par toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $\alpha, +\infty$.

Considérons les deux équations à trois inconnues

$$y = x^2 + px + q$$
$$z = x - \alpha$$

Lorsqu'on donne à x une valeur arbitraire x', il en résulte pour y et pour z des valeurs correspondantes bien définies y', z' ; les seules conditions imposées sont $y' > 0$, $z' > 0$. Appelons x_1 la plus petite, x_2 la plus grande racine de l'équation $x^2 + px + q = 0$ et supposons d'abord

$$\alpha^2 + p\alpha + q < 0,$$

alors α est compris dans l'intervalle $x_1\, x_2$ et les valeurs de x qui satisfont aux deux inégalités sont celles qui sont comprises entre x_2 et $+\infty$. Si, au contraire, $\alpha^2 + p\alpha + q > 0$, deux cas sont à distinguer suivant que α est inférieur à x_1 ou supérieur à x_2 ; dans la première hypothèse on peut prendre pour x toutes les valeurs comprises entre α et x_1 et entre x_2 et $+\infty$, dans la seconde seulement toutes les valeurs de x supérieures à α. Pour distinguer ces deux derniers cas, on peut remarquer que $x_1 + x_2 = -p$ et que si $\alpha < x_1$ on a aussi $\alpha < x_2$ et par suite

$$2\alpha < x_1 + x_2 \quad \text{ou} \quad 2\alpha + p < 0.$$

Si au contraire $\alpha > x_2$, on a de même $2\alpha + p > 0$ et l'on peut résumer cette discussion ainsi qu'il suit :

Étant données les deux inégalités

$$x^2 + px + q > 0$$
$$x - \alpha > 0,$$

avec la condition $p^2 - 4q > 0$

et ayant posé $x^2 + px + q = 0$:

1° Si $\alpha^2 + p\alpha + q < 0,$

les solutions sont déterminées par les nombres supérieurs à la plus grande racine.

2° Si $\alpha^2 + p\alpha + q > 0,$

on distinguera les deux hypothèses $2\alpha + p < 0$ *et* $2\alpha + p > 0$: *dans le premier cas on pourra prendre pour* x *tous les nombres de l'intervalle qui sépare* α *de la plus petite racine et aussi ceux qui sont supérieurs à la plus grande racine : dans le second cas, on prendra, pour* x, *les nombres supérieurs à* α, *et ces nombres seuls.*

5. — Supposons enfin que l'on veuille résoudre *les deux négalités simultanées :*

$$x^2 + px + q > 0$$
$$x^2 + p'x + q' > 0.$$

Nous supposons, pour des raisons déjà données, $p^2 - 4q > 0$, $p'^2 - 4q' > 0$ et nous nommons x_1, x_2, les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ (1)

x_3, x_4, celle de $x^2 + p'x + q' = 0$ (2)

En posant $y = x^2 + px + q$

$$z = x^2 + p'x + q',$$

on aura donc $y = (x - x_1)(x - x_2)$

$$z = (x - x_3)(x - x_4);$$

avec les conditions $y > 0$

$$z > 0.$$

Nous nous plaçons dans le cas général, celui où les équations (1), (2), n'ont pas de racines communes, celui où l'on a, par conséquent, $T \gtrless 0$, en posant

$$T = (q - q')^2 - (p - p')(pq' - qp').$$

Nous distinguerons trois cas dans la discussion qui va suivre suivant que les racines sont rangées en grandeur croissante dans l'un ou l'autre des ordres suivants :

1° $x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4;$

2° $x_1, \; x_3, \; x_2, \; x_4;$

3° $x_1, \; x_3, \; x_4, \; x_2;$

x_1 désignant, nous le supposons, la plus petite des quatre racines.

Dans la première hypothèse, x peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à x_1; puis de x_2 à x_3; enfin de x_4 à $+\infty$.

Dans la deuxième, de $-\infty$ à x_1 et de x_4 à $+\infty$.

Enfin dans la troisième de $-\infty$ à x_1 et de x_2 à $+\infty$.

On peut faire rentrer ces deux derniers cas dans un énoncé unique en disant que : x *peut varier depuis* $-\infty$ *jusqu'à la plus petite des racines et depuis la plus grande jusqu'à* $+\infty$. Il y a donc deux cas principaux à distinguer; dans l'un il y a trois intervalles pour la variation de x, dans l'autre il n'y en a plus que deux et l'on peut se proposer *de reconnaître immédiatement et sans résoudre les équations* dans lequel des deux cas on est placé.

Soit

$$x^2 + px + q = 0,$$

l'équation qui admet la plns petite racine x_1; pour avoir l'ordre

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4$$

il est nécessaire et suffisant que les *deux racines* de cette équation satisfassent *l'une et l'autre* à l'inégalité

$$x^2 + p'x + q' > 0.$$

Or si l'on avait $T < 0$, nous avons vu plus haut (deuxième cas) qu'une seule des racines x_1, x_2 répondait à cette condition; on n'a pas d'ailleurs $T = 0$; on doit donc enfin supposer $T > 0$. Ainsi dans l'hypothèse $T > 0$, on peut avoir l'ordre x_1, x_2, x_3, x_4 : de plus on ne peut avoir que celui-ci puisque x_1 est la plus petite racine (V. le deuxième cas). Concluons donc : *Si l'on propose de résoudre les deux inégalités* $U > 0$, $V > 0$,

$$U = x^2 + px + q, \quad V = x^2 + p'x + q'.$$

Les équations $U = 0$, $V = 0$ *ayant comme racines quatre nombres différents,* x_1 *désignant le plus petit d'entre eux,* x_4 *le plus grand, si* U *représente celle de ces deux équations qui admet pour racine* x_1, *ayant calculé la fonction*

$$T = (q - q')^2 - (p - p')(pq' - qp').$$

Si $T > 0$, x *peut varier dans trois intervalles :*

1° *De* $-\infty$ *à* x_1;

2° *Dans l'intervalle des deux racines comprises entre* x_1 *et* x_4 ;
3° *De* x_4 *à* $+\infty$.

Si, au contraire $T < o$, x *peut varier seulement dans deux intervalles*

1° *De* $-\infty$ *à* x_1 :
2° *De* x_4 *à* $+\infty$.

Remarque. — Si l'on a $T = o$, cas particulier que nous avons réservé, on voit encore que x peut varier comme dans l'hypothèse $T < o$.

6. — Dans les discussions qui précèdent, nous avons, pour plus de clarté, donné aux inégalités considérées un sens défini. On remarquera que la méthode que nous avons suivie est applicable, sauf des modifications évidentes, aux inégalités ayant un sens différent de celui que nous avons adopté dans notre exposition. Nous ferons d'ailleurs ici une dernière remarque pour montrer *comment on peut par un changement de variable transformer le sens d'une inégalité du second degré.*

Considérons l'inégalité :

$$x^2 + px + q > o. \qquad (1)$$

1° Supposons d'abord $q < o$.

Posons : $$x = \frac{q}{X},$$

on aura : $$\frac{q^2}{X^2} + \frac{pq}{X} + q > o.$$

ou en multipliant par X^2 :

$$qX^2 + pq\,X + q^2 > o,$$

et en divisant par le facteur négatif q :

$$X^2 + pX + q < o. \qquad (2)$$

L'inégalité (1) se trouve ainsi transformée en une égalité équivalente, mais de sens différent.

2° Si $q > o$, on posera d'abord :

$$x = y + h,$$

$$x^2 + px + q = y^2 + (2h + p)y + h^2 + ph + q;$$

et comme l'on suppose $p^2 - 4q > o$, il y a une infinité de valeurs de h, savoir celles qui sont prises dans l'intervalle de deux racines de l'équation :

$$x^2 + px + q = 0,$$

satisfaisant à l'inégalité :

$$h^2 + ph + q < 0.$$

On retombe ainsi dans le cas précédent.

ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE 1882

Mathématiques.

On donne deux sphères O et O', et un plan P ; on propose de mener un second plan Q tel qu'il coupe les deux sphères suivant deux cercles dont les projections sur le plan P soient des ellipses ayant leurs axes respectivement égaux aux quatre longueurs données a, b, a', b'. Le plan Q sera déterminé par son intersection avec le plan P et l'angle des deux plans. — Discuter.

— Chercher la condition pour que le polynôme $x^4 + bx^2 + c$ soit divisible par $x^2 + px + q$.

— Résoudre le système suivant :

$$u^m v^n = a^x ; \; u^n v^m = a^y ;$$
$$u^x v^y = b ; \; u^y v^x = c.$$

— Résoudre

$$\cot g\, x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

— Étudier la variation de distance d'un point fixe A à un point d'un cercle O donné.

Physique.

Soit une balance dont le fléau pèse 50 grammes, la longueur du fléau est de $0^m,40$; son centre de gravité est à $0^m,01$ au-dessous de l'axe de suspension ; l'aiguille indicatrice a $0^m,20$ de longueur. On demande : 1° le déplacement de l'aiguille pour un poids p mis dans l'un des plateaux ; 2° quelle modification il faudrait apporter à l'appareil pour qu'il pût peser des poids décroissants jusqu'à 1 milligramme. On admettra que le déplacement minimum appréciable à l'œil nu pour l'extrémité de l'aiguille est de 1/2 millimètre.

— Soit un cône qui, plongé par sa pointe dans l'eau, émerge d'une hauteur égale à a, et, plongé dans le mercure, émerge d'une hauteur égale à b ; on demande la hauteur totale du cône et la densité de la matière dont il est fait. — Application, $a = 0.2$; $b = 0.9$; densité du mercure, 13.59.

— Considérons un tube à deux branches réunies par un tube capillaire ; une des branches est fermée, et a $1^m,50$ de hauteur ; on a versé du mercure dans le tube, de façon à enfermer un certain volume d'air. A la pression de $0^m,70$, et à 0°, le mercure s'élève de 1 mètre dans la branche fermée et de $0^m,40$ dans la branche ouverte ; on demande quelle sera la position de la colonne mercurielle à la pression P et à la température T ; le coefficient de dilatation cubique du mercure est 0,00006 ; le coefficient de dilatation cubique de l'air est 0,0036 ; on négligera la dilatation du verre. — Application : $P = 0.720$; $T = 100^o$.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Juillet 1882.

BORDEAUX

Résoudre $\sin x = \frac{p}{q} \operatorname{cotg} x$; discuter.

Application : $p = 23$, $q = 30$.

— Un terrain triangulaire a pour côtés 130, 140, 150 mètres; on creuse tout autour un fossé qui raccourcit chacun des trois côtés de 3 mètres; la profondeur du fossé est de $1^m.50$. On répand ensuite sur le triangle la terre provenant du déblai à une hauteur uniforme. Quelle sera cette hauteur ?

— On donne un cylindre horizontal de rayon R; on pose sur ce cylindre une tige rigide AB, pesante, de longueur 2L, dont le poids est p par unité de longueur. Lorsque la tige est posée horizontalement, s'appuyant sur son point milieu, elle reste en équilibre. On suspend à son extrémité A un poids π, la tige roule sans glissement sur le cylindre et prend la

position A'B' où elle est immobile. Trouver à ce moment l'angle que fait A'B' avec l'horizon.

Application : L = 1, R = 2, $\pi = 5$, $p = 12$.

— Somme des n premiers termes d'une progression géométrique décroissante.

Le premier terme est égal à a, la raison à q. Calculer cette somme quand $n = 12$, $a = 110$, $q = \frac{9}{10}$. Dans ce cas on demande la différence qu'il y a entre cette somme et le nombre qu'on obtiendrait si la progression était continuée à l'infini.

— Inscrire dans un cercle de rayon R un triangle isoscèle tel que la somme de la base et de la hauteur soit égale à une quantité donnée h. Maximum de h. Calculer la distance de la base au centre du cercle dans le cas où R = 135 et $h = 255$.

— Résoudre $\sin(\alpha + x) = \frac{1}{3}\cos(\alpha - x)$.

Cas où $\alpha = 18°30'$.

— Calculer le périmètre et la surface d'un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R. Calculer en outre le volume et la surface engendrés par cet hexagone en tournant autour d'un diamètre passant par un de ses sommets.

Tansformer $\frac{1}{a - b\sqrt{c}} - \frac{1}{a + b\sqrt{c}}$ et calculer cette expression pour $c = 3$, $b = 8$. $a = 20$.

TOURNON

Dans une sphère donnée inscrire un cylindre tel que son volume augmenté de trois fois les volumes des segments sphériques qui ont même base que lui donne une somme égale à πa^3. Maximum de ce volume.

NANTES

Les racines d'une équation du deuxième degré ont $4a^2b^2$ pour différence, et $(a^4 - b^4)^2$ pour produit. Calculer ces racines. Montrer que si a et b sont entiers, ces racines sont des nombre s positifsentiers et carrés parfaits.

TOULOUSE

Les angles consécutifs A et C d'un trapèze sont droits. On donne les côtés parallèles $AB = a$, $CD = b$ et le côté $AC = h$. On coupe le trapèze par une droite EF parallèle à AB et de longueur x. Calculer les segments AF, CF de la droite AC par la considération des aires des trapèzes ABEF, CDEF, ABCD.

Si on fait tourner la figure autour de AC, calculer les volumes engendrés par les trapèzes ABEF, EFDC. Déterminer x de façon que ces volumes soient égaux.

— Le grand axe de l'orbite d'une planète est quadruple du grand axe de l'orbite terrestre. Connaissant la durée de la révolution sidérale de la terre, évaluer en jours solaires moyens la durée de la révolution sidérale de la planète proposée.

MARSEILLE

On coupe un tétraèdre SABC par un plan parallèle aux deux arêtes opposées SA, BC; démontrer que l'intersection est un parallélogramme; maximum ou minimum de cette surface.

— Démontrer que dans un pentagone régulier les diagonales qui n'aboutissent pas au même sommet se coupent en moyenne et extrême raison.

— Inscrire dans un triangle équilatéral ABC, de côté a, un triangle équilatéral DEF, de surface égale à la moitié du premier. Calculer les segments AD, DB, en fonction de a.

NANTES

Un levier pesant a la forme d'un triangle rectangle OBA; l'angle A est égal à α; la matière dont le triangle est composé est homogène; il peut tourner dans un plan vertical autour de l'angle droit O. Quelle force faut-il appliquer suivant le côté AB pour maintenir ce levier en équilibre dans une position donnée, en supposant du reste son poids connu et égal à P.

BESANÇON

On donne un cercle de rayon R; sur le diamètre AB on construit un triangle équilatéral ABC; on prend sur OA

une longueur OD $= a$; on tire CD, et on prolonge cette droite jusqu'à sa seconde intersection M avec la circonférence. Déterminer la longueur de la corde AM.

MONTPELLIER

Simplifier l'expression

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

— Résoudre l'équation

$$\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right).$$

PAU

La diagonale d'un rectangle est $2s$. Si l'on allonge le plus petit côté de a, en raccourcissant le plus grand de b, la diagonale reste la même; calculer les côtés du triangle.

— On donne un triangle équilatéral ABC, et on partage BC en quatre parties égales. — On joint chacun des points de division au sommet A. Calculer les quatre angles en A, et le rapport de chacune des lignes de division au côté BC.

— Deux droites rectangulaires AB, AC étant données, ainsi qu'une circonférence de rayon R tangente à ces droites, trouver sur AB un point B tel qu'en menant de ce point une troisième tangente, la surface du triangle ABC ainsi obtenu soit égale à un carré donné m^2.

— Résoudre l'équation

$$\cos^2 x = \frac{5}{12} \sin x.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

64. — On donne un demi-cercle construit sur la droite PQ comme diamètre; soient A et B deux points pris sur la circonférence, et tels que PA $+$ QB $= 2$R; les droites PB et QA se coupent en un point C.

1° Démontrer que le triangle CPQ jouit de cette propriété que l'inverse de la hauteur relative à PQ est égal à la somme des inverses des côtés qui la comprennent.

2° Établir que cette propriété s'applique aussi au triangle CAB, en considérant la hauteur issue du point C.

3° Étudier la variation de AB quand le point A est supposé mobile sur la circonférence, et montrer que cette longueur passe par un maximum relatif quand la figure PABQ est un demi-hexagone régulier.

4° Ayant projeté les points P,Qsur AB, on obtient deux points A',B'. On propose d'établir la relation qui existe entre A'B' et AB. *(G. L.)*

65. — Démontrer les propositions suivantes:

1° La somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par trois fois le terme du milieu, et toujours par 9.

2° Le nombre $\frac{n^3 + (n + 2)^3}{4}$ est toujours un nombre entier; il est de plus toujours un nombre composé, excepté pour $n = 1$.

3° Les nombres de la forme arithmétique $n^4 + n^2 + 1$ sont toujours composés, excepté pour $n = 1$. *(G. L.)*

66. — On considère deux cercles Δ et Δ' se coupant orthogonalement. On prend sur Δ un point quelconque A, et on mène par ce point à Δ une tangente qui rencontre Δ' aux points B et C; par ces points et par le point A', diamétralement opposé à A, on fait passer une circonférence qui rencontre AA' en un point I. Trouver le lieu décrit par ce point I, lieu qui est une circonférence. *(G. L.)*

Le Rédacteur-Gérant,

E. VAZEILLE.

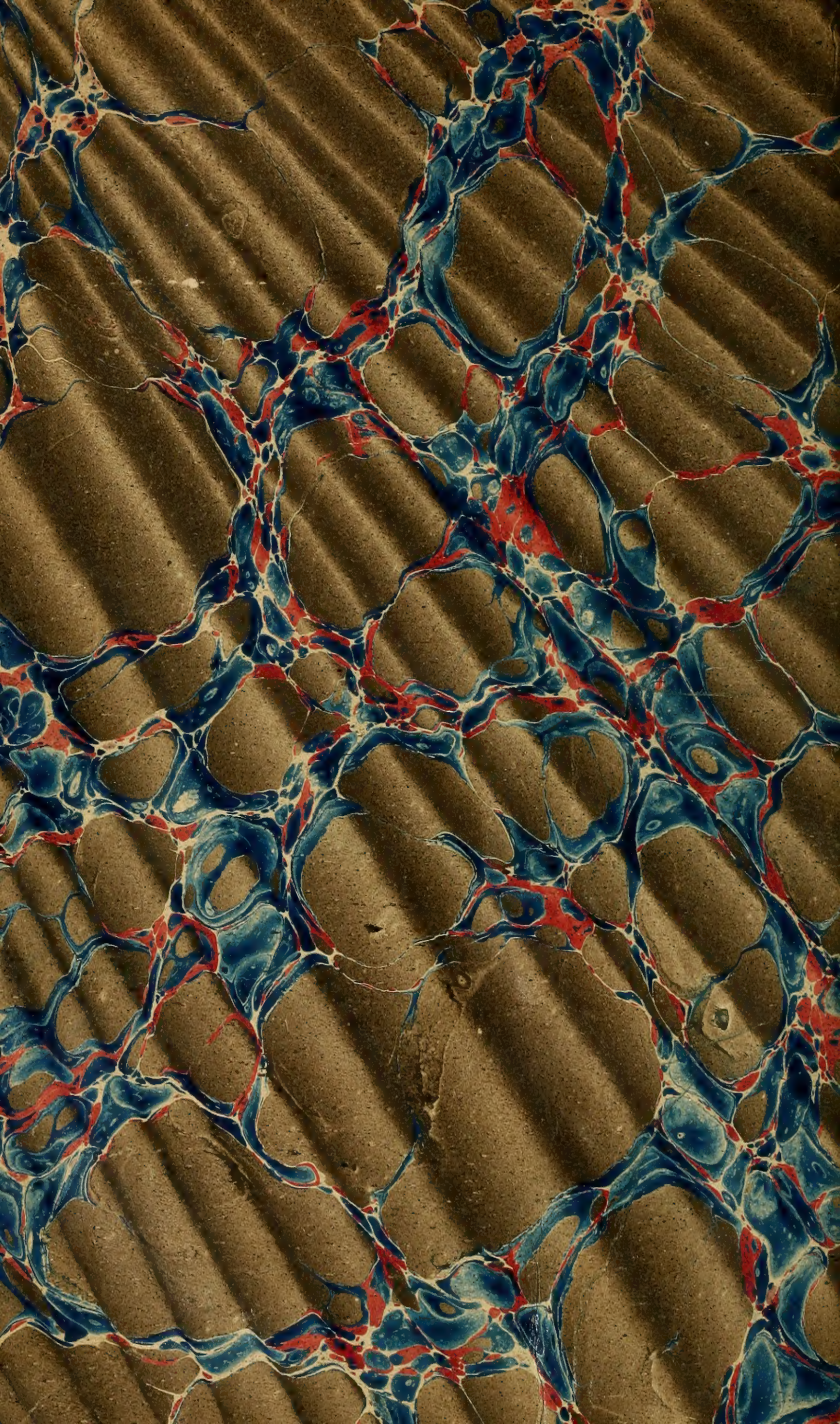
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25070-2.

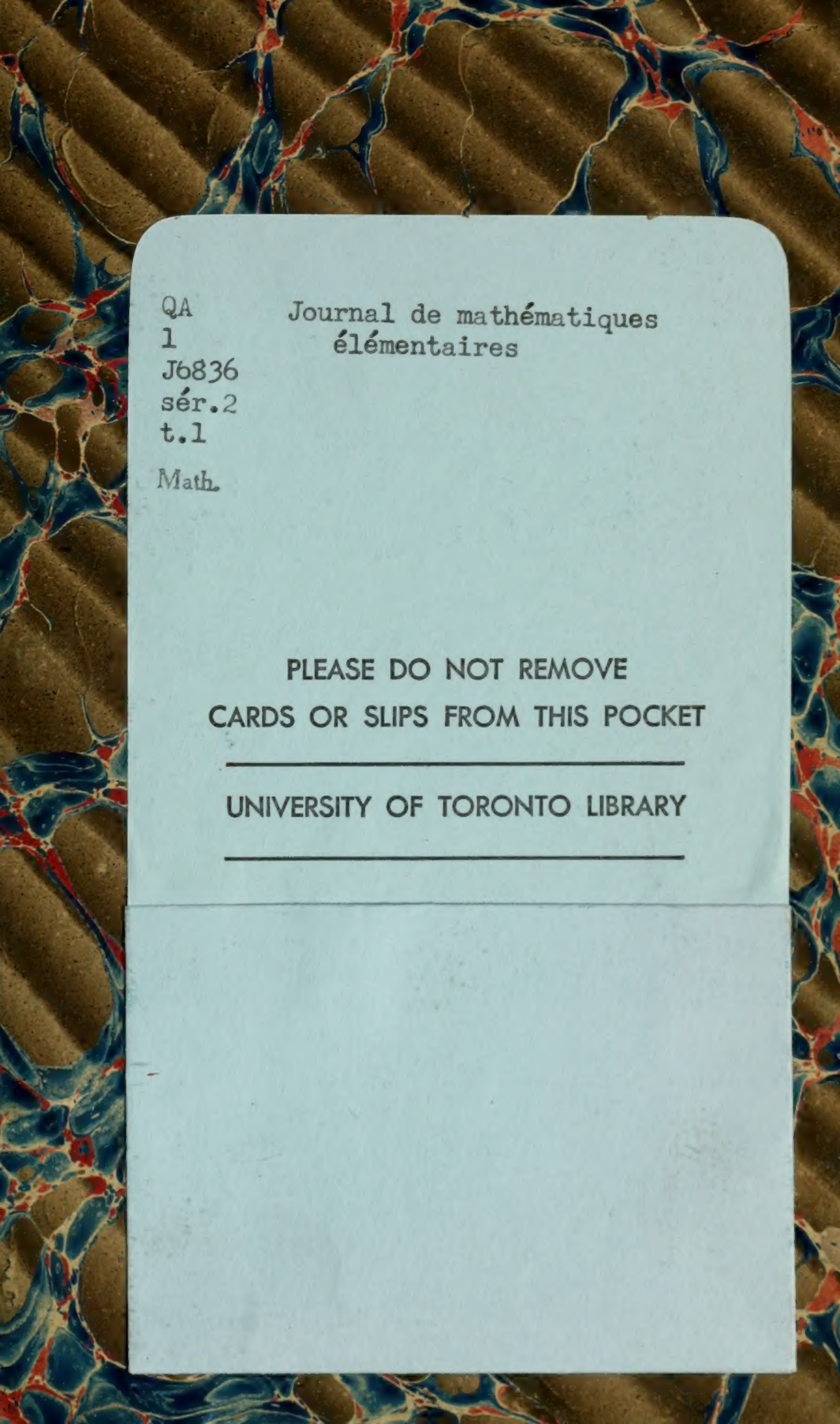
TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Variétés.

TABLE ALPHABETIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23070-2.




QA
1
J6836
sér.2
t.1
Math.
Journal de mathématiques
élémentaires
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

